UN METODO DE CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS BASADO EN LA FORMA NORMAL DISTRIBUTIVA

Mario Rodríguez Artalejo

Recibido: 9 enero 1980

Presentado por el académico numerario D. Alberto Dou MasdeXexás

§ 1. Introducción

Basándose en la forma normal distributiva de J. Hintikka [4, 5] y en el «juego de Ehrenfeucht-Fraïssé» [2, 3], que pone de manifiesto el significado algebraico de ésta, W. Schönfeld [8, 9] ha desarrollado un método de construcción de estructuras a lo sumo numerables en una cantidad numerable de «pasos finitos». Del método de Schönfeld se deduce una versión algebraica del teorema de compacidad para lenguajes de primer orden numerables, así como diversas aplicaciones a la teoría de modelos.

En mi tesis doctoral [6] investigué más de cerca la conexión entre las ideas de Hintikka y las de Schönfeld, obteniendo una versión «sintáctico-efectiva» del método de Schönfeld, más adecuada para aplicaciones relacionadas con la teoría de la recursividad. Una exposición más elaborada de este método, junto con algunas aplicaciones, pueden verse en [7]. Allí hice constar además la posibilidad de generalizar el método a lenguajes de primer orden de cardinalidad arbitraria. En este trabajo se presenta el método generalizado junto con dos aplicaciones: Un «cálculo algebraico» para la lógica de primer orden, inspirado en el procedimiento de refutación de Hintikka [5], y una versión algebraica del teorema de compacidad, que generaliza la dada por Schönfeld [8] para el caso numerable.

La idea del método es la siguiente: Partiendo de las llamadas «fórmulas de Hintikka» (miembros de la forma normal distributiva) y haciendo uso de su significado algebraico, se formulan ciertas condiciones necesarias de satisfactibilidad. Las fórmulas de Hintikka que las verifican se llaman «buenas». Se consideran entonces ciertos sistemas dirigidos de fórmulas de Hintikka buenas, y se ve cómo a partir de ellos es posible definir un modelo que satisface a todas las fórmulas del sistema. En el caso numerable, basta considerar sucesiones de fórmulas de Hintikka buenas como se hizo en [6] y [7].

El plan del trabajo es el siguiente: En § 2 se introducen las fórmulas de Hintikka y la forma normal distributiva; en § 3 se desarrolla el método, y en § 4 se presentan las aplicaciones. Gran parte del desarrollo de [7] ha tenido que repetirse en este trabajo con el fin de hacerlo comprensible, ya que la mayoría de los conceptos no son «standard».

§ 2. Fórmulas de Hintikka y forma normal distributiva

Sea L (K) el conjunto de las fórmulas del lenguaje de primer orden con identidad cuyos símbolos no lógicos pertenecen todos al conjunto K. Para simplificar la notación, imponemos la restricción (inesencial) de que K conste solamente de símbolos de relación.

El rango de cuantificadores rg (ψ) de $\psi \in$ L (K) se define por inducción sobre la construcción de ψ:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rg}(\psi) = 0 \quad \text{si} \quad \psi \text{ es atómica}\\
&\mathrm{rg}(\neg\psi) = \mathrm{rg}(\psi)\\
&\mathrm{rg}(\psi_1 \vee \psi_2) = \mathrm{rg}(\psi_1 \wedge \psi_2) = \max(\mathrm{rg}(\psi_1), \mathrm{rg}(\psi_2))\\
&\mathrm{rg}(\exists x\, \psi) \,\|\, \mathrm{rg}(\forall x\, \psi) = \mathrm{rg}(\psi) + 1
\end{aligned}$$

lib (ψ) designará el *conjunto de las variables libres de* ψ.

Dado n, r, números naturales, ponemos:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}(n, r, \mathrm{K}) = \{\psi \in \mathrm{L}(\mathrm{K}) : \mathrm{rg}(\psi) \leq n, \mathrm{lib}(\psi) \subseteq \{v_0, \ldots v_{r-1}\}\}\\
&\mathrm{At}(r, \mathrm{K}) = \{\psi \in \mathrm{L}(o, r, \mathrm{K}) : \psi \text{ atómica}\}
\end{aligned}$$

siendo v_0, v_1, ... la enumeración canónica de las variables.

En lo que sigue, a^r designará una sucesión finita $(a_0, a_1, \ldots, a_{r-1})$. Análogamente b^s, etc.

Fórmulas de Hintikka

Sea K finito y fijo. Para n, r naturales cualesquiera definimos conjuntos de fórmulas T I (n, r, K), H (n, r, K) como sigue:

$$\mathrm{T\,I}\,(n, r, \mathrm{K}) = \{ \varphi^n (\mathfrak{A}\,;\, a^r) : \mathfrak{A} \text{ K-estructura}, \; a^r \in \mathrm{A}^r \}$$

$$\mathrm{H}\,(n, r, \mathrm{K}) = \{ \varphi^n{}_r (\Phi) : \Phi \subseteq \mathrm{At}\,(r, \mathrm{K}) \quad \text{si} \quad n = 0\,;$$
$$\varnothing \neq \Phi \subseteq \mathrm{H}\,(n-1, r+1, \mathrm{K}) \quad \text{si} \quad n > 0 \}$$

siendo:

$$(\mathfrak{A}\,;\, a^r) = \bigwedge \{ \psi : \psi \in \mathrm{At}\,(r, \mathrm{K}), \mathfrak{A} \models \psi\,[a^r] \} \wedge \bigwedge \{ \neg \psi : \psi \in \mathrm{At}\,(r, \mathrm{K}), \text{no } \mathfrak{A} \models \psi\,[a^r] \}$$
$$\varphi^0{}_r (\Phi) = \bigwedge \{ \psi : \psi \in \Phi \} \wedge \bigwedge \{ \neg \psi : \psi \in \mathrm{At}\,(r, \mathrm{K}) - \Phi \}$$
$$(\mathfrak{A}\,;\, a^r) = \bigwedge \{ \exists\, v_r\, \varphi^{n-1} (\mathfrak{A}\,;\, a^r\, a) : a \in \mathrm{A} \} \wedge \forall\, v_r \bigvee \{ \varphi^{n-1} (\mathfrak{A}\,;\, a^r\, a) : a \in \mathrm{A} \}$$
$$\varphi^n{}_r (\Phi) = \bigwedge \{ \exists\, v_r\, \varphi : \varphi \in \Phi \} \wedge \forall\, v_r \bigvee \{ \varphi : \varphi \in \Phi \}$$

Por inducción sobre n puede demostrarse que T I $(n, r, K) \subseteq$ $\subseteq$ H (n, r, K) y que H (n, r, K) es finito. Con ello, las fórmulas definidas más arriba son de primer orden.

Los elementos de H (n, r, K) se llaman *fórmulas de Hintikka de rango* n *en* r *variables*; los elementos de T I (n, r, K) se llaman *tipos de* n-*isomorfía de* r-*sucesiones*. $\varphi^n (\mathfrak{A}\,;\, a^r)$ expresa las maneras posibles de ampliar la sucesión a^r en $\mathfrak{A}$ a sucesiones de longitud $r + n$ (véase [10]). Se puede demostrar que T I (n, r, K) consta exactamente de las fórmulas satisfactibles de H (n, r, K). Concretamente:

1. Teorema.—Sea $\mathfrak{A}$ K-estructura, $a^r \in \mathrm{A}^r$, $\varphi \in$ H (n, r, K). Se verifica:

$$\mathfrak{A} \models \varphi\,[a^r] \Longleftrightarrow \varphi = \varphi^n (\mathfrak{A}\,;\, a^r).$$

Demostración.—Por inducción sobre n (véase [6]). $\square$

En el caso $r = 0$, pondremos $\varphi^n (\mathfrak{A})$ en lugar de $\varphi^n (\mathfrak{A}\,;\, \varnothing)$. Diremos que dos K-estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son n-*isomorfas* y pondremos $\mathfrak{A} \cong_n \mathfrak{B}$ si $\mathfrak{B} \models \varphi^n (\mathfrak{A})$. Es posible definir esta relación de manera puramente algebraica, sin hacer uso de lenguajes formales (véase [6]).

Emplearemos también las notaciones T I (p), H (p), L (p) siendo $p = (n, r, K)$; diremos entonces que p es una *terna de parámetros*. Definimos:

$$p_1 \leq p_2 \Longleftrightarrow n_1 \leq n_2, \quad r_1 \leq r_2, \quad \mathrm{K}_1 \subseteq \mathrm{K}_2$$

Es interesante tener presente el modo en que otras fórmulas de Hintikka aparecen como subfórmulas de una fórmula de Hintikka dada. Para $\varphi \in H(n, r, K)$, ponemos:

$$\mathrm{Mb}(\varphi) = \text{el conjunto } \Phi \text{ tal que } \Phi = \varphi^n{}_r(\Phi)$$

$$S^n(\varphi) = \{\varphi\}$$

$$S^{m-1}(\varphi) = \bigcup \{\mathrm{Mb}(\hat{\varphi}) : \hat{\varphi} \in S^m(\varphi)\} \quad (0 < m \leqslant n)$$

$$S(\varphi) = \bigcup_{m=0}^{n} S^m(\varphi)$$

Mb (φ) es el *conjunto de los miembros* de φ y $S^m(\varphi)$ es el m-*ésimo estrato* de φ. Se verifica $S^{n-j}(\varphi) \subseteq H(n - j, r + j, K)$.

Forma normal distributiva

Una terna de parámetros p se dice que es *adecuada* para φ si $\varphi \in L(p)$.

La demostración del siguiente teorema, cuya versión original se debe a Hintikka [4], puede verse en [6]:

2. TEOREMA.—Existe un procedimiento efectivo que asigna a cada par (ψ, p), con p adecuada para ψ, un conjunto $\mathrm{FND}(\psi, p) \subseteq H(p)$, tal que ψ y $\bigvee \mathrm{FND}(\psi, p)$ son lógicamente equivalentes.

$\bigvee \mathrm{FND}(\psi, p)$ se dice que es una *forma normal distributiva* para ψ. En caso de que p sea la mínima terna de parámetros adecuada para ψ, hablaremos de «la forma normal distributiva» y pondremos FND (ψ). Si $\mathrm{FND}(\psi, p)$ es vacío, convenimos en que $\bigvee \mathrm{FND}(\psi, p)$ sea una fórmula insatisfactible cualquiera. Nótese, no obstante, que existen fórmulas insatisfactibles con FND no vacía, como consecuencia de la indecidibilidad de la lógica de primer orden.

En el resto de este apartado vamos a estudiar dos relaciones entre fórmulas de Hintikka, en las cuales se basa el método que desarrollaremos en § 3.

La relación de inmersión

Dados dos tipos de isomorfía $\varphi^n(\mathfrak{A}; a^r)$, $\varphi^m(\mathfrak{B}; b^s)$ tales que $\mathfrak{A}$ es una K-estructura, $\mathfrak{B}$ es una K$'$-estructura, $n \leqslant m$, $r \leqslant s$, $K \subseteq K'$ y $\varphi^n(\mathfrak{A}; a^r) = \varphi^n(\mathfrak{B} \restriction K; b^r)$, $\varphi^m(\mathfrak{B}; b^s)$ «prolonga» en un cierto sentido a $\varphi^n(\mathfrak{A}; a^r)$. Esta idea puede precisarse y generalizarse a fórmulas de Hintikka arbitrarias de manera puramente sintáctica.

3. DEFINICIÓN.—Sean $n \leqslant n'$, $K \subseteq K'$, $f : r \longrightarrow r'$*, $\varphi \in H(p)$, $\varphi' \in H(p')$. La *relación de inmersión* $\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$ se define como sigue:

CASO 1.º—$n = n'$:

$$= 0 : \varphi \xrightarrow{f} \varphi' \quad \text{sii} \quad \mathrm{Mb}(\varphi) = \left\{ \psi \in \mathrm{At}(r, K) : \psi \frac{v_{f(0)} \cdots v_{f(r-1)}}{v_0 \cdots v_{r-1}}{}^{**} \in \mathrm{Mb}(\varphi') \right\}$$

$$> 0 : \varphi \xrightarrow{f} \varphi' \quad \text{sii} \quad \mathrm{Mb}(\varphi) = \left\{ \hat{\varphi} \in H(n-1, r+1, K) : \begin{array}{l} \text{existe} \quad \hat{\varphi}' \in \mathrm{Mb}(\varphi') \text{ t. q.} \\ \hat{\varphi} \xrightarrow{f \cup \{(r, r')\}} \hat{\varphi}' \end{array} \right\}$$

CASO 2.º—$n < n'$:

$\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$ sii existe $\tilde{\varphi}' \in S^n(\varphi')$ tal que $\varphi \xrightarrow{f} \tilde{\varphi}'$.

«$\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$» significa pues que a través del renombramiento de las variables inducido por f, φ se convierte en una «parte» de φ'.

Convenio: En lugar de $\varphi \xrightarrow{id_r} \varphi'$, escribiremos $\varphi \longrightarrow \varphi'$.

Cuando $n = n'$, φ queda determinada unívocamente por φ' y f. Ello permite introducir las notaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \varphi' \circ f &= \text{la única } \varphi \in H(n', r, K') \text{ t. q. } \varphi \xrightarrow{f} \varphi' \\ \varphi' \upharpoonright r &= \varphi' \circ \mathrm{id}_r \\ \varphi' \upharpoonright K &= \text{la única } \varphi \in H(n', r', K) \text{ t. q. } \varphi \longrightarrow \varphi' \end{aligned}$$

Para trasladar la unicidad de φ al caso $n < n'$, introduciremos la «propiedad (I)»:

4. DEFINICIÓN.

(a) $\varphi \in H(p)$ tiene la propiedad (I*) si (i) $n = 0$ ó (ii) $n > 0$ y $\varphi_1 \upharpoonright r = \varphi_2 \upharpoonright r$ para $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Mb}(\varphi)$ cualquiera.

---

* En este trabajo se identifican los números naturales con los ordinales de Von Neumann finitos, de manera que cada uno de ellos es igual al conjunto de sus predecesores.

** $\psi \dfrac{t_1 \cdots t_r}{x_1 \cdots x_r}$ denota el resultado de la sustitución simultánea de las variables x_i por los términos t_i en ψ.

(b) $\varphi \in \mathrm{H}(p)$ tiene la propiedad (I) si toda $\hat{\varphi} \in \mathrm{S}(\varphi)$ tiene la propiedad (I*).

Evidentemente, (I) es decidible. Además:

5. LEMA.

(a) Toda fórmula de Hintikka satisfactible verifica (I).

(b) Si la fórmula φ' de la definición 3 verifica (I), entonces φ está unívocamente determinada y verifica también (I). Además, $\varphi \xrightarrow{f} \tilde{\varphi}'$ se cumple *para toda* $\tilde{\varphi}' \in \mathrm{S}^n(\varphi')$.

DEMOSTRACIÓN.—Por inducción sobre $n' - n$. Véase [6]. $\square$

Diremos que las fórmulas de Hintikka que verifican (I) son «*aceptables*». Para fórmulas de Hintikka aceptables introducimos ahora dos nuevos conceptos:

$$\varphi' \downarrow p = \text{la única } \varphi \in \mathrm{H}(p) \text{ t. q. } \varphi \longrightarrow \varphi'$$
$$\varphi' \downarrow n = \varphi' \downarrow (n, r', \mathrm{K}')$$

En lo que sigue supondremos implícitamente que todas las fórmulas de Hintikka consideradas son aceptables. Podemos suponer también que todas las fórmulas de FND (ψ, p) (véase teorema 1) son aceptables. Bajo esta hipótesis, se verifica:

6. LEMA.—Sean $p \leqslant p'$; p, p' adecuadas para ψ; $\mathfrak{A}$ K-estructura; $a^r \in \mathrm{A}^r$. Entonces:

(a) $\mathrm{FND}(\psi, p') = \{\varphi' \in \mathrm{H}(p') : \varphi' \downarrow p \in \mathrm{FND}(\psi, p)\}$.

(b) $\varphi^n(\mathfrak{A}; a^r) \in \mathrm{FND}(\psi, p')$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \psi[a^r]$.

DEMOSTRACIÓN.—Véase [6]. $\square$

La relación de despliegue

Supuesto que se verifique $\varphi^n(\mathfrak{A}; a^r) \longrightarrow \varphi^m(\mathfrak{B}; b^s)$, sabemos que las «posibilidades de ampliar n veces» para a^r en $\mathfrak{A}$ son las mismas que para b^r en $\mathfrak{B}$. La nueva relación $\varphi^n(\mathfrak{A}; a^r) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \varphi^m(\mathfrak{B}; b^s)$ va a añadir a esto el hecho de que estas ampliaciones van a ser realizables por medio de elementos de la propia sucesión b^s. Damos una definición sintáctica para fórmulas de Hintikka arbitrarias:

7. DEFINICIÓN.—Sea $n \leqslant n'$, $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$ $f: r \longrightarrow r'$, $\varphi \in \mathrm{H}(p)$.

La *relación de despliegue* $\varphi \xrightarrow{f}\!\!\!\rightarrow \varphi'$ se define por inducción sobre n así:

$$n = 0 : \varphi \overset{f}{\twoheadrightarrow} \varphi' \quad \text{sii} \quad \varphi \xrightarrow{f} \varphi'$$

$$n > 0 : \varphi \overset{f}{\twoheadrightarrow} \varphi' \quad \text{sii} \quad \text{(i)} \ \varphi \xrightarrow{f} \varphi'$$

e

$$\text{(ii) para toda} \quad \hat{\varphi} \in \mathrm{Mb}\,(\varphi) \quad \text{existe} \quad k < r'$$

$$\text{t. q.} \ \hat{\varphi} \xrightarrow{f \cup \{(r,\, k)\}}\!\!\!\rightarrow \varphi'$$

Convenio: En lugar de $\varphi \overset{id_r}{\twoheadrightarrow} \varphi'$, escribiremos $\varphi \twoheadrightarrow \varphi'$.

El siguiente teorema, que se demuestra fácilmente por inducción sobre n, ilustra el significado algebraico de las relaciones de inmersión y despliegue:

8. TEOREMA.—Supuesto $\varphi^n (\mathfrak{A}; a^r) \xrightarrow{f} \varphi^m (\mathfrak{B}; b^s)$, se tiene para toda fórmula $\psi \in L\,(n, r, K) : \mathfrak{A} \models \psi\,[a^r]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \psi\,[b^f]$ (siendo b^f la sucesión finita $(b_{f(0)}, \ldots, b_{f(r-1)})$). En caso de que $\varphi^n (\mathfrak{A}; a^r) \overset{f}{\twoheadrightarrow} \varphi^m (\mathfrak{B}; b^s)$ y ψ sea una fórmula existencial, cada cuantificador existencial de ψ se satisface en $\mathfrak{B}$ por un «ejemplo» de b^s.

Algunas propiedades

A partir de las definiciones de las relaciones de inmersión y despliegue se obtienen, mediante demostraciones inductivas, las siguientes propiedades:

(I1) $\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$ es decidible

(I2) $\varphi \longrightarrow \varphi$

(I3) $\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$ y $n \leqslant m \leqslant n' \Rightarrow \varphi \xrightarrow{f} \hat{\varphi}'$ para toda $\hat{\varphi}' \in S^m (\varphi')$

(I4) $\varphi^n (\mathfrak{A} \upharpoonright K ; a^f) \xrightarrow{f} \varphi^m (\mathfrak{A} ; a^s)$ ($\mathfrak{A}$ K'-estructura)

(I5) $\varphi \xrightarrow{f} \varphi' \xrightarrow{g} \varphi'' \Rightarrow \varphi \xrightarrow{gof} \varphi''$

(I6) $\varphi \xrightarrow{f} \varphi' \Rightarrow \varphi \xrightarrow{f} \varphi' \downarrow m$, supuesto $n \leqslant m \leqslant n'$

(I7) Si $\varphi \xrightarrow{f} \hat{\varphi}'$, $\hat{\varphi}' \in S^m (\varphi')$ y $f : r \longrightarrow r'$, entonces $\varphi \xrightarrow{f} \varphi' \downarrow m$

(D1) $\varphi \overset{f}{\twoheadrightarrow} \varphi'$ es decidible

(D2) Si $\varphi \overset{f}{\twoheadrightarrow} \varphi' \xrightarrow{g} \varphi''$ ó $\varphi \xrightarrow{f} \varphi' \overset{g}{\twoheadrightarrow} \varphi''$, entonces $\varphi \overset{gof}{\twoheadrightarrow} \varphi''$

(D3) $\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$ y $n \leqslant m \leqslant n' \Rightarrow \varphi \xrightarrow{f} \hat{\varphi}'$ para toda $\hat{\varphi}' \in S^m(\varphi')$

(D4) $\varphi \xrightarrow{f} \varphi' \Rightarrow \varphi \xrightarrow{f} \varphi' \downarrow m$, supuesto $n \leqslant m \leqslant n'$

(D5) Si $\varphi \xrightarrow{f} \hat{\varphi}'$, $\hat{\varphi}' \in S^m(\varphi')$ y $f : r \longrightarrow r'$ entonces $\varphi \xrightarrow{f} \varphi' \downarrow m$

§ 3. Sistemas de inmersión y despliegue

El teorema 8 sugiere intentar la construcción de un modelo a partir de una «cadena» de fórmulas de Hintikka, de la forma

$$\varphi_0 \xrightarrow{f_0} \varphi_1 \xrightarrow{f_1} \varphi_2 \longrightarrow \dots \xrightarrow{f_{i-1}} \varphi_i \xrightarrow{f_i} \dots \dots$$

Puesto que así conseguiríamos sólo estructuras para un lenguaje numerable, vamos a considerar más en general sistemas dirigidos de fórmulas de Hintikka (para el caso numerable, véase [6] y [7]). Veremos que para asegurar el éxito de la construcción va a ser preciso imponer a las fórmulas del sistema restricciones adicionales.

9. Definición.—Un *conjunto dirigido* $(I, \leqslant)$ diremos que es *admisible* si: (1) Los elementos de I son de la forma $i = (n_i, X_i)$ donde n_i es un número natural y X_i es un conjunto finito; (2) El orden $\leqslant$ está dado por la ley: $i \leqslant j$ sii $n_i \leqslant n_j$ y $X_i \subseteq X_j$; y (3) Para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i < k$, $j < k$.

Un conjunto dirigido admisible $(I, \leqslant)$ diremos que es *fuerte* si

$$\bigcup \{n_j \mid j > i, X_j = X_i\} = \omega$$

para toda $i \in I$.

Nuestros resultados se van a referir a dos tipos de familias de fórmulas de Hintikka, indexadas por elementos de conjuntos dirigidos admisibles.

Propiedades (II) y (III); sistemas de despliegue

10. Definición.—Sea $\varphi \in H(p)$ una fórmula de Hintikka.

(a) φ tiene la *propiedad (II*)* sii $\varphi \downarrow 0$ es satisfactible;

(b) φ tiene la *propiedad (III*)* si se verifica (b1) ó (b2):

(b1) $n = 0$.

(b2) $n > 0$ y: para cada $t < r$ existe $\hat{\varphi} \in \mathrm{Mb}(\varphi)$ tal que:

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi} \circ (\mathrm{id}_r \cup \{(r, t)\})$$

(c) φ tiene la *propiedad (II) resp. (III)* si toda $\hat{\varphi} \in S(\varphi)$ tiene la propiedad (II*) resp. (III*).

El significado de (III) es que la sucesión $(v_0, \ldots, v_{r-1})$ puede ampliarse mediante v_t para cada $t < r$. Esta propiedad jugará un papel central en la demostración del teorema 13.

11. LEMA.—Las propiedades (II) y (III) son decidibles; además:

(a) Si $\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$ y φ' cumple (II) resp. (III), entonces φ cumple (II) resp. (III).

(b) Toda fórmula de Hintikka satisfactible cumple (II) y (III).

DEMOSTRACIÓN.—Nos limitaremos a (b). Una fórmula de Hintikka satisfactible es siempre de la forma $\varphi = \varphi^n(\mathfrak{A}; a^r)$ (teorema 1). $\varphi^n(\mathfrak{A}; a^r) \downarrow 0 = \varphi^0(\mathfrak{A}; a^r)$ por (I4); luego φ cumple (II*).

Para $t < r$ se tiene $\varphi^{n-1}(\mathfrak{A}; a^r a_t) \in \mathrm{Mb}(\varphi^n(\mathfrak{A}; a^r))$, tal que $\varphi^{n-1}(\mathfrak{A}; a^r a_t) = \varphi^{n-1}(\mathfrak{A}; a^r a_t) \circ (\mathrm{id}_r \cup \{(r, t)\})$, por (I4). Así pues, φ cumple también (III*). Del mismo modo se demuestra que cada $\hat{\varphi} \in S(\varphi)$ cumple (II*) y (III*). $\square$

12. DEFINICIÓN.—Un *sistema de despliegue* $\{\varphi_i; f_{ij}\}$ consta de un conjunto dirigido admisible $(\mathrm{I}, \leqslant)$ y dos familias $\{\varphi_i\}_{i \in \mathrm{I}}$, $\{f_{ij}\}_{i \leq j \in \mathrm{I}}$ tales que:

(1) $i = (n_i, \mathrm{K}_i)$; $\varphi_i \in \mathrm{H}(n_i, r_i, \mathrm{K}_i)$ cumple (I), (II) y (III);

(2) $f_{ii} = id_{r_i}$; $f_{ij}: r_i \to r_j$; $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ para $i \leq j \leq k$; $\varphi_i \xrightarrow{f_{ij}} \varphi_j$ para $i \leq j$.

Un sistema de despliegue diremos que es *fuerte* si lo es su conjunto dirigido asociado. Si $f_{ij} = \mathrm{id}_{r_i}$ para todo $i \leqslant j \in \mathrm{I}$, pondremos $\{\varphi_i\}_{i \in \mathrm{I}}$.

Límite directo de un sistema de despliegue

Sea un sistema de despliegue $\{\varphi_i; f_{ij}\}$. Sea $\mathrm{K}_\infty = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{K}_i$. Es posible asociar al sistema una K_∞-estructura que llamaremos *límite directo* del sistema. En esencia, esta estructura es el límite directo (en el sentido de álgebras universales) de las K_i-estructuras determinadas por las fórmulas $\varphi_i \downarrow 0$ (satisfactibles por (II)). Concretamente, consideremos

$$\mathrm{V}_i = \}v_0, \ldots, v_{r_i-1}\{ = \mathrm{lib}(\varphi_i); \quad \mathrm{W}_i = \}i\{ \times \mathrm{V}_i$$

Pongamos $w_{ik} = (i, v_k)$. Por abuso de notación, consideremos a f_{ij} también como aplicación de V_i en V_j, tal que

$$f_{ij}(v_k) = v_{f_{ij}(k)}$$

Sea

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i.$$

Definimos sobre W una relación binaria «$\sim$» poniendo:

$$w_{ir} \sim w_{js} \quad \text{sii} \quad f_{ik}(v_r) \equiv f_{jk}(v_s) \in Mb(\varphi_k \downarrow 0) \quad \text{para algún} \quad k \geq i, j$$

Haciendo uso de (II) se demuestra que «$\sim$» es una relación de equivalencia sobre W. Sea $A_\infty = W/\sim$; designemos por $\overline{w_{ik}}$ a la clase de equivalencia de w_{ik}. Para cada símbolo de relación m-ario $R \in K_\infty$ se define $R^{A_\infty} \subseteq A_\infty{}^m$ poniendo:

$$R^{A_\infty}(\overline{\omega_{i_1 k_1}}, \ldots, \overline{\omega_{i_m k_m}}) \quad \text{sii} \quad R f_{i_1 j}(v_{k_1}) \ldots f_{i_m j}(v_{k_m}) \in Mb(\varphi_j \downarrow 0)$$
$$\text{para algún} \quad j \geq i_1, \ldots, i_m$$

La propiedad (II) permite demostrar que esta definición de R^{A_∞} es independiente de j y de los representantes $w_{i_l k_l}$ elegidos. La K_∞-estructura

$$\mathfrak{A}_\infty = (A_\infty, (R^{A_\infty})_{R \in K})$$

diremos que es el *límite directo* del sistema de despliegue. Pondremos:

$$\mathfrak{A}_\infty = \underrightarrow{\lim} \{\varphi_1 ; f_{ij}\}.$$

El siguiente teorema afirma que cada φ_i es el (n_i, r_i)-tipo de una sucesión finita en $\mathfrak{A}_\infty \restriction K_i$:

13. Teorema.—Si $\{\varphi_i ; f_{ij}\}$ es un sistema de despliegue y

$$\mathfrak{A}_\infty = \underrightarrow{\lim} \{\varphi_i ; f_{ij}\},$$

se verifica que

$$\mathfrak{A}_\infty \models \varphi_i [\overline{w_{i0}} \ldots \overline{w_{i r_{i-1}}}]$$

para todo $i \in I$.

DEMOSTRACIÓN.—Por inducción sobre n demostramos:
Para todo n natural, para todo $i \in \mathrm{I}$:
Si

$$n_i \geqslant n, \quad \mathfrak{A}_\infty \models \varphi_i \downarrow n \, [\overline{w_{i\,0}} \ldots \overline{w_{i\,r_{i-1}}}] \quad \text{(P)}$$

lo que implica el teorema, pues $\varphi_i \downarrow n_i = \varphi_i$.

$n = 0$: Para cualquier

$$i \in \mathrm{I}, \quad n_i \geqslant 0 \quad \text{y} \quad \mathfrak{A}_\infty \models \varphi_i \downarrow 0 \, [\overline{w_{i\,0}} \ldots \overline{w_{i\,r_{i-1}}}],$$

por definición de $\mathfrak{A}_\infty$.

$n > 0$: Supongamos (P) cierta para $n - 1$ e $i \in \mathrm{I}$ tal que $n_i \geqslant n$. Sea $k = n_i - n$. Por definición de $\varphi_i \downarrow n$ tendremos

$$\mathrm{Mb}\,(\varphi_i \downarrow n) = \{ \tilde{\varphi} \circ h : \tilde{\varphi} \in \mathrm{Mb}\,(\hat{\varphi}) \},$$

siendo

$$\hat{\varphi} \in \mathrm{S}^n(\varphi_i) \quad \text{y} \quad h = i\,d_{r_i} \cup \{(r_i, r_i + k)\}.$$

Por el teorema 1, (P) se verifica si y sólo si

$$\mathrm{Mb}\,(\varphi_i \downarrow n) = \mathrm{Mb}\,(\varphi^n\,(\mathfrak{A}_\infty \upharpoonright \mathrm{K}_i\,;\,\overline{w_i^{r_i}})).$$

Es decir, hemos de demostrar:

$$\{ \tilde{\varphi} \circ h : \tilde{\varphi} \in \mathrm{Mb}\,(\hat{\varphi}) \} = \{ \varphi^{n-1}\,(\mathfrak{A}_\infty \upharpoonright \mathrm{K}_i\,;\,\overline{w_i^{r_i}}\,a) : a \in \mathrm{A}_\infty \}.$$

«$\subseteq$»: Sea $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Mb}\,(\hat{\varphi})$. Como $(\mathrm{I}, \leqslant)$ es admisible, existe $j \in \mathrm{I}$, $j > i$. $\varphi_i \xrightarrow{f_{ij}} \varphi_j$ y $\tilde{\varphi} \in \mathrm{S}\,(\varphi_i)$, luego $\tilde{\varphi} \xrightarrow{f} \varphi_j$ para cierta f que extiende a $f_{ij} \cdot \mathrm{rg}\,(\tilde{\varphi}) = n - 1$, luego $\tilde{\varphi} \xrightarrow{f} \varphi_j \downarrow n - 1$, por (D4). Por la hipótesis de inducción sabemos que

$$\varphi_j \downarrow n - 1 = \varphi^{n-1}\,(\mathfrak{A}_\infty \upharpoonright \mathrm{K}_j\,;\,\overline{w_j^{r_j}}).$$

Tenemos pues:

$$\tilde{\varphi} \circ h \xrightarrow{h} \tilde{\varphi} \xrightarrow{f} \varphi^{n-1}\,(\mathfrak{A}_\infty \upharpoonright \mathrm{K}_j\,;\,\overline{w_j^{r_j}}) \qquad \underset{\text{(I5)}}{\Rightarrow}$$

$$\tilde{\varphi} \circ h \xrightarrow{f \circ h} \varphi^{n-1}\,(\mathfrak{A}_\infty \upharpoonright \mathrm{K}_j\,;\,\overline{w_j^{r_j}}) \qquad \underset{\text{(I4)}}{\Rightarrow}$$

$$\tilde{\varphi} \circ h = \varphi^{n-1} (\mathfrak{A}_\infty \upharpoonright K_i ; \overline{w_{j\, f_{ij}(0)}} \dots \overline{w_{j\, f_{ij}(r_i-1)}}\, \overline{w_{j\, f_{ij}(r_i+k)}} =$$
$$= \varphi^{n-1} (\mathfrak{A}_\infty \upharpoonright K_i ; \overline{w_i{}^{r_i}\, a}) \quad \text{con} \quad a = \overline{w_{j\, f\, (r_i+k)}}$$

«$\supseteq$»: Sea $a \in A_\infty$ arbitrario, por ejemplo $a = w_{jt}$. Sin restricción de la generalidad podemos suponer $j > i$. Tendremos $\varphi_i \xrightarrow{f_{ij}} \varphi_j$, y con ello $\hat{\varphi} \xrightarrow{f} \varphi_j$ para una extensión adecuada f de f_{ij}. Se deduce que $\hat{\varphi} \xrightarrow{f} \hat{\varphi}'$, para cierta $\hat{\varphi}' \in S^n (\varphi_j)$. Sea

$$l = n_j - n; \qquad \hat{\varphi}' \in H (n, r_j + l, K_j).$$

Como $t < r_j \leqslant r_j + l$, y $\hat{\varphi}'$ cumple (III), existirá $\tilde{\varphi}' \in \mathrm{Mb}\,(\hat{\varphi}')$ tal que

$$\bar{\varphi}' = \tilde{\varphi}' \circ (id_{r_j+l} \cup \{r_j + l, t)\}) \qquad (*)$$

Puesto que $\hat{\varphi} \xrightarrow{f} \hat{\varphi}'$, para $\tilde{\varphi}'$ existirá $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Mb}\,(\hat{\varphi})$ tal que

$$\tilde{\varphi} \xrightarrow{f \cup \{(r_i + k,\, r_j + l)\}} \tilde{\varphi}' \qquad (**)$$

De (*), (**) se deduce:

$$\tilde{\varphi} \circ h \xrightarrow{h} \tilde{\varphi} \xrightarrow{f \cup \{(r_i + k,\, r_j + l)\}} \tilde{\varphi}' \xrightarrow{\mathrm{id}_{r_j+l} \cup \{(r_j + l,\, t)\}} \bar{\varphi}'$$

de donde, por (I5), (I7):

$$\tilde{\varphi} \circ h \xrightarrow{f_{ij} \cup \{(r_i,\, t)\}} \bar{\varphi}' \quad \text{con lo que} \quad \tilde{\varphi} \circ h \xrightarrow{f_{ij} \cup \{(r_i,\, t)\}} \varphi_j \downarrow n - 1.$$

Ahora bien, por hipótesis de inducción

$$\varphi_j \downarrow n - 1 = \varphi^{n-1} (\mathfrak{A}_\infty \upharpoonright K_j ; \overline{w_j{}^{r_j}}) ;$$

luego

$$\tilde{\varphi} \circ h = \varphi^{n-1} (\mathfrak{A}_\infty \upharpoonright K_i ; \overline{w_i{}^{r_i}\, w_{j\,t}}),$$

por (I4). □

Propiedad (IV); sistemas de inmersión

Consideremos ahora la siguiente cuestión: ¿Cómo puede pasarse de una relación de inclusión dada, $\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$, a una relación de despliegue? Intuitivamente, φ habla de una sucesión de r elementos, φ' habla de una sucesión de r' elementos, y cada $\hat{\varphi}' \in S^{n'-k}(\varphi')$ habla de una sucesión ampliada de $r' + k$ elementos. Si n' es suficientemente grande deberían poderse elegir k y $\hat{\varphi}' \in S^{n'-k}(\varphi')$ adecuadamente, de manera que la sucesión de $r' + k$ elementos contenga suficientes ejemplos como para que se verifique $\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$. Justamente esto va a afirmar el Lema de Despliegue (lema 17) para el caso de fórmulas de Hintikka «buenas». Además de deducir este resultado, vamos a introducir los sistemas de inmersión y a demostrar un teorema (teorema 19) que los relaciona con los de despliegue.

14. Definición.

(a) Una fórmula de Hintikka $\varphi \in H(p)$ tiene la propiedad (IV*) si se cumple (a1) o (a2):

(a1) $n < 2$.

(a2) $n \geqslant 2$ y para toda $\hat{\varphi} \in S^{n-2}(\varphi)$ se tiene

$$\hat{\varphi} \circ \pi_r \in S^{n-2}(\varphi), \qquad \text{siendo} \qquad \pi_r = id_r \cup \{(r, r+1), \ (r+1, r)\}$$

(b) φ tiene la propiedad (IV) si cada $\hat{\varphi} \in S(\varphi)$ cumple (IV*).

(c) φ se dice que es buena si φ cumple (I), (II), (III) y (IV).

15. Lema.—La propiedad (IV) es decidible. Además:

(a) Si φ' cumple (IV) y $\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$, φ cumple también (IV).

(b) Toda fórmula de Hintikka satisfactible cumple (IV).

16. Lema.—Sea $\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$, siendo φ y φ' buenas. Para cada $\tilde{\varphi} \in Mb(\varphi)$ existe entonces $\tilde{\varphi}' \in Mb(\varphi')$ tal que $\tilde{\varphi} \xrightarrow{f \cup \{(r, r')\}} \tilde{\varphi}'$.

Demostración (esbozo).—Sea $k = n' - n$. Tomamos $\hat{\varphi}' \in S^{n}(\varphi')$. Se tiene entonces $\varphi \xrightarrow{f} \hat{\varphi}'$. Para $\tilde{\varphi} \in Mb(\varphi)$ existe entonces $\hat{\varphi}'' \in Mb(\hat{\varphi}')$ tal que

$$\tilde{\varphi} \xrightarrow{f \cup \{(r, r' + k + 1)\}} \hat{\varphi}''.$$

Con ayuda de (IV) puede encontrarse $\tilde{\varphi}' \in Mb(\varphi')$, tal que $v_{r'}$ desempeña en $\tilde{\varphi}' \downarrow n - 1$ «el mismo papel» que $v_{r'+k+1}$ en $\hat{\varphi}''$. $\tilde{\varphi}'$ cumple entonces lo requerido. (La demostración rigurosa es por inducción sobre k; véase [6]. $\square$

17. LEMA (Lema de Despliegue).—Existe una función efectivamente computable M que asigna a cada terna de parámetros p un número natural M (p), de manera que: Si $\varphi \xrightarrow{f} \varphi'$, siendo φ y φ' buenas, $\varphi \in \mathrm{H}(p)$, $\varphi' \in \mathrm{H}(p')$ y $n' - n \geqslant \mathrm{M}(p)$, entonces $\varphi \xrightarrow{f}\!\!\rightarrow \varphi'$ para alguna $\hat{\varphi}' \in \mathrm{S}^{n' - \mathrm{M}(p)}(\varphi')$.

DEMOSTRACIÓN.—M (n, r, K) se define por inducción sobre n:

$$n = 0 : \mathrm{M}(0, r, \mathrm{K}) = 0$$
$$n > 0 : \mathrm{M}(n, r, \mathrm{K}) = |\,\mathrm{H}(n-1, r+1\ \mathrm{K})\,| \cdot (\mathrm{M}(n-1, r+1, \mathrm{K}) + 1)$$

El lema se demuestra ahora por inducción sobre n. El caso $n = 0$ es trivial. Supongamos $n > 0$,

$$\mathrm{Mb}(\varphi) = \{\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_l\}$$

donde por fuerza $l \leqslant |\,\mathrm{H}(n-1, r+1, k)\,|$. Se aplican entonces l veces el lema 16 y la hipótesis de inducción a $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_l$, respectivamente. $\square$

El significado algebraico del lema anterior es que, dada una K-estructura $\mathfrak{A}$ (K finito) y una sucesión finita $a^r \in \mathrm{A}^r$, existen elementos $b_0, \dots, b_{\mathrm{M}(n, r, \mathrm{K})-1} \in \mathrm{A}$ tales que

$$\varphi^n(\mathfrak{A}; a^r) \longrightarrow\!\!\rightarrow \varphi^n(\mathfrak{A}; a^r b^m), \quad \text{siendo} \quad m = \mathrm{M}(n, r, \mathrm{K})$$

véase [10].

Veamos ahora el concepto de sistema de inmersión:

18. DEFINICIÓN.—Un *sistema de inmersión* $\{\varphi_i ; f_{ij}\}$ consta de un conjunto dirigido admisible fuerte $(\mathrm{I}, \leqslant)$ y dos familias

$$\{\varphi_i\}_{i \in \mathrm{I}}, \ \{f_{ij}\}_{i \leq j \in \mathrm{I}}$$

tales que:

(1) $i = (n_i, \mathrm{K}_i)$; $\varphi_i \in \mathrm{H}(n_i, r_i, \mathrm{K}_i)$ es buena

(2) $f_{ii} = id_{r_i}$; $f_{ij} : r_i \longrightarrow r_j$; $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$

para $i \leq j \leq k$; $\varphi_i \xrightarrow{f_{ij}} \varphi_j$ para $i \leq j$.

El siguiente teorema permite obtener sistemas de despliegue a partir de cualquier sistema de inmersión:

19. TEOREMA.—Sea $\{\varphi_i ; f_{ij}\}$ un sistema de inmersión. Existe entonces:

H, subconjunto cofinal de I;
$\{\varphi'_k\}_{k \in H}$, familia de fórmulas de Hintikka;
$\{f'_{kl}\}_{k \leq l \in H}$, familia de aplicaciones tales que:
(1) $\varphi'_k \in S(\varphi_k)$; $f'_{kl} \supseteq f_{kl}$
(2) $\{\varphi'_k ; f'_{kl}\}$ es un sistema de despliegue fuerte.

(Cada sistema de despliegue $\{\varphi'_k ; f'_{kl}\}$ que verifica las condiciones de este teorema, diremos que se ha *extraído* de $\{\varphi_i ; f_{ij}\}$. El teorema afirma, pues, que de cada sistema de inmersión puede extraerse al menos un sistema de despliegue fuerte.)

DEMOSTRACIÓN.—Por inducción sobre el número natural m vamos a definir conjuntos:

$H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_m \subseteq \ldots \subseteq I$ y para cada m:
$(m\,1)$: $\varphi'_k \in S(\varphi_k)$ para cada $k \in H_m$;
supondremos $\varphi'_k \in H(n'_k, r'_k, K_k)$
$(m\,2)$: $f'_{kl} : r'_k \longrightarrow r'_l$ tal que $f'_{kl} \supseteq f_{kl}$,
$\varphi'_k \xrightarrow{f'_{kl}} \varphi'_l$, para todo $k \leqslant l \in H_m$
f'_{kk} será $id_{r'_k} \supseteq id_{r_k} = f_{kk}$.

$m = 0$: Tomamos $H_0 = \{i \in I : i \text{ minimal}\}$. $H_0 \neq \varnothing$, ya que el orden de todo conjunto dirigido admisible está bien fundado. H_0 está formado por elementos incomparables dos a dos, luego basta con que definamos $\varphi'_k = \varphi_k$ para todo $k \in H_0$. H_0 no es cofinal en $(I, \leqslant)$, ya que $(I, \leqslant)$ es fuerte.

$m > 0$: Supongamos $H_0 \subseteq \ldots \subseteq H_{m-1}$ ya definidos y admitamos que H_{m-1} no es cofinal en I. Sean

$$I_m = \{i \in I : \text{no existe } k \in H_{m-1} \text{ tal que } i \leq k\}$$
$$\underline{I}_m = \{i \in I_m : i \text{ minimal}\}$$

$I_m \neq \varnothing$ por ser H_{m-1} no cofinal; luego también $\underline{I}_m \neq \varnothing$. Para cada $i \in \underline{I}_m$, sea

$$P_m(i) = \{k \in H_{m-1} : k < i\}.$$

$P_m(i) \neq \varnothing$, ya que i es comparable con algún $h \in H_{m-1}$ (¡$H_{m-1} \supseteq H_0$!) y $k \geqslant i$ está excluido por ser $i \in \underline{I}_m$. $P_m(i)$ es además finito, pues en un conjunto dirigido admisible todo elemento posee a lo sumo un número finito de predecesores. Por lo tanto, existe y es no vacío $\overline{P}_m(i) = \{k \in P_m(i) : k \text{ maximal}\}$.

Para cada $i \in \underline{I}_m$, escojamos $j_i \in I$ como el mínimo $j \geqslant i$ tal que $K_j = K_i$ y $n_j - n_i > M(n_i, r_i, K_i)$; j_i existe por ser $(I, \leqslant)$ admisible y fuerte. Por el Lema de Despliegue (véase 17), existe

$$\varphi'_{j_i} \in S^{n_{j_i} - M(n_i, r_i, K_i)}(\varphi_{j_i}) \quad \text{tal que} \quad \varphi_i \xrightarrow{f_{ij_i}} \varphi'_{j_i}$$

Afirmamos que: Para todo $k \in \overline{P}_m(i)$, existe $f'_{kj_i} \supseteq f_{kj_i}$ tal que

$$\varphi'_k \xrightarrow{f'_{kj_i}} \varphi'_{j_i}$$

(φ'_k está definida ya, pues $\overline{P}_m(i) \subseteq H_{m-1}$). En efecto:

$$\varphi_k \xrightarrow{f_{ki}} \varphi_i \xrightarrow{f_{ij_i}} \varphi'_{j_i},$$

luego $\varphi_k \xrightarrow{f_{kj_i}} \varphi'_j$ por (D2); y como $\varphi'_k \in S(\varphi_k)$, se tendrá $\varphi'_k \xrightarrow{f'_{kj_i}} \varphi'_{j_i}$ para una extensión adecuada f'_{kj_i} de f_{kj_i}.

Definamos ahora $H_m = H_{m-1} \cup \{j_i : i \in \underline{I}_m\}$. Dados $k < l \in H_m$, por fuerza se tiene uno de los dos casos:

(a) $k, l \in H_{m-1}$.

(b) $l = j_i$, $k \in P_m(i)$ para cierto $i \in \underline{I}_m$.

En el caso (a), φ'_k, φ'_l y f'_{kl} está ya definidas. En el baso (b), existe $u \in \overline{P}_m(i)$ tal que $k \leqslant u$. En particular, $u, k \in H_{m-1}$; φ'_k, φ'_u, φ'_{j_i}, f'_{ku} y f'_{uj_i} están ya definidos, y:

$$\varphi'_k \xrightarrow{f'_{ku}} \varphi'_u \xrightarrow{f'_{uj_i}} \varphi'_{j_i} \quad \text{(¡hipótesis de inducción!).}$$

Definimos entonces $f'_{kj_i} = f'_{uj_i} \circ f'_{ku}$; por (D2), $\varphi'_k \xrightarrow{f'_{kj_i}} \varphi'_{j_i}$.

Así, vemos que (m 1) y (m 2) siguen verificándose para m. Veamos que H_m sigue sin ser cofinal. Tomamos para ello j_i, siendo

$i \in I_m$, cualquiera. Como $(\mathrm{I}, \leqslant)$ es fuerte, existe $j > j_i$ tal que $\mathrm{K}_j = \mathrm{K}_{j_i} = \mathrm{K}_i$. Se comprueba fácilmente que, cualquiera que sea $k \in \mathrm{H}_m$, $j \nleqslant k$.

Tomamos

$$\mathrm{H} = \bigcup_{m<\omega} \mathrm{H}_m .$$

Se comprueba que H es cofinal en $(\mathrm{I}, \leqslant)$ (cada $i \in \mathrm{I}$ es menor o igual que algún $k \in \mathrm{H}_{n_i + |\mathrm{K}_i|}$). La construcción de H garantiza que

$$\{\varphi'_k;\ f'_{kl}\}_{k \leq l \in \mathrm{H}}$$

puede considerarse como un sistema de despliegue fuerte dirigido por

$$\mathrm{H}' = \{(n'_k, \mathrm{K}_k) : k \in \mathrm{H}\}. \ \square$$

Utilizando el teorema 13, puede demostrarse fácilmente:

20. Corolario.—Si $\{\varphi'_k ; f'_{kl}\}_{k \leq l \in \mathrm{H}}$ es un sistema de despliegue extraído del sistema de inmersión $\{\varphi_i ; f_{ij}\}$ y si

$$\mathfrak{A}_\infty = \varinjlim \{\varphi'_k ; f'_{kl}\},$$

se verifican:

(1) $\mathfrak{A}_\infty \models \varphi_i [\overline{w_{k f_{ik}(0)}}, \ldots, \overline{w_{k f_{ik}(r-1)}}]$ si $k \in \mathrm{H}$, $k \geqslant i$, $n'_k \geqslant n_i$

(2) $\varphi^{n_i} (\mathfrak{A}_\infty \upharpoonright \mathrm{K}_i) = \varphi_i \circ \varnothing$. $\square$

20 (2) afirma que un sistema de inmersión determina el tipo elemental de cualquier estructura límite obtenida a partir de él.

§ 4. Aplicación a la completitud y compacidad de la lógica de primer orden *

Siguiendo el esquema de [7], vamos a introducir una noción de consistencia basada en las propiedades (I)-(IV). K denota en lo que sigue a un conjunto *arbitrario* de símbolos de relación.

---

* Nótese que nada de lo anterior presupone la completitud de ningún cálculo particular para la lógica de primer orden.

21. DEFINICIÓN.—Sea $\mathcal{F} \subseteq L(K)$ un conjunto de fórmulas:

(a) Una terna de parámetros p se dice que es *adecuada para* $\mathcal{F}$ si es adecuada para alguna $\psi \in \mathcal{F}$.

(b) $\mathcal{F}$ se dice que es *consistente* si para cada p adecuada para $\mathcal{F}$ existe una fórmula de Hintikka buena $\varphi \in H(p)$ tal que

$$\varphi \in \bigcap \{ \mathrm{FND}(\psi, p) : \psi \in \mathcal{F} \cap L(p) \}.$$

22. LEMA (Teorema de compacidad para la consistencia).—$\mathcal{F}$ es consistente si y sólo si todo subconjunto finito $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ es consistente.

DEMOSTRACIÓN.—La implicación «difícil» se basa en que $L(p)$ es finito salvo equivalencia lógica (semántica), como se deduce (por ejemplo) del teorema 2. $\square$

23. TEOREMA (Adecuación de la noción de consistencia).—$\mathcal{F}$ es consistente si y sólo si $\mathcal{F}$ es satisfactible.

DEMOSTRACIÓN.—Bosquejemos la implicación «difícil». Sea $\mathcal{F}$ consistente. Sea I el conjunto de todos los pares $(n, \mathcal{G})$ tales que: $\mathcal{G}$ es un subconjunto finito no vacío de $\mathcal{F}$ (el caso $\mathcal{F} = \varnothing$ es trivial), $n \geqslant \mathrm{rg}(\wedge \mathcal{G})$.

Para $i = (n_i, \mathcal{G}_i)$ sea $p_i = (n_i, r_i, K_i)$ tal que $\wedge \mathcal{G}_i \in L(p_i)$ con r_i y K_i mínimos. Definimos un orden parcial sobre I poniendo: $i \leqslant j$ sii $n_i \leqslant n_j$ y $\mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{G}_j$. Con ello, $(I, \leqslant)$ es un conjunto dirigido admisible fuerte.

Para cada $i \in I$, consideramos:

$$\Phi_i = \{ \varphi \in H(p_i) : \varphi \quad \text{es buena y} \quad \varphi \in \mathrm{FND}(\wedge \mathcal{G}_i, p_i) \},$$

$\Phi_i \neq \varnothing$, gracias a que $\mathcal{F}$ es consistente. Para cada par $i \leqslant j \in I$ formamos un árbol (en el sentido de [1]) T_{ij} definido por las condiciones siguientes:

(a) La raíz es $\varnothing$.

(b) Los niveles 1 y 2 son Φ_i y Φ_j, respectivamente.

(c) Cada $\varphi \in \Phi_j$ es sucesor de $\varphi \downarrow p_i \in \Phi_i$ ($\varphi \downarrow p_i \in \Phi_i$ por 6(a), 11(a) y 15(a)).

Usando la consistencia de $\mathcal{F}$, no es difícil comprobar que la familia T formada por todos los árboles T_{ij} verifica las hipótesis del teorema 1 de [1] (que es una generalización del *lema de König*). Según este teorema, existe un conjunto Φ^* de vértices de T tal que:

(1) Φ^* tiene en común exactamente un nodo con cada nivel de T; y

(2) Cada dos modos de Φ^* están dominados en T por un modo común.

Por (1), podemos suponer $\Phi^* = \{\varphi_i\}_{i \in I}$, donde $\varphi_i \in \Phi_i$. Por (2), podemos considerar a $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ como un sistema de inmersión dirigido por $I' = \{(n_i, K_i) : i \in I\}$. Por el teorema 19, podemos extraer de $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ un sistema de despliegue $\{\varphi'_k ; f'_{k\,l}\}$. Sea

$$\mathfrak{A}_\infty = \varinjlim \{\varphi'_k ; f'_{k\,l}\}.$$

Definamos $\beta : V \longrightarrow A_\infty$ (V es el conjunto de las variables) poniendo: $\beta(v_t) = \overline{w_{k\,t}}$, con k tal que $t < r_k$ (véase la notación del teorema 13). Es fácil demostrar que esta definición es unívoca. Por el corolario 20, se deduce que $\mathcal{J} = (\mathfrak{A}_\infty, \beta) \models \varphi_i$ para todo $i \in I$. Como $\varphi_i \in \mathrm{FND}\,(\wedge\, \mathcal{G}_i, p_i)$, resulta que $\mathcal{J} \models \mathcal{G}_i$ para todo $i \in I$, con lo que $\mathcal{J} \models \mathcal{F}$. $\square$

Para finalizar, vamos a deducir algunas consecuencias de los resultados anteriores. Del mismo modo que en [6] ó [7], podríamos definir ahora la relación de derivabilidad «$\mathcal{F} \vdash \varphi$» a partir de nuestra noción de consistencia (acerca del significado algebraico del cálculo «$\vdash$», véase [6] ó [7]). Además:

24. Corolario.—Sea $\mathcal{F} \subseteq L(K)$ un conjunto de fórmulas:

(a) $\mathcal{F}$ es satisfactible si y sólo si todo subconjunto finito $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ es satisfactible.

(*Teorema de Compacidad.*)

(b) Si $\mathcal{F}$ es satisfactible, entonces $\mathcal{F}$ posee un modelo de cardinal $\leqslant \max(\omega, |\mathcal{F}|)$.

(*Teorema de Löwenheim-Skolem.*)

Demostración.—Inmediato a partir de 22 y 23. $\square$

Del teroema 19 se deduce también:

25. Teorema.—Sea $(I, \leqslant)$ un conjunto dirigido admisible fuerte, donde $i = (n_i, K_i)$ para cada $i \in I$. Sea $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ una familia de es-

tructuras ($\mathfrak{A}_i$ K_i-estructura) tal que, para todo $i \leqslant j$, $\mathfrak{A}_i \cong_{n_i} \mathfrak{A}_j \upharpoonright K_i$. Existe entonces una K_∞-estructura $\mathfrak{A}_\infty$ ($K_\infty = \bigcup_{i \in I} K_i$) tal que $\mathfrak{A}_i \cong_{n_i} \mathfrak{A}_\infty \upharpoonright K_i$ para todo $i \in I$.

DEMOSTRACIÓN.—Para cada $i \in I$ tomamos $\varphi_i = \varphi^{n_i}(\mathfrak{A}_i)$. De las hipótesis se deduce que $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ es un sistema de inmersión. Tomemos como $\mathfrak{A}_\infty$ la estructura límite directo de cualquier sistema de despliegue extraído de $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ (teorema 19). Por el corolario 20, $\varphi^{n_i}(\mathfrak{A} \upharpoonright K_i) = \varphi_i = \varphi^{n_i}(\mathfrak{A}_i)$ para todo $i \in I$. $\square$

Mediante un razonamiento parecido al del teorema 23, el teorema de compacidad para conjuntos de fórmulas cerradas puede deducirse de 25. Por esto, el teorema 25 es una versión algebraica del teorema de compacidad que generaliza la obtenida en [8] y [9] para el caso numerable. Otras versiones y/o demostraciones algebraicas de resultados de teoría de modelos que aparecen en [8], [9] y [10], pueden obtenerse también a partir de los teoremas 13 y 19. Algunas aplicaciones del método que hemos desarrollado a problemas de complejidad de modelos y teorías pueden verse en [7].

Notemos, finalmente, cómo el lema de König generalizado de [1] (estrictamente más débil que el axioma de elección) nos ha permitido deducir el teorema de compacidad para la lógica de primer orden mediante un razonamiento del mismo tipo que el empleado por Cowen en [1] para el caso de la lógica proposicional.

Bibliografía

[1] COWEN, R. H. (1977). Generalizing König's Infinity Lemma. *Notre Dame Journal of Symbolic Logic*, XVII.

[2] EHRENFEUCHT, A. (1961). An application of games to the completness problem for formalized theories. *Fundamenta Mathematicae*, 49.

[3] FRAÏSSÉ, R. (1954). Sur quelques classifications des systemes de relations. *Publ. Sci. de L'Univ. d'Alger*, 1.

[4] HINTIKKA, J. (1953). Distributive normal forms in the calculus of predicates. *Acta Philosophica Fennica*, 6.

[5] HINTIKKA, J. (1965). Distributive normal forms in first order logic. En: Formal systems and recursive functions. Proceedings of the eight logic colloquium, Oxford, July 1963. Editado por J. N. Crossley/M. A. E. Dumett, North-Holland.

[6] RODRÍGUEZ ARTALEJO, M. (1977). Un método de aproximaciones finitas en la lógica de primer orden. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

[7] RODRÍGUEZ ARTALEJO, M. (1981). Eine syntaktisch-algebraische Methode zur Konstruktion von Modellen. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 27.

[8] SCHÖNFELD, W. (1974). Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel, disjunktive Normalform und Endlichkeitssatz. Dissertation, Stuttgart.

[9] SCHÖNFELD, W. (1977) Eine algebraische Konstruktion abzählbarer Modelle. *Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 18.

[10] WOLF, T. (1975). Eine algebraische Methode: Endlichkeitssatz, Interpolationssatz, Typenübergehungssatz. *Diplomarbeit, Freiburg i. Br.*