PERTURBACIONES FUNCIONALES DE CRECIMIENTO ACOTADO Y ECUACIONES DE EVOLUCION EN ESPACIOS DE HILBERT

José María Fraile Peláez

Recibido: 9 enero 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. ALBERTO DOU MASDEXEXÁS

1. Introducción

El núcleo de este artículo está contenido en ([4], cap. 2, 2.8), y concierne a cierto tipo de perturbaciones funcionales, no lipschicianas, de ecuaciones de evolución parabólicas. El objetivo perseguido es el de complementar en lo posible, y dentro de otro marco funcional, algunos de los resultados de M. Gaultier (cf. [5]), para lo cual la técnica desarrollada en [1] junto con algunas otras hipótesis requeridas por el tipo de perturbaciones estudiado, resulta ser bastante adecuada. En este artículo vamos a estudiar la existencia y la prolongación de soluciones de ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} u'(t) + A u(t) + (M u)(t) \ni 0 \quad \text{ct} \quad t \in (0, T) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

donde $A: H \longrightarrow H$ será un operador monótono (en realidad, cierto tipo de subdiferencial), y donde $M: L^2(0, T; H) \longrightarrow L^2(0, T; H)$ será una aplicación, en general no lineal, sobre la que se harán algunas hipótesis más adelante.

Obsérvese que el problema (1) puede re-escribirse como

$$\begin{cases} u'(t) + A u(t) \ni -(M u)(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

de manera que, si encontrásemos alguna función $f(t)$ de forma que la solución de

$$\begin{cases} u'(t) + A u(t) \ni f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

a la que llamaremos $u_f(t)$, satisfaciera que

$$f(t) = -(M u_f)(t), \quad t > 0,$$

dicha función u_f sería una solución de (1). En cierto sentido, ésta va a ser la idea que seguiremos: buscaremos condiciones suficientes para garantizar la existencia de (al menos) un tal $f(t)$. Cabe finalmente notar que el problema de la unicidad, para las ecuaciones (1) con las hipótesis que exigiremos, subsiste: en efecto, el argumento fundamental de la existencia de soluciones es el teorema de punto fijo de Schauder; y, por otra parte, sólo vamos a requerir a nuestras perturbaciones funcionales Mu condiciones sobre su crecimiento en norma.

2. Algunos resultados auxiliares

De ahora en adelante, convendremos en que sean: H un espacio de Hilbert real. $A: H \longrightarrow H$ será la subdiferencial de una función $\Phi: H \longrightarrow \mathbb{R}$, convexa, propia, y semicontinua inferiormente (s. c. i.); es decir, $A = \partial \Phi$.

Por D (A) simbolizaremos el dominio del operador A; es decir, $x \in D(A)$ si y sólo si $A x$ no es el conjunto vacío.

Finalmente, sean $u_0 \in D(A)$, $f \in L^2(0, T; H) = L^2_T(H)$. Con estas hipótesis previas, se pueden garantizar los siguientes resultados:

Teorema I.—Existe una única solución fuerte de (2), que notaremos por $u(t)$, en (0, T). Además:

$$\text{(i)} \qquad \sqrt{t}\,\frac{du}{dt} \in L^2_T(H); \quad t \longrightarrow \Phi(u(t))$$

es absolutamente continua sobre cada compacto contenido en (0, T] ; y se tiene la identidad

$$\left|\frac{du}{dt}\right|_H^2 + \frac{d}{dt}\Phi(u(t)) = \left(f, \frac{du}{dt}\right) \quad \text{c. t.} \quad t \in (0, T)$$

(ii) Si $u(0) \in D(\Phi)$, y si $\Phi(0) \geqslant 0$, entonces

$$\frac{du}{dt} \in L_T^2(H); \quad \Phi(u(t))$$

es absolutamente continua sobre [0, T] ; y

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L_T^2(H)}^{1/2} \leq \sqrt{\Phi(u(0))} + \|f\|_{L_T^2(H)}^2$$

Un segundo resultado básico que necesitaremos concierne al «operador solución» asociado a la ecuación (2). Tal operador está definido por

$$F_{u_0} : L_T^2(H) \longrightarrow C([0, T]; H)$$

$f \longrightarrow u_f$, solución (única) de (2), asociada a un segundo miembro f, y tal que $u(0) = u_0$. Dicho operador satisface la siguiente propiedad de continuidad (cf. [1], p. e.)

Teorema II.—Supongamos $A = \partial\Phi$, con $\Phi: H \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa, s. c. i. y propia; supongamos, además, que $\forall R > 0$ el conjunto $B_R = \{x \in H/ |x| \leqslant R, \ \Phi(x) \leqslant R\}$ es un subconjunto compacto de H ; entonces, F_{u_0} es continuo de X_δ, con la topología débil de $L^2{}_T(H)$, en $C([0, T]; H)$, con la topología fuerte (de la norma), donde X_δ es

$$X_\delta = \{ g \in L_T(H) / |g(t)|_H \leq \delta(t), \ \text{en c. t.} \ t \in (0, T) \}$$

y donde $\delta \in L^2(0, T)$ es una función cualquiera fijada previamente.

A continuación vamos a precisar el concepto de solución (fuerte) de (2), que ya ha sido utilizado, directa o indirectamente, en los teoremas arriba enunciados:

DEFINICIÓN 1.—Si $A: H \longrightarrow H$ es maximal monótono,

$$f \in L^2_{loc}(I; H) \quad y \quad u_0 \in \overline{D(A)},$$

se dirá que una función u es solución (fuerte) de

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) \quad f(t) \quad c.\,t. \quad t \in I \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

si $u \in C(I; H)$, $u(0) = u_0$, u es absolutamente continua sobre todo compacto contenido en $\mathring{I}$ y, finalmente, en casi todo $t \in I$ se satisface que $u(t) \in D(A)$, así como que $u'(t) + A\,u(t)\ \ f(t)$.

Para finalizar con este apartado, he aquí un resultado que también se utilizará y que concierne a la naturaleza de la suma de operadores monótonos.

TEOREMA III (cf. [7]).—Si A_1, A_2 son dos operadores maximales monótonos (cf., p. e., [3]) de un espacio de Hilbert H, y si $D(A_2) \cap (\operatorname{int} D(A_1)) \neq \emptyset$, entonces $A_1 + A_2$ es maximal monótono. Si, además, $A_i = \partial \Phi_i$, $i = 1, 2$, entonces $A_1 + A_2 = \partial(\phi_1 + \phi_2)$.

3. Hipótesis

Si $A: H \longrightarrow H$ es maximal monótono,

$$M: L^2(0, T: H) \longrightarrow L^2(0, T; H)$$

es una aplicación, y $u_0 \in \overline{D(A)}$, diremos que una función u es solución de

$$\begin{cases} u'(t) + A\,u(t) + (M\,u)(t) \ni 0, \quad c.\,t. \quad t \in I \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

si

$$u \in C(I; H)$$
$$u(0) = u_0$$

u es absolutamente continua sobre todo compacto contenido en $\mathring{I}$; en casi todo $t \in I$ se satisface que

$$\begin{cases} u'(t) + A u(t) + (M u)(t) \ni 0 \\ u(t) \in D(A) \end{cases}$$

El intervalo I será de la forma $[0, T]$, ó $[0, +\infty)$.

Hipótesis sobre A

(H_1) $A = \partial \Phi$, $\Phi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa, sci, propia

(H_2) $\forall R > 0$, $B_R = \{ x \in H / |x|_H \leq R, \; \Phi(x) \leq R \}$ es compacto.

Hipótesis sobre M

Supondremos que existe $\omega(t)$, con $0 \leqslant \omega(t) \leqslant t$, definida en $[0, \infty)$, de forma que, sobre todo intervalo I del tipo antes indicado, se tenga:

(H_3) $M: L^2(\mathring{I};) \longrightarrow L^2(\mathring{I};)$

(H_4) Si $u_n, u \in C(I; \overline{D(A)})$,

con $u_n \longrightarrow u$ en $C(I; H)$ con la topología de la norma, entonces

$$(M u_n)(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} (M u)(t) \quad \text{en c. t.} \quad t \in \mathring{I},$$

en la topología de la norma de H.

Finalmente supongamos que se cumple al menos una de las siguientes hipótesis:

$$(H_5) \quad |(M u)(t)|_H \leq \gamma(t) \; |u(t - \omega(t))|_H + \delta(t), \quad \text{en c. t.} \quad t \in \mathring{I}$$

$$\begin{cases} \text{con } \gamma, \delta \in L^1_{loc}(I) \cap L^2(I) \\ \text{para todo } u \in C(I; \overline{D(A)}) \end{cases}$$

$$(H_6) \quad \| r_t M u \|_{L^\infty(\mathring{I}; H)} \leq \gamma(t) \| r_t u \|_{L^\infty(\mathring{I}; H)} + \delta(t)$$

con γ, $\delta \in L^1_{loc} \cap L^2$, r_t es la restricción a $(0, t)$ extendida por cero fuera del intervalo, para todo $u \in C(I; \overline{D(A)})$.

Nuestro propósito es el de establecer un teorema de existencia y de prolongación de soluciones para el problema (1).

Antes que nada conviene hacer dos observaciones. La primera es que, cuando $I = [0, +\infty)$, bastará pedir que M envíe $L^2_{loc}(0, \infty; H)$ en sí mismo para poder reproducir los resultados posteriores; ello es fácil de comprobar. La segunda observación es que puede suponerse, sin perder generalidad, que $\Phi \geqslant 0$. Por lo tanto, de ahora en adelante vamos a suponerla cierta.

4. Resultado principal

TEOREMA.—Consideremos el problema (1) sobre un intervalo I del tipo arriba mencionado; sean u_0, A, M como en § 3. Entonces existe solución u de (1) sobre el intervalo I.

DEMOSTRACIÓN.—La dividiremos en tres etapas perfectamente diferenciadas, siguiendo a [1]. En la primera, la continuidad de F_{u_0} y el teorema de punto fijo de Schauder permitirán resolver (1) para cuando sean $I = [0, T]$ y $\gamma \equiv 0$.

En la segunda se demostrará la existencia de solución local de (1), en el caso general, utilizando esencialmente el teorema III, así como la primera etapa.

En el tercer paso —que no es sino un argumento de prolongación de soluciones— las hipótesis (H_5) [ó (H_6)], así como el apartado (2i) del teorema I, son las herramientas básicas.

1.ª etapa.—Suponemos que $I = [0, T]$, $\gamma \equiv 0$.

Tal como se indicó al principio, el problema se reduciría a encontrar $f(t)$ tal que $-(M u_f)(t) = f(t)$ en c. t. t. Teniendo en cuenta que $u_f = F_{u_0}(f)$, esto se puede expresar por $M(F_{v_0}(f)) = -f$; o bien, llamando $g(t) = -f(t)$, como $M(F_{u_0}(-g)) = g$. Con esta última formulación resulta claro que lo que interesa es encontrar (al menos) un punto fijo de la aplicación

$$\beta \longrightarrow M(F_{u_0}(-\beta))$$

donde, por el teorema I, β deberá pertenecer por lo menos a $L^2_T(H)$. Por otra parte, si en algún momento vamos a necesitar recurrir al teorema III, parece claro que β deberá estar (por lo menos) en algún subconjunto de $L^2_T(H)$ del tipo X_δ, para alguna función

$\delta \in L^2(0, T)$. Ello implica, en parte, que necesitamos las hipótesis (H_5), ó (H_6). Las conjeturas anteriores resultan acertadas, como muestra la

PROPOSICIÓN 1.—La aplicación $\beta \longrightarrow M(F_{u_0}(-\beta))$ transforma X_δ en sí mismo, y es continua de $L^2_T(H)$ en sí mismo, para la topología débil de dicho espacio (a la llegada como a la partida).

DEMOSTRACIÓN.

$$\beta \in X_\delta \Longrightarrow -\beta \in X_\delta, \Longrightarrow F_{u_0}(-\beta) \in C([0, T]; \overline{D(A)}).$$

Como $\gamma \equiv 0$, se sigue que:

$$(H_5), \Longrightarrow |M(F_{u_0}(-\beta))(t)|_H \leq \delta(t), \quad \text{c. t.} \quad t$$

ó

$$(H_6), \Longrightarrow \|r_t M(F_{u_0}(-\beta)\|_{L^\infty_T(H)} \leq \delta(t), \quad \text{c. t.} \quad t$$

lo que implica que

$$|M(F_{u_0}(-\beta))(t)|_H \leq \delta(t), \quad \text{c. t.} \quad t$$

En cualquier caso,

$$M(F_{u_0}(-\beta)) \in X_\delta.$$

Por otra parte,

$$\text{si} \quad \beta_n, \beta \in X_\delta. \quad \text{con} \quad \beta_n \longrightarrow \beta \quad \text{en} \quad \omega - L^2_T(H),$$

el teorema II implica que

$$\|F_{u_0}(-\beta_n) - F_{u_0}(-\beta)\|_{C([0, T]; H)} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

Utilizando (H_4),

$$\left\{ \begin{array}{l} M(F_{u_0}(-\beta_n)(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} M(F_{u_0}(-\beta))(t), \quad \text{c. t.} \quad t \\ \text{en la norma de H.} \end{array} \right.$$

Sea $z \in L^2_T(H)$, y construyamos

$$F_n(t) = ((M g_n)(t),\ z(t))_H, \quad F(t) = ((Mg)(t),\ z(t))_H.$$

con

$$g_n = F_{u_0}(-\beta_n), \quad g = F_{u_0}(-\beta).$$

Se tiene que:

$$F_n(t) \longrightarrow F(t), \quad \text{c. t.} \quad t \in (0, T)$$

$$|F_n(t)| \leq \delta(t) \cdot |z(t)|_H \in L^1(0, T)$$

El teorema de Lebesgue de convergencia dominada, implica entonces que

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T F_n(t)\, dt = \int_0^T F(t)\, dt$$

o, lo que es lo mismo, que

$$M(F_{u_0}(-\beta_n)) \xrightarrow[n \to \infty]{} M(F_{u_0}(-\beta)$$

en la topología débil de $L^2_T(H)$, c. q. d.

COROLARIO 1.—La aplicación $\beta \longrightarrow M(F_{u_0}(-\beta))$ tiene al menos un punto fijo en X_δ.

En efecto, basta observar que X_δ es un subconjunto convexo débilmente compacto de $L^2_T(H)$, y aplicar el teorema de punto fijo de Schauder.

COROLARIO 2.—En el caso que nos ocupa, el problema (1) tiene solución sobre $I = [0, T]$.

En efecto, si $\beta \in X_\delta$ es tal que $\beta = M(F_{u_0}(-\beta))$, basta escoger $u = F_{u_0}(-\beta)$.

2.ª etapa.—(Existencia de solución local en el caso general.)

Recordemos que, ahora, I es un intervalo genérico $[0, T]$ ó $[0, +\infty)$. Se considera el problema siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + (A + \partial\psi_v)\, u(t) + (Mu) \ni 0 \quad \text{c. t.} \quad t \ni [0, T_0] \\ u(0) = n_0 \end{cases} \tag{3}$$

siendo $[0, T_0]$ un subintervalo cualquiera de I, $\psi_v : H \longrightarrow \mathbb{R}$ la función indicatriz del conjunto $V \subseteq H$ (e. d., $\psi_v(x) = 0$, $x \in V$; $+\infty$ fuera), y V es un entorno convexo, cerrado y acotado de u_0. Por el teorema II, $A + \partial \Phi_v = \partial(\Phi + \psi_v)$; además, los conjuntos $\{x \in H / |x|_H \leqslant R,\ (\Phi + \psi_v)(x) \leqslant R\}$ son compactos en H. Por otra parte, $D(A + \partial\psi_v) \leqslant V$. Entonces, si llamamos $\tilde{A} = A + \partial\psi_v$, y si $v \in C([0, T]; \overline{D(\tilde{A})})$, se tiene que

(a)

$$v \in C([0, T]; \overline{D(A)})$$

(b) Bien

$$|Mv(t)|_H \leq \gamma(t)\,|v(t - \omega(t))|_H + \delta(t) \leq$$

$$\leq \gamma(t) \sup_{y \in V} |y|_H + \delta(t) = \Delta(t) \in L^2(0, T_0)$$

(se ha utilizado aquí que $0 \leqslant \omega(t) \leqslant t$), ó

$$\|r_t M v\|_{L^\infty_{T_0}(H)} + \gamma(t)\,\|r_t v\|_{L^\infty_{T_0}(H)} + \delta(t) \leq$$

$$\leq \gamma(t) \sup_{y \in V} |y|_H + \delta(t) = \Delta(t) \in L^2(0, T_0)$$

Consecuentemente, el problema (3), reescrito en términos del operador $\tilde{A}$, corresponde al cuadro funcional requerido por la primera etapa y por lo tanto puede afirmarse que, para todo compacto $[0, T_0] \leqslant I$, (3) admite solución $u(t)$. Pero entonces $u(0) = u_0$, $t \longrightarrow u(t)$ es continua, y V es por construcción un entorno de u_0. Todo ello implica que existe algún $t_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que $u(t) \in V$, $\forall\, t \in [0, t_0)$. A su vez, se tiene entonces que:

$$\partial \psi_v(u(t)) = \{0\} \qquad \forall\, t \in [0, t_0)$$

y (3) se transforma en

$$\begin{cases} u'(t) + A u(t) + (Mu)(t) \ni 0, & \text{ct. } t \in [0, t_0) \\ u(0) = u_0 \in \overline{D(A)} \end{cases}$$

lo que concluye esta etapa.

3.ª etapa.—Supongamos que $[0, T_1)$ es el mayor intervalo contenido en I sobre el que la solución u de (1) existe, y que $T_1 < +\infty$. Entonces debe tenerse que

$$\begin{cases} u'(t) + A u(t) \ni \beta(t) & \text{ct.} \quad t \in (0, T_1) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4}$$

con $\beta(t) = -(M u)(t)$, $\beta \in L^2_{T_1}(H)$.

Como toda solución fuerte de (4) es solución integral (cf. p. e. [2]) de la misma ecuación, ha de verificarse:

$$\begin{cases} |u(t) - x|_H \leq |u_0 - x|_H + \int_0^t |\beta(s) - y|_H \, ds \\ \forall [x, y] \in A \quad \text{(mediante ideniificación de A con su grafo),} \end{cases}$$

lo que implica:

$$|u(t) - x|_H \leq |u_0 - x|_H + \int_0 \{ |\beta(s)|_H + |y|_H \} \, ds = (*)$$

Los cálculos que siguen se refieren sólo a la utilización de H_5); si hubiésemos partido de (H_6), el resultado sería análogo. Por (H_5), se sigue que

$$(*) \leq |u_0 - x|_H + t\,|y|_H + \int_0^t \{ \gamma(s)\, |u(s - \omega(s))|_H + \delta(s) \} \, ds \leq$$

$$\leq |u_0 - x|_H + t\,|y|_H + \int_0^t \{ \gamma(s) \sup_{\sigma \in [0, s]} |u(\sigma)|_H + \delta(s) \} \, ds \leq$$

$$\leq \|u_0 - x\|_H + t\,|y|_H + \int_0^t \{ \gamma(s)\, |x|_H + \delta(s) \} \, ds +$$

$$+ \int_0^t \gamma(s)\, \|u - x\|_{L^\infty_s(H)} \, ds.$$

Como $T_1 < +\infty$, la última cantidad es inferior o igual a

$$C + \int_0^t \gamma(s) \cdot \phi(s)\, ds,$$

siendo

$$\phi(s) = \| u - x \|_{L^\infty_s(H)} = \| u - x \|_{C([0,s];H)}\, .$$

Tomando supremos en $t \in [0, \sigma] \subseteq [0, T_1)$, se sigue que

$$\begin{cases} \phi(\sigma) \leq C + \displaystyle\int_0^\sigma \gamma(s) \cdot \phi(s)\, ds \\ \sigma \in (0, T_1). \end{cases}$$

y, por el lema de Gronwall,

$$\begin{cases} \phi(\sigma) \leq C.\, \exp\left(\displaystyle\int_0^\sigma \gamma(s)\, ds \right) \leq C.\, \exp\left(\displaystyle\int_0^{T_1} \gamma(s)\, ds \right) \\ \sigma \in (0, T_1). \end{cases}$$

Luego, finalmente,

$$\| u \|_{L^\infty_{T_1}(H)} \leq \| u - x \|_{L^\infty_{T_1}(H)} + | x |_H \leq \phi(T_1) + | x |_H \leq \text{cte.} + | x |_H < +\infty,$$

donde se ha utilizado que $T_1 <$ ext. sup. (I), y que $\gamma \in L^1_{loc}(I)$. Por otra parte, como u es solución fuerte de (4) sobre $[0, T_1)$, deberá existir $\alpha > 0$ tal que $u(\alpha) \in D(A)$. Utilizando el teorema I (2i), se sigue que

$$\frac{du}{dt} \in L^2(\alpha, T_1; H);$$

nótese que, como $\varnothing(u(t))$ es absolutamente continua sobre todo compacto de $[\alpha, T_1]$, el valor $\varnothing(u(\alpha))$ debe ser finito. Se tiene

$$| u(t) - u(s) |_H \leq \int_s^t |u'(\sigma)|_H\, d\sigma \leq \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(s,t;H)} \cdot (t - s),$$

si $\alpha \leqslant s < t < T_1$, donde se ha utilizado Holder en la última desigualdad. Ahora bien,

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|^{1/2}_{L^2(s,t;H)} \leqq \varnothing (u(\alpha))^{1/2} + \| \beta \|^2_{L^2_{T_1}(H)},$$

con

$$\| \beta \|^2_{L^2_{T_1}(H)} = \int_0^{T_1} |(Mu)(t)|^2_H \, dt;$$

pero (H_5) y

$$\| u \|_{L^\infty_{T_1}(H)} \leqq \text{cte.} < +\infty,$$

implican que

$$|(Mu)(t)|_H \leqq \gamma(t) \, \text{cte.} + \delta(t) \in L^2(I);$$

se sigue que

$$\| \beta \|^2_{L^2_{T_1}(H)} \leqq \text{cte.} < +\infty .$$

En definitiva,

$$|u(t) - u(s)|_H \leqq \text{cte.} \, |t - s|$$

donde la constante sólo depende de α y de T_1. Se sigue, pues, la existencia del

$$\lim_{t \uparrow T_1} u(t) = u(T_1) \in \overline{D(A)}.$$

Volviendo a aplicar la segunda etapa para el valor inicial $u(T_1)$, se obtiene una contradicción con el hecho de ser $[0, T_1)$ el mayor intervalo de prolongación. Luego $T_1 = +\infty$, lo que concluye el teorema.

5. Prolongación para otros tipos de crecimiento

Si nos fijamos en el uso que de las hipótesis (H_5) y/o (H_6) hemos hecho, observaremos que, de hecho, sólo intervienen en la tercera etapa. En efecto, en la primera, el crecimiento del operador M está controlado independientemente de u, mientras que en la segunda etapa sucede que, fuere cual fuese dicho crecimiento —en nuestro caso, bien el factor $| u (t - w(t)) |_H$, ó $\| u \|_{C([0,t];H)}$—, encontraremos una cota del tipo $\Delta(t) = \gamma(t) \cdot \text{cte.} + \delta(t)$; luego es sólo al comienzo de la tercera etapa cuando realmente intervienen las hipótesis arriba citadas.

Por otra parte, siempre podemos suponer que $[0, 0] \in A$ —además de las otras hipótesis— pues, si así no fuera, un cambio adecuado de operador A bastaría para remitirnos al caso anterior «sin modificar en absoluto la naturaleza de M». De ahora en adelante supondremos que $[0, 0] \in A$.

En este apartado demostraremos un teorema de existencia, y de prolongación condicional, para las soluciones de (1), con condiciones sobre el crecimiento de M más generales que en § 3; y, por comodidad, supondremos ciertas hipótesis de continuidad, no todas ellas imprescindibles.

Sea $k: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ continua, no decreciente, $k(r) > 0$ si $r > 0$, $k(0) = 0$; supongamos, además, que $1/k \in L^1(z, +\infty)$ para cualquier $z > 0$, y que $k(r)$ envía conjuntos acotados en conjuntos acotados. Finalmente, supongamos que $\gamma(t)$ y $\delta(t)$ son continuas, con $\delta(0) > 0$. Sea $u_0 \in \overline{D(A)}$ fijado, y supongamos que el conjunto de los valores $t \in \mathring{I}$ tales que

$$\text{(P)} \qquad \int_0^t \gamma(s)\, ds < \int_{|u_0|_H + \|\delta\|_{L^1(0,t)}}^{+\infty} 1/k$$

es no vacío (lo que introduce ya, en particular, una restricción sobre las posibles $\gamma(t)$ y $\delta(t)$; llamemos $\tilde{T}$ al extremo superior de dichos valores. Entonces, si en § 3 sustituimos (H_5) y (H_6) por

$$(H'_5) \qquad |(Mu)(t)|_H \leq \gamma(t) \cdot k(|u(t - w(t))|_H) + \delta(t)$$

$$(H'_6) \qquad \|Mu\|_{L^\infty_t(H)} \leq \gamma(t) \cdot k(\|u\|_{L^\infty_t(H)}) + \delta(t)$$

podemos enunciar el siguiente resultado:

TEOREMA.—Sea la ecuación (1) sobre el intervalo I; sean u_0, A, M como en § 3, habiendo sustituido (H_5) y (H_6) por (H'_5) (H'_6); y sea $\tilde{T} > 0$ el arriba citado. Entonces, el problema (1) admite una solución fuerte sobre, por lo menos, el intervalo $[0, \tilde{T})$.

DEMOSTRACIÓN.—Las dos primeras etapas son inmediatas, mientras que en la tercera basta ver que, si $[0, T_1)$, con $T_1 < \tilde{T}$, es el mayor intervalo de prolongación de una solución $u(t)$ de (1), entonces $|u(t)|_H \leqslant$ cte. $< +\infty$, para todo $t < T_1$ (la constante es independiente de t); el resto de la tercera etapa es análogo al desarrollado en § 4.

Procederemos como en § 4, sólo que eligiendo $[x, y] = [0, 0] \in A$. Se obtiene entonces,

$$|u(t)|_H \leq |u_0|_H + \int_0^t |\beta(s)|_H \, ds = (*),$$

donde $\beta(s) = -(M\,u)(s)$; utilizando, p. e., (H'_5), sale que

$$(*) \leq |u_0|_H + \int_0^t \delta(s)\,ds + \int_0^t \gamma(s) \cdot k(\|u\|_{C([0,s];H)})\,ds;$$

llamando $\psi(s) = \|u\|_{C([0,s];H)}$, y tomando supremos en

$$t \in [0, \sigma] \underset{\neq}{\subset} [0, T_1),$$

se sigue que

$$\psi(\sigma) \leq c(\sigma) + \int_0^\sigma \gamma(t)\,k(\psi(t))\,dt$$
$$\sigma \in (0, T_1),$$

donde

$$c(\sigma) = |u_0|_H + \int_0^\sigma \delta(s)\,ds \quad \text{y} \quad c'(\sigma) \geq 0.$$

Entonces (cf. apéndice),

$$\left\{\begin{array}{l} \phi(\sigma) \leqq G^{-1}\left(G\left(|u_0|_H + \|\delta\|_{L^1_\sigma}\right) + \|\gamma\|_{L^1_\sigma}\right) \\ \forall \sigma \in (0, T_1) \quad \text{tal que} \quad G(c(\sigma)) + \displaystyle\int_0^\sigma \gamma(s)\,ds \in \operatorname{Dom}(G^{-1}), \end{array}\right. \tag{5}$$

donde G (r) está dada en el apéndice

Ahora bien, G (r) es creciente y continua, Dom $(G^{-1}) = R(G)$; luego (5) es válida para valores

$$\sigma \in (0, T_1) \quad \text{tales que} \quad G(c(\sigma)) + \int_0^\sigma \gamma(s)\,ds \in [0, \int_{r_0}^\infty 1/k)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\sigma \in (0, T_1) \quad \text{y} \quad \int_0^\sigma \gamma(s)\,ds < \int_{|u_0|_H + \|\delta\|_{L^1_\sigma}}^\infty 1/k. \tag{6}$$

Ahora bien, si $\sigma \in (0, T_1)$ con $T_1 < \tilde{T}$, se tiene que

$$\int_{|u_0|_H + \|\delta\|_{L^1_\sigma}}^\infty 1/k > \int_{|u_0|_H + \|\delta\|_{L^1_{\tilde{T}}}}^\infty 1/k > \int_0^{\tilde{T}} \gamma(s)\,ds \geqq \int_0^\sigma \gamma(s)\,ds$$

puesto que $\delta(t)$, $\gamma(t) \geqslant 0$; de manera que la condición (6) se reduce, en realidad, a

$$\sigma \in (0, T_1)$$

y, por lo tanto,

$$\phi(\sigma) \leqq G^{-1}\left(G\left(|u_0|_H + \|\delta\|_{L^1_\sigma}\right) + \|\gamma\|_{L^1_\sigma}\right) \leqq \text{puesto que } G^{-1} \text{ es creciente} \leqq$$
$$\leqq G^{-1}\left(|u_0|_H + \|\delta\|_{L^1_{T_1}}) + \|\gamma\|_{L^1_{T_1}}\right) < +\infty, \qquad \forall \sigma \in (0, T_1).$$

De acuerdo con la definición de $\psi(\sigma)$, esto implica que existe una constante c tal que

$$|u(\sigma)|_H \leq c < +\infty, \quad \forall \sigma < T_1 .$$

Como ya se hizo notar al principio de este apartado, a partir de esta acotación se puede llegar fácilmente a una contradicción con el hecho de que $[0, T_1)$, con $T_1 < \tilde{T}$, era el mayor intervalo de prolongación de la solución; luego, necesariamente, T_1 debe ser superior o igual a $\tilde{T}$, lo que concluye el teorema.

OBSERVACIONES.

1. Para ilustrar la naturaleza condicional del resultado de prolongación, elijamos $k(r) = r^a$, con $a > 1$; más concretamente, supongamos $a = 2$; la condición (P) quedaría como

$$|u_0|_H < (1/\|\gamma\|_{L^1_t}) - \|\delta\|_{L^1_t}$$

Al margen de que esto condiciona los posibles valores iniciales u_0 a los que se puede aplicar el teorema, para que (P) tenga sentido en el caso presente sería necesario que $\|\gamma\|_{L^1_t} \cdot \|\delta\|_{L^1_t} < 1$ para valores $t > 0$, siendo $\tilde{T}$ el mayor de tales valores.

La última desigualdad conlleva el que las magnitudes de los crecimientos dependiente e independiente de $u(t)$ —resp., $\gamma(t)$ y $\delta(t)$— deben comportarse, la una con respecto a la otra, de manera inversa.

2. Como $\gamma(t)$, $\delta(t) \geqslant 0$, uno puede sustituir la condición (P) por otra, más manejable,

$$\tilde{T} = \sup \left\{ t \in \mathring{I} \,/\, \int_0^t \gamma(s)\, ds < \int_{|u_0|}^{\infty} 1/k \right\}$$

y, si $\gamma \in L^1(0, \infty)$, bastaría entonces con elegir

$$\tilde{T} = \sup \left\{ t \in \mathring{I} \,/\, \|\gamma\|_{L^1(0,\infty)} < \int_{|u_0|}^{\infty} 1/k \right\} .$$

6. Apéndice

En este apartado enunciaremos un lema concerniente a desigualdades integrales no lineales, cuya demostración no es sino una variante de las técnicas utilizadas en [6]. Las hipótesis utilizadas pueden debilitarse y, en particular, la condición $W(0) = 0$ no tiene mayor relevancia (lo que, en el § 5, nos permitiría en principio con funciones $k(r)$ tales que $k(0) \neq 0$). Se tiene:

Lema.—Sean $x(t)$, $h(t)$ funciones continuas de $[0, \infty) \longrightarrow [, \infty)$; sea $c(t)$ una función de clase uno de $[0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$, con $c'(t) \geqslant 0$; sea $W(r)$ una función que toma valores positivos en $(0, \infty)$, no decreciente, con $W(0) = 0$, y supongamos que

$$\begin{cases} x(t) \leq c(t) + \displaystyle\int_0^t h(\sigma)\, W(x(\sigma))\, d\sigma \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Entonces,

$$x(t) \leq G^{-1}\left(G(c(t)) + \int_0^t h(\sigma)\, d\sigma \right)$$

para todo t tal que

$$G(c(t)) + \int_0^t h(\sigma)\, d\sigma \in \operatorname{Dom}(G^{-1}),$$

donde

$$G(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{d\sigma}{W(\sigma)}, \quad r \geq r_0 > 0,$$

r_0 cualquiera (en particular, podemos elegir $r_0 = c(0)$).

DEMOSTRACIÓN.—Por hipótesis, y como W (r) es no decreciente, se tiene

$$W(x(t)) \leq W\left(c(t) + \int_0^t h(\sigma)\, W(x(\sigma))\, d\sigma\right);$$

por positividad, y como $h(s) \geqslant 0$, se sigue que

$$\frac{h(t)\, W(x(t))}{W\left(c(t) + \int_0^t h(\sigma)\, W(x(\sigma))\, d\sigma\right)} \leq h(t);$$

ahora bien, si llamamos

$$n(t) = c(t) + \int_0^t h(\sigma)\, W(x(\sigma))\, d\sigma,$$

y observamos que

$$n'(t) = c'(t) + h(t)\, W(x(t)),$$

podemos escribir lo anterior como

$$\frac{n'(t)}{W(n(t))} \leq h(t) + \frac{c'(t)}{W(n(t))}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{d}{dt}(G(n(t))) \leq h(t) + \frac{c'(t)}{W(n(t))}.$$

pero $n(t) \geqslant c(t) > 0$ implica que W $(n(t)) \geqslant$ W $(c(t)) > 0$ y, por otra parte, como $c'(t) \geqslant 0$, se sigue finalmente que

$$\frac{d}{dt}(G(n(t))) \leq h(t) + \frac{c'(t)}{W(c(t))} = h(t) + \frac{d}{dt}(G(c(t)));$$

integrando entre 0 y t, y observando que $n(0) = c(0)$, sale

$$G(n(t)) \leq G(c(t)) + \int_0^t h(\sigma)\, d\sigma$$

Teniendo en cuenta que $G'(r) > 0$, y que $x(t) \leqslant n(t)$, se sigue

$$G(x(t)) \leq G(c(t)) + \int_0^t h(\sigma)\, d\sigma$$

$$t \geq 0.$$

Entonces, para todo $t \geqslant 0$ tal que

$$G(c(t)) + \int_0^t h(\sigma)\, d\sigma \in \mathrm{Dom}(G^{-1}),$$

se satisface que

$$x(t) \leq G^{-1}\left(G(c(t)) + \int_0^t h(\sigma)\, d\sigma \right),$$

c. q. d.

Bibliografía

[1] Attouch, H.-Damlamian, A. (1972). On multivalued evolution equations in Hilbert spaces. *Israel J. Math.*, **12**, 4.

[2] Benilan, Ph. (1972). These, Orsay.

[3] Brezis, H. (1970). Operateurs maximaux monotones et semigroupes non lineaires. Curso de 3.° ciclo, Paris.

[4] Fraile, J. M. (1978). Tesis, Universidad Complutense de Madrid.

[5] Gaultier, M. (1973). Thèse, Univ. Bordeaux.

[6] Pachpatte, B. G. (1975). On some generalizations of Bellman's lemma. *Jornal Math. Analy. Appt.*, 51.

[7] Rockafellar, R. T. (1970). On the maximality of the sums of non linear monotone operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149.