REPRESENTACIONES DE LOS ESPACIOS $\mathcal{C}^m(\mathrm{V})$ Y $\mathcal{D}^m(\mathrm{V})$

M. Valdivia

Recibido: 3 diciembre 1980

Given a positive integer n, let V be an n-dimensional $\mathcal{C}^m$-differentiable manifold, $0 \leqslant m \leqslant \infty$. If V is non-compact and countable at the infinite, we give simple representations of $\mathcal{C}^m(\mathrm{V})$ and $\mathcal{D}^m(\mathrm{V})$.

Dado un entero positivo n, sea V una variedad n-dimensional $\mathcal{C}^m$-diferenciable, $0 \leqslant m \leqslant \infty$. Si V no es compacta y es numerable en el infinito, damos representaciones simples de $\mathcal{C}^m(\mathrm{V})$ y $\mathcal{D}^m(\mathrm{V})$.

Si M es un subconjunto de un espacio topológico, $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$ es su interior. Los espacios vectoriales que usamos aquí están definidos sobre el cuerpo C de los números complejos. Representamos por s el espacio vectorial de todas las sucesiones complejas de decrecimiento rápido con la topología ordinaria de espacio de Fréchet. Si los espacios vectoriales topológicos E y F son isomorfos escribimos $\mathrm{E} \simeq \mathrm{F}$.

Si A es un subconjunto compacto del espacio euclídeo n-dimensional R^n, $\mathcal{D}^m(\mathrm{A})$ es el espacio vectorial de todas las funciones complejas definidas en R^n, de clase $\mathcal{C}^m$ y con soportes contenidos en A. Si A coincide con la clausura de su interior, $\mathcal{C}^m(\mathrm{A})$ es el espacio vectorial de todas las funciones complejas definidas en $\overset{\circ}{\mathrm{A}}$, de clase $\mathcal{C}^m$ que se extienden por continuidad a A así como sus derivadas de órdenes no mayores que m. Suponemos que $\mathcal{D}^m(\mathrm{A})$ y $\mathcal{C}^m(\mathrm{A})$ están dotados de sus topologías ordinarias de espacio de Banach (m finito) o de espacio de Fréchet (m infinito).

Ponemos

$$\mathrm{I} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n : 0 \leqslant x_j \leqslant 1, \ \ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Si E es un espacio localmente convexo y si J es un conjunto de cardinal α, E^J y $E^{(J)}$ representan el producto topológico y la suma directa topológica de α espacios iguales a E, respectivamente. En particular E^N y $E^{(N)}$ son el producto topológico y la suma directa topológica, respectivamente, de una infinidad numerable de espacios iguales a E.

Dado un entero positivo n, V es una variedad n-dimensional $\mathcal{C}^m$-diferenciable, $0 \leqslant m \leqslant \infty$, que no es compacta y es numerable en el infinito. Un conjunto H es un cubo en V si existe una carta definida en un entorno de H que representa H en un cubo compacto no degenerado de R^n. $\mathcal{D}^m(H)$ es el espacio lineal de todas las funciones complejas definidas en V, de clase $\mathcal{C}^m$ y con soportes contenidos en H, dotado de su topología ordinaria.

Tomamos una sucesión (K_p) de cubos en V tal que

$$\{\overset{\circ}{K}_p : p = 1, 2, \ldots\}$$

es un recubrimiento localmente finito de V, y tomamos también

$$\varphi_p \in \mathcal{D}^m(K_p), \quad p = 1, 2, \ldots$$

con

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(x) = 1, \quad x \in V.$$

Sea (H_p) una sucesión de cubos de V, disjuntos dos a dos, tal que dado un compacto cualquiera K en V, existe un entero positivo q, dependiendo de K, tal que

$$H_p \cap K = \varnothing, \quad \text{para } p \geqslant q.$$

Sea ψ_p una carta definida en un entorno de H_p y sea L_p un subconjunto compacto contenido en $\overset{\circ}{H}_p$ tal que $\psi_p(L_p)$ es un cubo no degenerado de R^n, $p = 1, 2, \ldots$

1. Resultados previos

En lo que sigue, E es un espacio localmente convexo separado y J es un conjunto infinito.

PROPOSICIÓN 1.—*Sea* F *un subespacio complementado de* E^J *y sea* G *un subespacio complementado de* F. *Si* $G \simeq E^J$ *entonces* $F \simeq E^J$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea F_1 un complemento topológico de F en E^J y sea G un complemento topológico de G en F. Se tiene que

$$F \simeq G_1 \times G \simeq G_1 \times E^J \simeq G_1 \times E^J \times E^J \simeq F \times E^J.$$

Por otra parte,

$$E^J \simeq (E^J)^J \simeq (F \times F_1)^J \simeq F \times F^J \times F_1{}^J \simeq F \times E^J.$$

Por tanto,

$$F \simeq E^J.$$

PROPOSICIÓN 2.—*Sea* F *un subespacio complementado de* $E^{(J)}$. *Sea* G *un subespacio complementado de* F. *Si* $G \simeq E^{(J)}$ *entonces* $F \simeq E^{(J)}$.

DEMOSTRACIÓN.—Es análoga a la de la proposición anterior cambiando J por (J). c. q. d.

PROPOSICIÓN 3.—*Sea* H *un subespacio complementado de* E *y sea* L *un subespacio complementado de* H. *Si* $L \simeq E$ *entonces* $H^J \simeq E^J$ *y* $H^{(J)} \simeq E^{(J)}$.

DEMOSTRACIÓN.—Es obvio que H^J y $H^{(J)}$ son subespacios complementados de E^J y $E^{(J)}$, respectivamente. Por otra parte, L^J y $L^{(J)}$ son subespacios complementados de H^J y $H^{(J)}$, respectivamente. Aplicamos ahora las proposiciones anteriores y llegamos a la conclusión. c. q. d.

PROPOSICIÓN 4.—$\mathcal{D}^m(I)^J \simeq \mathcal{C}^m(I)^J$ y $\mathcal{D}^m(I)^{(J)} \simeq \mathcal{C}^m(I)^{(J)}$.

DEMOSTRACIÓN.—Si ponemos

$$D = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : \frac{1}{3} \leqslant x_j \leqslant \frac{2}{3} \right\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

sea T un operador lineal continuo de $\mathcal{C}^m$ (D) en $\mathcal{D}^m$ (I) tal que si

$f \in \mathcal{C}^m$ (D), la restricción de T f a D coincide con f (véase [1], [2] y [4]). Entonces $\mathcal{D}^m$ (I) es la suma directa topológica de T ($\mathcal{C}^m$ (D)) y el subespacio de $\mathcal{D}^m$ (I) de aquellas funciones que se anulan en D. Por tanto, $\mathcal{C}^m$ (I), que es, obviamente, isomorfo a $\mathcal{C}^m$ (D), es isomorfo al subespacio complementado T ($\mathcal{C}^m$ (D)) de $\mathcal{D}^m$ (I)

Sea S un operador lineal continuo de $\mathcal{C}^m (I \sim \mathring{D})$ en $\mathcal{C}^m$ (I) tal que, si $g \in \mathcal{C}^m (I \sim \mathring{D})$, la restricción de S g a $I \sim \mathring{D}$ coincide con g (véase [1], [2] y [4]). Entonces $\mathcal{C}^m$ (I) es la suma directa topológica de S ($\mathcal{C}^m (I \sim \mathring{D})$) y el subespacio de $\mathcal{C}^m$ (I) formado por todas aquellas funciones que se anulan en $I \sim \mathring{D}$ (este espacio es isomorfo a $\mathcal{D}^m$ (D)). Por tanto, $\mathcal{D}^m$ (I) es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{C}^m$ (I). De acuerdo con la proposición anterior obtenemos:

$$\mathcal{D}^m (I)^J \simeq \mathcal{C}^m (I)^J \quad \text{y} \quad \mathcal{D}^m (I)^{(J)} \simeq \mathcal{C}^m (I)^{(J)}.$$

c. q. d.

NOTA.—Si $m = \infty$, la proposición anterior se puede obtener también teniendo en cuenta que

$$\mathcal{D}^\infty (I) \simeq s, \text{ [3], p. 210} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}^\infty (I) \simeq s, \text{ [3], p. 207.}$$

2. Representación de $\mathcal{C}^m$ (V)

$\mathcal{C}^m$ (V) es el espacio de todas las funciones complejas de clase $\mathcal{C}^m$ que están definidas en V, dotado de su topología ordinaria de espacio de Fréchet.

PROPOSICIÓN 5.—*$\mathcal{C}^m$ (V) es isomorfo a un subespacio complementado de* $\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^m (K_p)$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea X la aplicación de $\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^m (K_p)$ en $\mathcal{C}^m$ (V) definida por

$$X: (f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots) \longrightarrow \sum_{p=1}^{\infty} f_p.$$

Sea Y la aplicación de $\mathcal{C}^m(V)$ en $\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^m(K_p)$ definida por

$$Y: f \longrightarrow (f\varphi_1, f\varphi_2, \dots, f\varphi_p, \dots).$$

Es inmediato que $Y \circ X$ es una proyección continua en $\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^m(K_p)$ cuya imagen coincide con $Y(\mathcal{C}^m(V))$, que es isomorfo a $\mathcal{C}^m(V)$. c. q. d.

PROPOSICIÓN 6.— $\prod_{p=1}^{\infty} (\psi_p(L_p))$ *es isomorfo a un subespacio complementado de* $\mathcal{C}^m(V)$.

DEMOSTRACIÓN.—Si W_p es un operador lineal continuo de extensión de $\mathcal{C}^m(\psi_p(L_p))$ en $\mathcal{D}^m(\psi_p(H_p))$, $p = 1, 2, \dots$, y si $f \in \mathcal{C}^m(\psi_p(L_p))$, ponemos:

$$(Z_p f)(x) = \begin{cases} [(W_p f) \circ \psi_p](x), & x \in H_p, \\ 0, & x \in V \sim H_p. \end{cases}$$

Sea Z la aplicación de $\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{C}^m(\psi_p(L_p))$ en $\mathcal{C}^m(V)$ definida por

$$Z: (f_1, f_2, \dots, f_p, \dots) \longrightarrow \sum_{p=1}^{\infty} Z_p f_p.$$

Es inmediato que $\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{C}^m(\psi_p(L_p))$ es isomorfo a

$$Z\left(\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{C}^m(\psi_p(L_p))\right),$$

y que este espacio tiene como subespacio complementado en $\mathcal{C}^m(V)$ el formado por las funciones que se anulan en $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_p \cup \dots$ c. q. d.

TEOREMA 1.

$$\mathcal{C}^m(V) \simeq \mathcal{C}^m(I)^N \simeq \mathcal{D}^m(I)^N.$$

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que $\mathcal{D}^m(K_p)$ es isomorfo a $\mathcal{D}^m(I)$

(K_p es un cubo en V), aplicamos las proposiciones 1, 4, 5 y 6 y obtenemos la conclusión deseada. c. q. d.

TEOREMA 2.

$$\mathcal{C}^\infty(V) \simeq s^N.$$

DEMOSTRACIÓN.—Es un caso particular del teorema anterior si usamos que $\mathcal{C}^\infty(I) \simeq s$. c. q. d.

3. Representación de $\mathcal{D}^m$ (V)

$\mathcal{D}^m$ (V) es el espacio vectorial de todas las funciones complejas de clase $\mathcal{C}^m$ definidas en V y con soportes compactos. $\mathcal{D}^m$ (V) está dotado de la topología límite inductivo usual. Si $m = \infty$, escribimos $\mathcal{D}$ (V) en vez de $\mathcal{D}^\infty$ (V).

PROPOSICIÓN 7.—*$\mathcal{D}^m(V)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\bigoplus_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^m(K_p)$.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea X_1 la aplicación de $\bigoplus_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^m(K_p)$ en $\mathcal{D}^m$ (V) definida por

$$X_1 : (f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots) \longrightarrow \sum_{p=1}^{\infty} f_p.$$

Sea Y_1 la aplicación de $\mathcal{D}^m$ (V) en $\bigoplus_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^m$ definida por

$$Y_1 : f \longrightarrow (f\varphi_1, f\varphi_2, \ldots, f\varphi_p, \ldots).$$

Es inmediato que $Y_1 \circ X_1$ es una proyección continua en $\bigoplus_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^m(K_p)$ cuya imagen coincide con $Y_1(\mathcal{D}^m(V))$, que es isomorfo a $\mathcal{D}^m$ (V). c. q. d.

PROPOSICIÓN 8.—*$\bigoplus_{p=1}^{\infty} \mathcal{C}^m(\psi_p(L_p))$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{D}^m(V)$.*

DEMOSTRACIÓN.—Sean W_p y Z_p las aplicaciones definidas en la prueba de la proposición 6. Sea Z_1 la aplicación de $\bigoplus_{p=1}^{\infty} \mathcal{C}^m (\psi_p (L_p))$ en $\mathcal{D}^m$ (V) definida por

$$Z_1 : (f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots) \longrightarrow \sum_{p=1}^{\infty} Z_p f_p.$$

Es inmediato que $\bigoplus_{p=1}^{\infty} \mathcal{C}^m (\psi_p (L_p))$ es isomorfo a

$$Z_1 (\bigoplus_{p=1}^{\infty} \mathcal{C}^m (\psi_p (L_p))$$

y que tiene el subespacio de $\mathcal{D}^m$ (V) formado por aquellas funciones que se anulan en

$$L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_p \cup \ldots$$

como complemento topológico en $\mathcal{D}^m$ (V). c. q. d.

TEOREMA 3.

$$\mathcal{D}^m (V) \simeq \mathcal{C}^m (I)^{(N)} \simeq \mathcal{D}^m (I)^{(N)}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que $\mathcal{D}^m (K_p)$ es isomorfo a $\mathcal{D}^m$ (I), aplicamos las proposiciones 2, 4, 7 y 8 y obtenemos la conclusión buscada. c. q. d.

TEOREMA 4.

$$\mathcal{D} (V) \simeq s^{(N)}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Es un caso particular del teorema anterior si usamos $\mathcal{C}^\infty (I) \simeq s$. c. q. d.

Bibliografía

[1] HESTENES, M. R. 1941. Extension of the range of a differentiable function. *Duke Math. J.*, **8**, 188-192.

[2] Ogrodzka, Z. 1967. On simultaneous extension of infinitely differentiable functions. *Studia Math.*, **28**, 193-207.

[3] Rolewicz, S. 1972. Metric linear spaces. PWN-polish scientific publishers, Warszawa.

[4] Valdivia, M. 1978. Representaciones de los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\Omega)$. *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. Madrid, **72**, 385-414.