SOBRE UNA EXTENSION DE LA TEORIA DE DE WILDE

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 4 junio 1980

In measure theory has a great interest to extend the closed-graph theorems for linear mappings T: $l_0^\infty(\Sigma) \longrightarrow F$, being $l_0^\infty(\Sigma)$ the vector space of numerical Σ-step functions when Σ is a σ-algebra of subsets of a set Ω. We have treated before this problem in several papers, between them, [4], [5], [6] and [7]. Know we are going to extend the De Wilde's theory for some barrelled spaces non necessarily complet, the σ-barrelled spaces, between which we conjecture that the space $l_0^\infty(\Sigma)$ is fond.

En la teoría de la medida tiene interés extender los teoremas de la gráfica cerrada para las aplicaciones lineales T: $l_0^\infty(\Sigma) \longrightarrow F$, siendo $l_0^\infty(\Sigma)$ el espacio vectorial de las funciones numéricas Σ-simples cuando Σ es una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Nosotros nos hemos preocupado de este problema en varios trabajos, entre ellos [4], [5], [6] y [7]. Ahora vamos a tratar de extender la teoría de De Wilde para ciertos espacios tonelados no necesariamente completos, los σ-tonelados, entre los que conjeturamos se halla $l_0^\infty(\Sigma)$.

De manera general, E y F serán espacios vectoriales topológicos localmente convexos de Hausdorff, en abreviatura, e. l. c. s. El cuerpo **K** de los escalares será siempre el de los números reales o el de los números complejos.

DEFINICIÓN 1.—Un e. l. c. s. E se dice un *espacio tonelado de clase* σ o un *espacio σ-tonelado* si, para toda sucesión $(E_n)_1^\infty$ de subespacios que cubre a E, existe un n tal que E_n es un espacio tonelado cuya clausura $\bar{E}_n$ es de codimensión finita.

DEFINICIÓN 2.—Una clase $\mathcal{C} = \{C(n_1, \ldots, n_k)\}$ de subconjuntos

$C(n_1, \ldots, n_k)$ de un e. l. c. s. E, donde k y $n_1, \ldots, n_k$ son números naturales, se llama una *criba* si satisface las condiciones

$$E = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} C(n_1), \quad C(n_1, \ldots, n_{k-1}) = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} C(n_1, \ldots, n_k)$$

para $k > 1$ y todo sistema $n_1, \ldots, n_{k-1}$. Si todos los elementos de la criba son absolutamente convexos se dice que la criba es *absolutamente convexa.*

Una criba se dice que es de *tipo* $\mathcal{C}_0$ o una $\mathcal{C}_0$-*criba* si, para cada sucesión $(n_k)_1^{\infty}$ de números naturales, existe una sucesión $(\rho_k)_1^{\infty}$ de números reales positivos tales que para todo $\lambda_k \in (0, \rho_k]$ y todo $x_k \in C(n_1, \ldots, n_k)$, la serie $\sum_1^{\infty} \lambda_k x_k$ converge en E.

TEOREMA 1.—*Sean E un espacio σ-tonelado metrizable y F un espacio con una $\mathcal{C}_0$-criba absolutamente convexa $\mathcal{C}$. Entonces, toda aplicación lineal $T: E \longrightarrow F$ con la gráfica secuencialmente cerrada es continua.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\mathcal{C} = \{C(n_1, \ldots, n_k)\}$ una $\mathcal{C}_0$-criba absolutamente convexa sobre F. Entonces

$$E = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} T^{-1}(C(n_1)) \quad \text{y} \quad T^{-1}(C(n_1, \ldots, n_{k-1})) = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} T^{-1}(C(n_1, \ldots, n_k))$$

para $k > 1$ y $n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbf{N}$. Por tanto, si $E(n_1, \ldots, n_k)$ es la envoltura lineal de $T^{-1}(C(n_1, \ldots, n_k))$, se tiene

$$E = \bigcup_{u_1=1}^{\infty} E(n_1) \quad \text{y} \quad E(n_1, \ldots, n_{k-1}) = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} E(n_1, \ldots, n_k)$$

para $k > 1$ y $n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbf{N}$.

Por ser E un espacio σ-tonelado existe n_1 tal que $E(n_1)$ es un espacio σ-tonelado cuya clausura $\bar{E}(n_1)$ es de codimensión finita. De la misma forma, existe n_2 tal que $E(n_1, n_2)$ es un espacio σ-tonelado cuya clausura $\bar{E}(n_1, n_2)$ es de codimensión finita (en E). Por inducción, se obtiene una sucesión $(n_k)_1^{\infty}$ tal que cada $E(n_1, \ldots, n_k)$ es un espacio σ-tonelado cuya clausura $\bar{E}(n_1, \ldots, n_k)$ es de codimensión finita.

Sea

$$E_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{E}(n_1, \ldots, n_k).$$

Entonces E_0 es un subespacio cerrado de codimensión contable de E. Sea $(x_n)_1^\infty$ una cobase de E_0 y G_n la envoltura lineal de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Como $(E_0 + G_n)_1^\infty$ es una sucesión no decreciente de subespacios que cubre a E y E es un espacio σ-tonelado, existe un n tal que

$$E = \overline{F_0 + G_n} = E_0 + G_n.$$

Por tanto, E_0 es de codimensión finita y existe k_0 tal que

$$\bar{E}(n_1, \ldots, n_k) = E_0$$

para $k \geqslant k_0$.

Sea V un tonel de F. Como $E(n_1, \ldots, n_k)$ es un espacio tonelado y

$$\overline{T^{-1}(C(n_1, \ldots, n_k) \cap V)} \cap E(n_1, \ldots, n_k)$$

es un tonel de $E(n_1, \ldots, n_k)$, se deduce que dicho conjunto es un entorno de 0 en $E(n_1, \ldots, n_k)$. Por tanto,

$$\overline{T^{-1}(C(n_1, \ldots, n_k) \cap V)}$$

es un entorno de 0 en $\bar{E}(n_1, \ldots, n_k) = E_0$ para $k \geqslant k_0$.

Como $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{C}_0$-criba, existe $\rho_k > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y_k$ converge en F para todo $\lambda_k \in (0, \rho_k]$ y todo $y_k \in C(n_1, \ldots, n_k)$. Dado $\varepsilon > 0$, determinemos $\lambda_k \in (0, \rho_k]$ de forma que

$$\sum_{k_0}^{\infty} \lambda_k \leq (1 + \varepsilon) \lambda_{k_0}$$

Vamos a probar que

$$\overline{T^{-1}(C(n_1, \ldots, n_{k_0}) \cap V)} \subset (1 + \varepsilon) T^{-1}(V).$$

Como E_0 es metrizable existe un sistema fundamental numerable

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_k \supset \ldots$$

de entornos absolutamente convexos de 0 en E_0. Es obvio que

$$U^{(k)} = \overline{M}_k \cap U_k$$

es un entorno absolutamente convexo de 0 en E_0 para $k \geqslant k_0$ y

$$M_k = \lambda_k T^{-1}(C(n_1, \ldots, n_k) \cap V).$$

Supongamos $x_0 \in \overline{M}_{k_0}$. Existe $x_1 \in M_{k_0}$ tal que

$$x_0 - x_1 \in U^{(k_0+1)} \subset \overline{M}_{k_0+1}$$

Existe $x_2 \in M_{k_0+1}$ tal que

$$x_0 - x_1 - x_2 \in U^{(k_0+2)} \subset \overline{M}_{k_0+2}.$$

Por inducción, se obtiene una sucesión $(x_k)_1^\infty$ en E_0 tal que

$$x_{k+1} \in M_{k_0+k} \quad \text{y} \quad x_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k \in U^{(n+k_0)} \subset \overline{M}_{n+k_0}.$$

Por construcción,

$$T x_{k-k_0+1} \subset T(M_k) \subset \lambda_k C(n_1, \ldots, n_k) \cap V$$

para $k \geqslant k_0$. Por tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} T x_k$ converge en F y su suma y_0 está en

$$\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k\right) V \subset (1 + \varepsilon) \lambda_{k_0} V.$$

Como la gráfica de T es secuencialmente cerrada,

$$T x_0 = y_0 \quad \text{y} \quad x_0 \in (1 + \varepsilon) \lambda_{k_0} T^{-1}(V).$$

Siendo

$$\overline{T^{-1}(C(n_1, \ldots, n_k) \cap V)}$$

un entorno de 0 en E_0, se deduce del resultado obtenido que $T^{-1}(V) \cap E_0$ es un entorno de 0 en E_0 para todo entorno absolutamente convexo y cerrado (o tonel) V de 0 en F. Entonces, la restricción T_0 de T a E_0 es continua y, como E_0 es un subespacio cerrado de codimensión finita, resulta que T es continua.

TEOREMA 2.—*Sean E un espacio σ-tonelado y F un espacio con una $\mathcal{C}_0$-criba absolutamente convexa $\mathcal{C}$. Entonces, toda aplicación lineal $T: E \longrightarrow F$ con la gráfica cerrada es continua.*

DEMOSTRACIÓN.—Se puede proceder como en el teorema 1 con la diferencia que aquí no se puede asegurar que existe un sistema fundamental numerable de entornos de 0 en E_0. Para que este teorema quede probado debemos demostrar que $y_0 = T x_0$. Sean U, W entornos de 0 en E y F, respectivamente. Como

$$x_0 - \sum_{k=1}^{n-k_0} x_k \in \overline{M}_n \subset M_n + U,$$

existe $z_{n-k_0} \in M_n$ tal que

$$x_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k - z_n \in U$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. De la definición de los conjuntos M_n se deduce que las sucesiones $T z_n$ y $T x_n$ convergen a 0 en F. Por tanto,

$$y_0 - T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + z_n\right) \in W$$

para $n \geqslant n_0$. Luego

$$(x_0, y_0) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k + z_n, T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + z_n\right)\right) \in U \times W$$

para $n \geqslant n_0$. Como la gráfica de T es cerrada, resulta de aquí que $y_0 = T x_0$.

TEOREMA 3.—*Sean E la envoltura localmente convexa $\sum_i A_i(E_i)$ de espacios σ-tonelados E_i y F un espacio con una $\mathcal{C}_0$-criba absolu-*

tamente convexa $\mathcal{C}$. Entonces, toda aplicación lineal $T: E \longrightarrow F$ con la gráfica cerrada es continua.

DEMOSTRACIÓN.—Resulta inmediatamente del teorema 2.

TEOREMA 4.—*Sean E un espacio con una $\mathcal{C}_0$-criba absolutamente convexa y F un espacio σ-tonelado metrizable. Entonces, si E_0 es un subespacio de E, toda aplicación lineal $T: E_0 \longrightarrow F$ con la gráfica secuencialmente cerrada en $E \times F$ y tal que $T(E_0)$ es un subespacio σ-tonelado denso de F es abierta y $T(E_0) = F$.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\mathcal{C} = \{C(n_1, \ldots, n_k)\}$ una $\mathcal{C}_0$-criba absolutamente convexa sobre E. Entonces

$$T(E_0) = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} T(C(n_1) \cap E_0) \quad \text{y} \quad T(C(n_1, \ldots, n_{k-1}) \cap E_0) = $$
$$= \bigcup_{n_k=1}^{\infty} T(C(n_1, \ldots, n_k) \cap E_0)$$

para $k > 1$ y $n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbf{N}$. Por tanto, si $F(n_1, \ldots, n_k)$ es la envoltura lineal de

$$T(C(n_1, \ldots, n_k) \cap E_0)$$

se tiene

$$T(E_0) = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} F(n_1) \quad \text{y} \quad F(n_1, \ldots, n_{k-1}) = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} F(n_1, \ldots, n_k)$$

para $k > 1$ y $n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbf{N}$.

Por ser $T(E_0)$ un espacio σ-tonelado existe una sucesión $(n_k)_1^\infty$ tal que cada $F(n_1, \ldots, n_k)$ es un espacio σ-tonelado cuya clausura $\overline{F}(n_1, \ldots, n_k)$ es de codimensión finita en F.

Sea

$$F_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{F}(n_1, \ldots, n_k).$$

Entonces, como en el teorema 1, F_0 es un subespacio cerrado de codimensión finita de F y existe un k_0 tal que $\overline{F}(n_1, \ldots, n_k) = F_0$ para $k \geqslant k_0$.

Sea V un tonel de E. Como $F(n_1, \ldots, n_k)$ es un espacio tonelado y

$$\overline{T(C(n_1, \ldots, n_k) \cap E_0 \cap V) \cap F(n_1, \ldots, n_k)}$$

es un tonel de $F(n_1, \ldots, n_k)$, se deduce que dicho conjunto es un entorno de 0 en $F(n_1, \ldots, n_k)$. Por tanto,

$$\overline{T(C(n_1, \ldots, n_k) \cap E_0 \cap V)}$$

es un entorno de 0 en $\overline{F}(n_1, \ldots, n_k) = F_0$ para $k \geqslant k_0$.

Como $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{C}_0$-criba, existe $\rho_k > 0$ tal que $\sum_1^{\infty} \lambda_k x_k$ converge en E para todo $\lambda_k \in (0, \rho_k]$ y todo $x_k \in C(n_1, \ldots, n_k)$. Dado $\varepsilon > 0$, determinemos $\lambda_k \in (0, \rho_k]$ de forma que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k \leq (1+\varepsilon)\lambda_{k_0}.$$

Vamos a probar que

$$T(C(n_1, \ldots, n_{k_0}) \cap E_0 \cap V) \subset (1+\varepsilon)\, T(E_0 \cap V).$$

Como F_0 es metrizable, existe un sistema fundamental numerable

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots U_k \supset \ldots$$

de entornos de 0 en F_0. Es obvio que

$$U^{(k)} = \overline{T(M_k)} \cap U_k$$

es un entorno de 0 en F_0 para $k \geqslant k_0$ y

$$M_k = \lambda_k C(n_1, \ldots, n_k) \cap F_0 \cap V.$$

Supongamos $y_0 \in \overline{T(M_{k_0})}$. Existe $x_1 \in M_{k_0}$ tal que

$$y_0 - T x_1 \in U^{(k_0+1)} \subset \overline{T(M_{k_0+1})}.$$

Por inducción, se obtiene una sucesión $(x_k)_1^{\infty}$ en E_0 tal que

$$x_{k+1} \in M_{k+k_0} \quad \text{e} \quad y_0 - \sum_{k=1}^{n} T x_k \in U^{(n+k_0)} \subset \overline{T(M_{n+k_0})}.$$

Por tanto, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en E a un elemento $x_0 \in (1+\varepsilon)\lambda_{k_0} V$ y

$\sum_{k=1}^{\infty}$ T x_k converge a y_0 en F. Como la gráfica de T es secuencialmente cerrada en E × F, se deduce que

$$x_0 \in E_0 \quad e \quad y_0 = T x_0 \in \lambda_{k_0}(1+\varepsilon) T (E_0 \cap V).$$

Siendo

$$\overline{T (C (n_1, \ldots, n_k) \cap E_0 \cap V)}$$

un entorno de **0** en F_0, se deduce del resultado obtenido que $T (E_0 \cap V) \cap F_0$ es un entorno de **0** en F_0 para todo entorno absolutamente convexo y cerrado (o tonel) V de **0** en E. Entonces, la restricción T_0 de T a $T^{-1}(F_0)$ es abierta. Por consiguiente, como F_0 es de codimensión finita y $T(E_0)$ es denso en F, resulta que $T: E_0 \longrightarrow F$ es abierta y $T(E_0) = F$.

TEOREMA 5.—*Sean E un espacio con una $\mathcal{C}_0$-criba absolutamente convexa $\mathcal{C}$ y F un espacio σ-tonelado. Entonces toda aplicación lineal sobreyectiva $T: E \longrightarrow F$ con la gráfica cerrada es abierta.*

DEMOSTRACIÓN.—Resulta fácilmente del teorema 2.

TEOREMA 6.—*Sean E un espacio con una $\mathcal{C}_0$-criba absolutamente convexa y F la envoltura localmente convexa $\sum_i B_i(F_i)$ de espacios F_i σ-tonelados. Entonces toda aplicación lineal sobreyectiva $T: E \longrightarrow F$ con la gráfica cerrada es abierta.*

DEMOSTRACIÓN.—Resulta fácilmente del teorema 3.

Bibliografía

[1] DE WILDE, M. (1978). Closed graph theorems and webbed spaces. Pitman, London.
[2] HORVÁTH, J. (1973). Locally convex spaces. *Lect. Notes in Math.*, n.º 331, Springer, Berlin.
[3] KÖTHE, G. (1979). Topological Vector Spaces. II. Springer, New York.
[4] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1980). Sobre el teorema de la gráfica cerrada. Aplicaciones lineales subcontinuas. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid,* **74**, 811-825.
[5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1980). Sobre el teorema de Dieudonné-Grothendieck. Condiciones necesarias y suficientes. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid,* **74**, 831-834.

[6] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1981). Sobre el teorema de la aplicación abierta. Teorema de Seever. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid,* **75**, 33-37.
[7] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1981). Sobre el teorema de la gráfica cerrada. Teorema de Banach-Schauder. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid,* **75**, 39-46.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid