[7] WHITNEY, H. (1948). On ideals of differentiable functions. *Amer. Journ. Math.*, **70**, pp. 635-658.
[8] YAMAMURO, S. (1974). Differential Calculus in Topological Linear Spaces. *Lect. Notes in Math.*, **374**, Springer-Verlag.

EL DUAL DE ESPACIOS DE ORLICZ SOBRE CUERPOS NO ARQUIMEDIANOS (*)

Fernanda Fuentes y Francisco L. Hernández
Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense. Madrid-3

Let $\mathbb{K}$ be a complete non-archimedean valued field, (Ω, μ) a positive measure space and Φ an Orlicz function. We consider Orlicz spaces $L^\Phi(E)$ of functions with values in a Banach space E over $\mathbb{K}$. Studying the topological dual of $L^\Phi(E)$ we find fundamental differences with respect to the well known results in the archimedean case (see [3], [6], [7]).

In this note we prove that in $L^\Phi(E)$ there is no non-trivial continuous linear functional provided the measure is atomless and Φ verifies the Δ_2-condition. We also give a characterization of the topological dual of L^Φ for atomic σ-finite measures.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva, $(E, \| \|)$ un espacio de Banach sobre un cuerpo valorado no arquimediano completo $(\mathbb{K}, | |)$ cuya valoración $| |$ no sea trivial, y Φ una función de Orlicz, i. e. una función de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ no decreciente con $\Phi(0) = 0$, continua a la izquierda si $s > 0$ y continua en 0. Consideremos el espacio de Orlicz

$$L^\Phi(\Omega, \mu, F) = L^\Phi(E)$$

de las funciones fuertemente medibles f de Ω en E que verifican que

$$\lambda_f(s, \Phi) = \int_\Omega \Phi\left(\frac{\|f\|}{s}\right) d\mu < \infty$$

para algún $s > 0$. El espacio $L^\Phi(E)$ dotado de la F-norma de Orlicz

$$\|f\|_\Phi = \inf. \{s > 0 : \lambda_f(s, \Phi) \leq s\}$$

(*) Presentada en la sesión celebrada el día 20 de mayo de 1981.

es un e. v. t. metrizable completo (F-espacio) que tiene como base de entornos de 0 los conjuntos $V_{r,r}$ con $r > 0$, donde

$$V_{r,r} = \{f \in L^{\Phi}(E) : \lambda_f(r, \Phi) < r\}.$$

Una sucesión (f_n) converge a 0 en $L^{\Phi}(E)$ si y sólo si $\lambda_f(s, \Phi) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para cada $s > 0$. Si Φ verifica la Δ_2-condición (i. e. existe $c > 0$ tal que $\Phi(2s) \leqslant c\,\Phi(s)$ para todo $s > 0$) entonces $\lambda_f(s, \Phi) < \infty$ para todo $s > 0$ siempre que $f \in L^{\Phi}(E)$. Cuando $\Omega = \mathbb{N}$ y μ la medida cardinal tenemos el espacio de Orlicz $l^{\Phi}(E)$, de sucesiones $x = (x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ que verifican que

$$\lambda_x(s, \Phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_n|}{s}\right) < \infty$$

para algún $s > 0$. Si Φ verifica la $\Delta^0{}_2$-condición (i. e. existe $s > 0$ y $c > 0$ tal que $\Phi(2s) < c\,\Phi(s)$ para $0 < s < s_c$) entonces

$$x = (x_n) \in l^{\Phi}(E)$$

si y sólo si $\lambda_x(s, \Phi) < \infty$ para todo $s > 0$. Estos resultados se comprueban de forma análoga al caso arquimediano.

La F-norma $\| \ \|_{\Phi}$ no es en general no-arquimediana, es decir $\| \ \|_{\Phi}$ no verifica la desigualdad triangular fuerte. En efecto, sean A_2, $A_2 \in \Sigma$ con $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ y

$$0 < \mu(A_1) \leq \mu(A_2) < \infty \quad \text{y} \quad x_1, x_2 \in E$$

con $0 < \|x_1\| < \|x_2\|$, considerando las funciones $\Phi(x) = x^p$, $0 < p < \infty$, y

$$f_1 = x_1 \chi_{A_1} + x_2 \chi_{A_2} \quad \text{y} \quad f_2 = x_2 \chi_{A_1} + x_1 \chi_{A_2}$$

se tiene que

$$\|f_1 + f_2\|_{\Phi} > \max\{\|f_1\|_{\Phi}, \|f_2\|_{\Phi}\}$$

Obsérvese también que en el caso de ser Φ convexa $\| \ \|_{\Phi}$ es entonces una A-norma en el sentido de Van Rooij ([8], pág. 88).

Los siguientes resultados sobre dualidad de $L^{\Phi}(E)$ difieren notablemente de los del caso arquimediano (ver [2], [3], [6], [7]). Los espacios l^p sobre un cuerpo no arquimediano han sido estudiados en ([5], pág. 74) para $p \geq 1$ y en ([1]) para $0 < p < \infty$, y los espacios $L^p (\Omega\, \mu)$ en ([8], pág. 89) para $p = 1$ y μ la medida de Lebesgue en $[0, 1]$, y en ([4], pág. 108) para $0 < p < \infty$.

PROPOSICIÓN 1.—*Si Φ verifica la Δ^0_2-condición y $E' \neq \{0\}$ entonces el dual topológico de $l^\Phi(E)$ es isomorfo algebraicamente a $l^\infty(E')$.*

DEMOSTRACIÓN.—Si Φ no es estrictamente positiva i. e. existe $s > 0$ con $\Phi(s) = 0$, l^Φ (E) coincide como e. v. t. con el espacio c_0 (E) de las sucesiones convergentes a 0 en E y entonces el resultado es conocido (Van Rooij [8], pág. 61). Si Φ es estrictamente positiva l^Φ (E) está contenido con continuidad en c_0 (E), luego mediante la identificación usual l^∞ (E′) está contenido en $(l^\Phi (E))'$.

Consideremos ahora la aplicación T de $(l^\Phi (E))'$ en l^∞ (E′) definida por $T(u) = (u \circ j_n)_{n=1}^\infty$ donde j_n denota la aplicación continua de E en l^Φ (E), $j_n(x) = x\, e_n$ siendo (e_n) la sucesión de vectores unidad de $l^\Phi (\mathbb{K})$. Como para cada $x \in E$ la sucesión $(u(x\, e_n))$ está acotada, del principio de acotación uniforme ([8], pág. 65) se sigue que $(u \circ j_n)_{n=1}^\infty$ es acotada en E′ y T está bien definida. Además T es lineal e inyectiva. En efecto, sea $u \in (l^\Phi (E))'$ y $T(u) = 0$, para $x = (x_n) \in l^\Phi (E)$ consideramos $y_m = \sum_{k=1}^{m} x_k\, e_k$, entonces $u(y_m) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, luego como $y_m \longrightarrow y$ en l^Φ (E) se verifica que $u(x) = 0$, es decir $u = 0$. q. e. d.

TEOREMA 2.—*Si Φ verifica la Δ_2-condición y la medida μ no es atómica entonces el dual topológico de $L^\Phi (E)$ es nulo.*

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que existe una forma lineal U no nula sobre L^Φ (E), y sea $f \in L^\Phi$ (E) tal que $U(f) = 1$. Consideremos la medida ν de Σ en $\mathbb{R}^+$ definida por

$$\nu(A) = \lambda_{f\chi_A}(1, \Phi) = \int_A \Phi(\|f\|)\, d\mu .$$

Se tiene que ν es finita y no atómica. En efecto, si $\nu(A) > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_n) > 0$ donde

$$A_n = \{x \in A : \Phi(\|f(x)\|) > 1/n\}.$$

Ahora al ser μ no atómica existe $B \subset A_n$ μ-medible con $\mu(B) =$

$= 1/2\ \mu\,(A_n)$, luego

$$\nu(B) \geq 1/n\,\mu(B) > 0 \quad \text{y} \quad \nu(A_n \setminus B) \geq 1/n\,\mu(A_n \setminus B) > 0$$

y A no es un ν-átomo.

Sea $A \in \Sigma$ tal que $\nu(A) = 1/2\,\nu(\Omega)$, consideremos $f = g + h$ donde $g = f\chi_A$ y $h = f\chi_{\Omega\setminus A}$. En virtud de la propiedad triangular fuerte para la valoración de $\mathbb{K}$ se tiene que

$$1 = |\,U(f)\,| \leq \max.\{\,|\,U(g)\,|\,,\ |\,U(h)\,|\,\},$$

por tanto $|\,U(g)\,| \geqslant 1$ ó $|\,U(h)\,| \geqslant 1$. Designemos por $f_1 = g$ y $A_1 = A$ en el primer caso y $f_1 = h$ y $A_1 = \Omega\setminus A$ en el segundo. Repitiendo el proceso obtenemos por inducción una sucesión de funciones (f_n) de $L^\Phi(E)$ que verifican

$$|\,U(f_n)\,| \geq 1 \quad \text{y} \quad \lambda_{f_n}(1;\Phi) = 2^{-n}\,\lambda_f(1;\Phi)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se concluye entonces, utilizando la Δ_2-condición que $f_n \longrightarrow 0$ en $L^\Phi(E)$, y además $|\,U(f_n)\,| \geqslant 1$ lo que contradice la continuidad de U. q. e. d.

Sea ahora μ atómica. Si denotamos por $\mathcal{H}$ la familia de todos los átomos de medida finita, consideramos en $\mathcal{H}$ la relación de equivalencia $A\,\mathcal{R}\,B$ si y sólo si $\mu(A\,\Delta\,B) = 0$ y designamos por $[A]$ las clases de equivalencia en $\mathcal{H}/\mathcal{R}$. Análogamente al caso arquimediano para cada función medible de Ω en $\mathbb{K}$ y cada $A \in \mathcal{H}$ existe un único $x \in \mathbb{K}$ con $f\chi_A = x\chi_A$ en c. t. p. La aplicación $F_{[A]}$ de $L^\Phi(\mathbb{K}) \equiv L^\Phi$ en $\mathbb{K}$ definida por $F_{[A]}(f) = x$ es una forma lineal y continua de L^Φ.

TEOREMA 3.—*Si Φ verifica la Δ_2-condición y μ es σ-finita atómica entonces para cada $U \in (L^\Phi)'$ existe una sucesión* $(r_k) \subset \mathbb{K}$ *tal que*

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} r_k\,F_{[A_k]}$$

para la $\sigma((L^\Phi)', L^\Phi)$-topología, es decir la sucesión $(F_{[A_k]})_{k=1}^{\infty}$ es una base de Schauder incondicional $*$-débil de $(L^\Phi)'$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $U \in (L^\Phi)'$. En virtud del lema de Saks el espacio Ω admite una descomposición en $B \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ donde B es medible y no atómico y $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ es una colección numerable de átomos de medida finita disjuntos entre sí.

Para $f \in L^{\Phi}$ consideremos la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f \chi_{A_k}.$$

Se tiene que $f_n \longrightarrow (f - f\chi_B) = g$ en L^{Φ}. En efecto, como $f_n(z) \longrightarrow g(z)$ para $z \in \Omega$ y

$$\lambda_{(f_n - g)}(s, \Phi) \leq \lambda_f(s, \Phi) < \infty$$

para $s > 0$, se sigue entonces utilizando el teorema de la convergencia dominada que

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_{(f_n - g)}(s; \Phi) = \int_{\Omega} \lim_{n \to \infty} \Phi\left(\frac{|f_n - g|}{s}\right) d\mu = 0$$

para cada $s > 0$. Luego $f_n \longrightarrow g$ y

$$U(f_n) \to U(f) - U(f\chi_B).$$

Ahora al ser B no atómico del teorema anterior deducimos que $U(f\chi_B) = 0$, y por tanto

$$U(f_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k U(\chi_{A_k}) \to U(f),$$

donde $f\chi_{A_k} \equiv x_k \chi_{A_k}$ para $k \in \mathbb{N}$. Es decir

$$U(f) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k F_{[A_k]}^{*}(f)$$

con $r_k = U(\chi_{A_k})$ para $k \in \mathbb{N}$. Además las formas lineales $F_{[A_k]}^{*}$ de $(L^{\Phi})'$ en $\mathbb{K}$ definidas por $F_{[A_k]}^{*}(U) = U(\chi_{A_k})$ son $\sigma((L^{\Phi})', L^{\Phi})$-continuas. q. e. d.

Como consecuencia de los teoremas anteriores tenemos el siguiente

Corolario 4.—*Si Φ verifica la Δ_2-condición entonces $(L^{\Phi})'$ separa puntos si y sólo si la medida μ es puramente atómica.*

Referencias

[1] BASTERO, J. y MIRA, J. M. (1977). Algunos resultados para los espacios l^p (I), $0 < p < \infty$, sobre un cuerpo valorado no arquimediano. *IV Jorn. Matem. Hisp.-Lus.* (Jaca), 51-60.

[2] HERNÁNDEZ, F. L. Continuous functionals on a class of Orlicz spaces. *Houston Journ. of Math.* (por aparecer).

[3] KRASNOSELSKII, J. y RUTIKII, Y. (1961). Convex functions and Orlicz spaces. *Pub. Noordoff Grtingen.*

[4] MIRA, J. M. (1979). Desigualdades triangulares y el problema de la extensión acotada. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza.

[5] MONNA, A. F. (1970). Analyse non-archimedienne. Springer-Verlag.

[6] MUSIELAK, J. (1977). Modular spaces and Orlicz spaces and their generalizations. *Pub. A. Mickiewicz University* (Poznán).

[7] ROLEWICZ, S. (1972). Metric Linear spaces. *P. W. N.*, *V*arsovia.

[8] VAN ROOIJ, A. C. (1978). Non archimedean Functional Analysis. *Marcel Dekker,* New York.