ESPECTRO E IDEALES PRIMARIOS DEL ALGEBRA C^p_{wb} (E) DE FUNCIONES DEBILMENTE DIFERENCIABLES SOBRE UN ESPACIO DE BANACH (*)

Javier Gómez Gil
Universidad Complutense

Let $C^p_{wb}(E)$ be the space of p-continuously Fréchet differentiable complex functions on a real Banach space E such that the function and its derivatives are weakly continuous on bounded sets. We consider $C^p_{wb}(E)$ endowed with the topology generated by all seminorms of the form:

$$f \in C^p_{wb}(E) \longrightarrow \sup \{ \mid D^j f(x) y \mid : x \in K, \quad y \in K^j, \quad 0 \leq j \leq p \}$$

where K is allowed to range over the $\sigma(E, E')$-compacts subsets of E.

In this note we prove that $C^p_{wb}(E)$ is a locally m-convex regular algebra and its spectrum is identifiable to E. We also see that $C^p_{wb}(E)$ has not spectral synthesis. In this way we give a generalization of Whitney's Theorem under the assumption that E has the bounded weak approximation property.

Denotaremos por E un espacio de Banach real. Si F es un espacio de Banach, $C_{wb}(E, F)$ denotará el espacio de todas las funciones de E en F débilmente continuas sobre los acotados de E. Si $p \geqslant 1$, $P(^pE)$ representará el espacio de los polinomios en E p-homogéneos continuos, dotado de la topología usual de la norma y $P_w(^pE)$ será $P(^pE) \cap C_{wb}(E)$ con la topología inducida por $P(^pE)$. $C^p(E)$ denotará el espacio de las funciones complejas de clase p en sentido de Fréchet.

La topología *bw* en E, es la topología más fina en E que coincide con la débil en los subconjuntos acotados de E [6], [2]. En todo lo referente a álgebras seguiremos [1] (ver también [5]).

Definición 1.—*Si* $p \geqslant 1$, $C^p_{wb}(E)$ *es el espacio de las funciones* $f \in C^p(E)$ *que verifican que para cada* j, $0 \leqslant j \leqslant p$,

$$D^j f \in C^p_{wb}(E, P(^jE)).$$

De la definición sale inmediatamente que para cada $f \in C^p_{wb}(E)$, para cada j, $1 \leqslant j \leqslant p$, y cada $x \in E$, la diferencial

$$D^j f(x) \in P_w(^jE).$$

(*) Presentada en la sesión celebrada el día 20 de mayo de 1981.

Dotamos a C^p_{wb} (E) de la topología inducida por la familia de seminormas

$$f \in C^p_{wb}(E) \longrightarrow p_k(f) = \sup \{ \mid D^j f(x) y \mid : x \in K, \;\; y \in K^j, \;\; 0 \leq j \leq p \}$$

donde K recorre la familia de los subconjuntos débilmente compactos de E.

Aplicando las propiedades de las funciones diferenciables en sentido de Fréchet (ver [8]), se obtiene fácilmente que C^p_{wb} (E) es un álgebra *m*-convexa. Además para cada $x \in$ E, la evaluación en x es un funcional multiplicativo no nulo. Esto nos permite dar el siguiente resultado:

TEOREMA 2.—*C^p_{wb} (E) es un álgebra compleja localmente* m-*convexa con unidad fuertemente semisimple. Además, para cada* f $\in$ *C^p_{wb} (E), el espectro de* f, σ (f), *coincide con su rango.*

Como consecuencia de lo anterior, C^p_{wb} (E) no es una Q-álgebra pues existen elementos con espectro no acotado ([1], pág. 206).

Si K es un subconjunto débilmente compacto de E, definimos C^p_{wb} (K) como el espacio de las funciones de E en $\mathbb{C}$ que coinciden en algún *bw*-abierto que contenga a K con una función de C^p_{wb} (E). Si $f \in C^p_{wb}$ (K), definimos

$$D^j f(x) = D^j g(x) \quad (x \in K, \;\; 1 \leq j \leq p)$$

donde g es una función de C^p_{wb} (E) que coincide con f en un $b\,w$-entorno de K. Es obvio que la definición anterior no depende de g. Dotamos a C^p_{wb} (K) de la topología inducida por la seminorma

$$q_K(f) = \sup \{ \mid D^j f(x) y \mid : x \in K, \;\; y \in K^j, \;\; 0 \leq j \leq p \} \quad (f \in C^p_{wb}(K)).$$

Se comprueba que C^p_{wb} (K) es un álgebra topológica.

LEMA 3.—*Para cada* ϕ, *carácter multiplicativo de* C^p_{wb} *(K), existe un* x $\in$ *K tal que* ϕ (f) = f (x) *para cada* f *de* C^p_{wb} *(K).*

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que para cada $x \in$ K, existe una $f_x \in \ker \phi$, que podemos suponer real y no negativa, tal que f_x (x) $\neq 0$. Por ser K débilmente compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in$ K tales que

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} \{y \in K : f_{x_j}(y) > 0\}.$$

La función

$$f = \sum_{j=1}^{n} f_{x_j},$$

no se anula en K y coincide con una función $g \in C^p_{wb}$ (E) en un *bw*-entorno de K. Esta función g se puede suponer no nula y por tanto inversible. De aquí resultaría que $\phi(f)$ es inversible y sin embargo $\phi(f) = 0$, lo cual es imposible.

TEOREMA 4.—*Para cada forma lineal continua, multiplicativa y no nula, ϕ, sobre el álgebra $C^p_{wb}(E)$, existe un* x $\in$ *E tal que*

$$\phi(f) = f(x) \quad (f \in C^p_{wb}(E)).$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea ϕ un carácter continuo del álgebra. Existe un conjunto débilmente compacto K y existe una constante $M > 0$, tales que

$$|\phi(f)| \leqslant M\, p_K(f) \quad (f \in C^p_{wb}(E)).$$

Definimos $\phi_K(f) = \phi(g)$ para cada $f \in C^p_{wb}(K)$, donde g es una función de C^p_{wb} (E) que coincide con f en un *bw*-entorno de K. Es fácil ver que ϕ_K es un carácter continuo de C^p_{wb} (K) y así por el lema 3, existirá un $x \in$ K tal que ϕ_K es la evaluación en x. De aquí se deduce inmediatamente el resultado.

TEOREMA 5.—*$C^p_{wb}(E)$ es un álgebra regular.*

DEMOSTRACIÓN.—Si f es un cerrado en el espectro del álgebra y $x \notin$ F, existen $f_1, \ldots, f_n \in C^p_{wb}$ (E) tales que si

$$y \in E \text{ con } |f_j(y) - f_j(x)| \leq 1 \quad (1 \leq j \leq n),$$

entonces $y \notin$ F. Basta entonces considerar la función

$$g(y) = \sum_{j=1}^{n} |f_j(y) - f_j(x)|^2$$

para separar x y F.

Si consideramos el ideal

$$I(x) = \{ f \in C^p_{wb}(E) : D^j f(x) = 0 \quad 0 \leq j \leq p \},$$

tenemos que I (x) es un ideal cerrado, que está contenido en un único ideal maximal, el núcleo de la evaluación en x, y si $p \geqslant 1$, es claro que I (x) no es maximal. Esto nos muestra que el álgebra $C^p_{wb}(E)$ no tiene síntesis espectral.

Vamos ahora a pasar a caracterizar, en algunos casos, los ideales cerrados.

LEMA 6.—*Si I es un ideal en $C^p_{wb}(E)$, E_1 un subespacio finito-dimensional de E y R la aplicación restricción de $C^p_{wb}(E)$ en $C^p(E_1)$, entonces la adherencia de $R(I)$ en $C^p(E_1)$ es un ideal.*

Si I es un ideal, denotamos

$$\check{I} = \bigcap \{ I + I(x, K, \varepsilon) : x \in E, \quad K\ \sigma(E, E')\text{-compacto}, \quad \varepsilon > 0 \}$$

donde

$$I(x, K, \varepsilon) = \{ f \in C^p_{wb}(E) : | D^j f(x) y | < \varepsilon, \quad y \in K^j, \quad 0 \leq j \leq p \}$$

LEMA 7.—*En las hipótesis de 6, si* $f \in \check{I}$ *entonces* $R(f) \in \overline{R(I)}$.

DEMOSTRACIÓN.—$R(\check{I}) = R(I)^\vee$ y basta aplicar el lema 6 y el teorema clásico de Whitney ([7], [4]).

DEFINICIÓN 8.—*Un espacio de Banach E se dice que tiene la propiedad de aproximación débil acotada (P. A. D. A.) si para cada compacto débil en E, K, existe una red $(u_i)_{i \in J} \subset E' \otimes E$ que converge débilmente uniformemente a la identidad en K y tal que $\{u_i(x) : i \in J, x \in K\}$ está acotado.*

LEMA 9.—*Sea E un espacio de Banach real con la P. A. D. A. Si* $f \in C^p_{wb}(E)$ *y* $A_f = \{f_0 u : u \in E' \otimes E\}$, *entonces* f *pertenece a la adherencia de A_f en $C^p_{wb}(E)$.*

La demostración de este resultado puede verse en [3].

TEOREMA 10.—*Sea E un espacio de Banach con la P. A. D. A. Si I es un ideal verificando que para cada* $u \in E' \otimes E$, $f \in I$, $f_0 u \in I$ *entonces* $\bar{I} = \check{I}$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $f \in \check{I}$ *y sean K débilmente compacto y* $\varepsilon > 0$. Por el lema 9 existe $u \in E' \otimes E$ tal que

$$p_k(f - f_0 u) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Sea $E_1 = u(E)$ y sea R la aplicación restricción de $C^p{}_{wb}(E)$ en $C^p(E_1)$. Por el lema 7, existe $g \in I$ tal que

$$p_{u(K)}(Rf - Rg) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Además por hipótesis, existe un $h \in I$ tal que

$$p_k(h - g_0 u) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Ahora mediante una sencilla computación se obtiene que

$$p_k(f - h) < \varepsilon.$$

COROLARIO 11.—*Si E es un espacio de Banach con la P. A. D. A., el ideal I* (x) *es el mínimo ideal entre todos los ideales cerrados primarios de* $C^p{}_{wb}(E)$ *contenidos en el ideal maximal*

$$\} f \in C^p{}_{wb}(E) : f(x) = 0 \}.$$

Referencias

[1] BECKENSTEIN, E., NARICI, L. and SUFFEL, C. (1977). Topological Algebras. *Math. Studies*, **24**, North-Holland.

[2] FERRERA, J. (1980). Espacios de funciones débilmente continuas sobre espacios de Banach. Tesis doctoral. Universidad Complutense.

[3] LLAVONA, J. L. G. Sobre la densidad de sub-álgebras polinomiales de funciones débilmente diferenciables. (Por aparecer).

[4] MALGRANGE, B. (1966). Ideals of Differentiable Functions. Oxford.

[5] MICHAEL, E. A. (1952). Locally multiplicatively-convex topological algebras. Memoirs of A. M. S.

[6] WHEELER, R. F. (1972). The equicontinuous weak* topology and semi-reflexivity. *Studia Math.* XLI, pp. 243-256.

[7] WHITNEY, H. (1948). On ideals of differentiable functions. *Amer. Journ. Math.*, **70**, pp. 635-658.
[8] YAMAMURO, S. (1974). Differential Calculus in Topological Linear Spaces. *Lect. Notes in Math.*, **374**, Springer-Verlag.

EL DUAL DE ESPACIOS DE ORLICZ SOBRE CUERPOS NO ARQUIMEDIANOS (*)

Fernanda Fuentes y Francisco L. Hernández
Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense. Madrid-3

Let $\mathbb{K}$ be a complete non-archimedean valued field, (Ω, μ) a positive measure space and Φ an Orlicz function. We consider Orlicz spaces $L^{\Phi}(E)$ of functions with values in a Banach space E over $\mathbb{K}$. Studying the topological dual of $L^{\Phi}(E)$ we find fundamental differences with respect to the well known results in the archimedean case (see [3], [6], [7]).

In this note we prove that in $L^{\Phi}(E)$ there is no non-trivial continuous linear functional provided the measure is atomless and Φ verifies the Δ_2-condition. We also give a characterization of the topological dual of L^{Φ} for atomic σ-finite measures.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida positiva, $(E, \| \|)$ un espacio de Banach sobre un cuerpo valorado no arquimediano completo $(\mathbb{K}, | |)$ cuya valoración $| |$ no sea trivial, y Φ una función de Orlicz, i. e. una función de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ no decreciente con $\Phi(0) = 0$, continua a la izquierda si $s > 0$ y continua en 0. Consideremos el espacio de Orlicz

$$L^{\Phi}(\Omega, \mu, E) = L^{\Phi}(E)$$

de las funciones fuertemente medibles f de Ω en E que verifican que

$$\lambda_f(s, \Phi) = \int_{\Omega} \Phi\left(\frac{\|f\|}{s}\right) d\mu < \infty$$

para algún $s > 0$. El espacio $L^{\Phi}(E)$ dotado de la F-norma de Orlicz

$$\|f\|_{\Phi} = \inf.\{s > 0 : \lambda_f(s, \Phi) \leq s\}$$

(*) Presentada en la sesión celebrada el día 20 de mayo de 1981.