SOBRE LOS ESPACIOS DE BANACH QUE CONTIENEN A l^1 COMO COMPLEMENTADO (*)

Pilar Cembranos (**)
Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense

This paper is devoted to give necessary and sufficient conditions on a Banach space to contain a complemented subspace isomorphic to l^1, in terms of weakly compact operators. From this characterization we can obtain some results about the existence of weakly compact operators defined on C (K, E).

A lo largo de este trabajo E y F serán siempre espacios de Banach, K un compacto Hausdorff y C (K, E) el espacio de las funciones continuas de K en E con la norma del supremo. Denotaremos por c_0, l^1 y l^∞ a los espacios de sucesiones escalares convergentes a cero, absolutamente sumables, y acotadas respectivamente, con sus normas habituales. Un operador entre E y F será una aplicación de E en F lineal y continua. Diremos que $E \supset F$ si existe un subespacio H de E topológicamente isomorfo a F, y si H es complementado en E diremos que $E \supset F$ como complementado. Por B (E) notaremos la bola unidad abierta de E.

A partir de los teoremas 4 de [1] y 2.f.4. de [3] se prueba fácilmente lo siguiente:

1. Proposición.—Son equivalentes:

(a) E contiene a l^1 como complementado.

(b) Existe un operador $T : E \longrightarrow l^1$ no débilmente compacto.

(c) Existe un operador $T : l^\infty \longrightarrow E'$ no débilmente compacto.

Es claro que si F es reflexivo todos los operadores de E en F son débilmente compactos. Veamos que en el caso de que E sea l^1 se da una especie de recíproco:

2. Proposición.—l^1 verifica la siguiente propiedad:

(*) Presentada en la sesión celebrada el día 20 de mayo de 1981.
(**) Agradezco sinceramente a Fernando Bombal su dirección en este trabajo.

Los únicos espacios de Banach F tales que todos los operadores de l^1 en F son débilmente compactos son los reflexivos.

Dem.—Sea F tal que todo operador de l^1 en F es débilmente compacto. Supongamos en primer lugar que F es separable; entonces existe un subespacio cerrado M de l^1 tal que l^1/M es isomorfo a F, sea $\varphi : l^1/M \longrightarrow F$ el isomorfismo. Si $\pi : l^1 \longrightarrow l^1/M$ es la proyección canónica, el operador $T = \varphi \cdot \pi : l^1 \longrightarrow F$ es débilmente compacto, y así $T(B(l^1))$ es débilmente relativamente compacto, con lo cual también lo es

$$B(l^1/M) = \pi(B(l^1)) = \varphi^{-1} \circ T(B(l^1)).$$

Luego F es reflexivo. Si F no es separable basta hacer notar que debido a lo anterior todos sus subespacios cerrados separables son reflexivos, y por tanto F es reflexivo.

Es lógico preguntarse ahora qué otros espacios aparte de l^1 verifican esta misma propiedad, e. d. qué espacios de Banach E verifican:

(*) Los únicos espacios de Banach F tales que todos los operadores de E en F son débilmente compactos son los reflexivos.

Obtenemos el siguiente resultado:

3. Proposición.—Un espacio de Banach E verifica la propiedad (*) si y sólo si E contiene a l^1 como complementado.

Dem.—Si $E \supset l^1$ como complementado y F es tal que todos los operadores de E en F son débilmente compactos, también lo son todos los operadores de l^1 en F; y por la proposición anterior F es reflexivo. Si $E \not\supset l^1$ como complementado entonces, por 1.(b), todos los operadores de E en l^1 son débilmente compactos; y E no verifica (*).

Tratamos ahora de estudiar qué espacios de Banach E verifican que, fijado un compacto K, para cada F no reflexivo existe un operador $T : C(K, E) \longrightarrow F$ no débilmente compacto. La proposición anterior nos indica que son precisamente aquéllos tales que $C(K, E) \supset l^1$ como complementado. En principio la clase de dichos espacios depende del compacto K. Una condición suficiente para que E pertenezca a esas clases es que contenga a l^1 como complementado, y una condición necesaria es que $E \supset l^1$ (ver [2]). Por ello cabe preguntarse si todas las clases coinciden y están formadas exactamente por los espacios que contienen a l^1 como complementado. Veremos que si K es la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, entonces la clase de los Banach es la deseada. Y además que si la respuesta es afirmativa para $K = [0, 1]$, lo es general.

4. TEOREMA.—C ($\mathbb{N}^*$, E) contiene a l^1 como complementado si y sólo si E contiene a l^1 como complementado.

DEM. (1).—Una implicación es trivial. Supongamos que $E \not\supset l^1$ como complementado; entonces, por 1 (b), todos los operadores de E en l^1 son débilmente compactos. Por 21.5.9 de [4] bastará probar que los operadores de c_0 (E) en l^1 son débilmente compactos, siendo c_0 (E) el espacio de las sucesiones convergentes a cero en E con la norma del supremo. Sea T un operador,

$$T : c_0(E) \longrightarrow l^1, \quad \text{y sea} \quad P_m : c_0(E) \longrightarrow c_0(E)$$

la proyección definida por

$$P_m(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots) \quad \forall\, x = (x_n) \in c_0(E), \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

Por la hipótesis $T \circ P_m$ es un operador débilmente compacto $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Así, si tenemos una sucesión acotada

$$(x^n) \quad \text{en} \quad c_0(E) \quad \text{con} \quad x^n = (x_i^n)_{i=1}^{\infty}$$

casi nula para cada $n \in \mathbb{N}$, por un proceso de diagonalización podemos extraer una subsucesión (z^n) tal que

$$(T \circ P_m(z^n))_{n=1}^{\infty}$$

converge débilmente en l^1 $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Si existe $m_0 \in \mathbb{N}$ y existe una subsucesión (z^{n_k}) de (z^n) tal que

$$P_{m_0}(z^{n_k}) = z^{n_k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

entonces $(T(z^{n_k}))$ converge débilmente en l^1. En caso contrario construimos por inducción una subsucesión de (z^n) (que seguimos notando igual) tal que

$$r_m > r_{m-1} \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

(1) Damos sólo un esquema de la demostración.

siendo r_m el menor natural tal que

$$P_{r_m}(z^m) = z^m.$$

Considerando

$$P_0 \equiv 0 \quad y \quad r_0 = 0, \quad si \quad y_n$$

es el límite débil de

$$(T \cdot (P_{r_n} - P_{r_{n-1}})(z^m))_{m=1}^{\infty}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, se comprueba que $\Sigma\, y_n$ es débilmente incondicionalmente de Cauchy en l^1; y como $l^1 \not\supset c_0$, por el teorema 5 de [1] $\Sigma\, y_n$ converge en norma a un cierto $y \in l^1$. Por último solo queda comprobar que $(T(z^n))$ converge débilmente a y. Luego T es débilmente compacto.

5. Proposición.—Si C (K, E) contiene a l^1 como complementado entonces C ([0, 1], E) contiene a l^1 como complementado.

Dem.—Por 1 (b) existe un operador $T: C(K, E) \longrightarrow l^1$ no débilmente compacto. Por un proceso típico podemos construir un compacto metrizable K_0, que es un cociente de K, y un operador $T_0: C(K_0, E) \longrightarrow l^1$ que tampoco es débilmente compacto. Como K_0 es homeomorfo a un subespacio de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, gracias al teorema de Miljutin (21.5.10. de [4]) tenemos que $C(K_0, E)$ es isomorfo a un cociente de C ([0, 1], E); y así existe un operador de C ([0, 1], E) en l^1 no débilmente compacto. Luego C ([0, 1], E) $\supset l^1$ como complementado.

Bibliografía

[1] Bessaga, C. and Pelczyński, A. (1958). On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. *Studia Math.*, **17**, 151-164.

[2] Fierro, C. A result on weakly compact operators in spaces of vector-valued continuous functions. (Por aparecer).

[3] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. (1973). Classical Banach Spaces I, Springer-Verlag.

[4] Semadeni, Z. (1971). Banach spaces of continuous functions. *Warsaw: PWN.*