de la avanzada por nosotros, sólo se deduce el falibilismo inductivo. Si queremos inferir la conclusión escéptica de Hume deberemos añadir una nueva premisa que diga: «Todos los argumentos inválidos son no razonables». La llamaremos tesis del «deductivismo».

TEORIA DE SISTEMAS DE INFINITAS INECUACIONES LINEALES (*) Y PROGRAMACION SEMI-INFINITA

Marco A. López Cerdá

Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Valencia

We generalize some well-known Alternative Theorems for infinite inequality systems in R^n. These theorems allow us the construction of the theory of two person zero-sum semi-infinite games. Finally, we point out other applications to theory of linear inequality systems and to semi-infinite programming.

Introducción

Denotaremos por $\{a'_t x \leqslant \beta_t, t \in T\}$ un sistema infinito lineal en R^n.

Ocasionalmente nos referiremos a elementos del conjunto $R_+^{(T)}$ definido por:

$$R_+^{(T)} = \{\alpha : T \rightarrow R_+ / \operatorname{card} \{t : \alpha(t) > 0\} < \infty\}$$

Dado un conjunto no-vacío C, de R^p, por $\langle C \rangle$ se representará la envoltura convexa de C, por K (C) el cono convexo generado por C, por $\overline{C}$ su clausura, por int (C) su interior, por intr (C) su interior relativo, y por L (C) el subespacio lineal generado por C.

El vector nulo en R^p se denotará 0_p, y la base canónica $\{e^1, e^2, \ldots, e^p\}$.

1. Teoremas de alternativa generalizados

Los teoremas de alternativa que se relacionan en la siguiente tabla establecen la equivalencia entre la proposición I y la negación de la proposición II.

(*) Presentada en la sesión celebrada el día 1 de abril de 1981.

En [9] se prueban estos teoremas mediante las técnicas propias del análisis convexo en R^m. El teorema generalizado de Gale, y un resultado análogo a Farkas, pueden encontrarse en [3].

PROPOSICION I	PROPOSICION II
«FARKAS» $\left\| \begin{array}{ll} a_t' x \leq \beta_t, & t \in T \\ a' x > \beta & \end{array} \right.$ es consistente.	$(a', \beta) \in \overline{K}\}(a_t', \beta_t), \quad t \in T; (0'_n, 1)\}$ ó $(0'_n, -1) \in \overline{K}\}(a_t', \beta_t), \quad t \in T\}$
«GALE» $a_t' x \leq \beta_t, \quad t \in T$ es consistente.	$(0'_n, -1) \in \overline{K}\}(a_t', \beta_t), \quad t \in T\}$
«GORDAN» $a_t' x < 0, \quad t \in T$ es consistente.	$0_n \in \langle\}a_t, \quad t \in T\}\rangle$
(Bajo la hipótesis de que ó $\langle\}a_t, \ t \in T\}\rangle$ ó $K\}a_t, \ t \in T\}$ es cerrado).	
«STIEMKE» $a_t' x \leq 0, \quad t \in T$ tiene una solución x^* tal que $a_t' x^* \neq 0$, para algún t.	$0_n \in \operatorname{intr}\langle\}a_t, \quad t \in T\rangle$
«MANGASARIAN» $a_t' x \leq \beta_t, \quad t \in T$ tiene una solución x^* tal que $a_t' x^* \neq \beta_t$, para algún t.	$(0'_n, -\alpha) \in \operatorname{intr}\langle\}(a_t', \beta_t)\ ' \in T\}\rangle$ para algún $\alpha \geq 0$ ó $(0'_n, -1) \in \overline{K}\}(a_t', \beta_t), \quad t \in T\}$
«MOTZKIN» $\left\| \begin{array}{lll} a_t' x < 0, & t \in T, & T \neq \phi \\ a_s' x \leq 0, & s \in S & \\ a_p' x = 0, & p \in P & \end{array} \right.$	$0_n \in \langle\}a_t, \quad t \in T\}\rangle + K\langle\}a_s, \quad s \in S\}\rangle +$ $+ L\langle\}a_p, \quad p \in P\}\rangle$

es consistente.

(Bajo la hipótesis de que el conjunto considerado en la Prop. II sea cerrado.)

2. Aplicaciones a los juegos semi-infinitos

Un juego semi-infinito bipersonal de suma nula viene definido mediante un conjunto de vectores de R^n, $\{a_t, t \in T\}$. Los espacios de estrategias mixtas de los jugadores I y II son, respectivamente:

$$\Lambda = \left\{\lambda \in R_+^{(T)} : \sum_{t \in T} \lambda_t = 1\right\} \quad \text{e} \quad Y = \left\{y \in R^n : \sum_{i=1}^{n} y_i = 1,\ y_i \geq 0\right\}$$

La función de pago es:

$$P(\lambda, y) = \sum_{t \in T} \lambda_t a_t' y$$

Mediante una sencilla aplicación de Stiemke generalizado, se demuestra en [9] el correspondiente teorema del minimax para este tipo de juegos: «Si v_{II} es finito se cumple $v_I = v_{II}$, y el jugador II tiene estrategias óptimas».

Aplicando Gale generalizado se prueba, en [9], que, para un juego con valor, si el cono

$$K\{(a_t', -1), t \in T; (-e_j', 0), j = 1, \ldots, n\}$$

es cerrado, el jugador I tendrá también estrategias óptimas.

La condición exigida en la última proposición es menos restrictiva que la impuesta en [11].

3. Aplicaciones a la teoría de sistemas de inecuaciones lineales y a la programación semi-infinita

$$(a', \beta) \in \bar{K}\{(a_t', \beta_t),\ t \in T;\ (0_n, +1)\}$$

representa una condición necesaria y suficiente para que la relación $a' x \leqslant \beta$ sea una consecuencia del sistema consistente $\{a'_t x \leqslant \beta_t, t \in T\}$, en el sentido de que se satisface por todas las soluciones del sistema. Por esta razón, el anterior cono cerrado, que representaremos por K_c, será denominado «cono de las relaciones consecuentes» del sistema consistente dado.

El problema de la caracterización de relaciones consecuentes de sistemas infinitos, cuando las funciones involucradas son convexas, ha sido resuelto en [2], de forma análoga, haciendo intervenir las funciones conjugadas de Fenchel.

En [4], [6] y [7] se demuestra que una condición necesaria y suficiente para que el conjunto (no vacío) de soluciones del sistema dado tenga forma poliedral es que K_e sea un cono poliédrico, para lo que basta que $\{(a'_t, \beta_t),\ t \in T\}$ sea un polítopo.

En [5] y [6] se caracterizan los sistemas consistentes de Farkas-Minkowski, que son aquellos que toda relación consecuente lo es de un subsistema finito. Una condición necesaria y suficiente para que se verifique tal propiedad es que

$$K \{ a_t', \beta_t),\quad t \in T;\quad (0_n + 1)\}$$

sea un cono cerrado. Se proponen, adicionalmente, diversas condiciones suficientes alternativas, entre las que se encuentra la de canónicamente cerrado [1].

Farkas permite probar el teorema de Dualidad para los «duales perfectos», introducidos en [10].

Por otra parte la propiedad de Farkas-Minkowski, y sus consecuencias derivadas mediante el uso de los teoremas de alternativa generalizados, interviene en la cualificación de restricciones del problema de Programación Semi-infinita, convexo no-diferenciable, que permite deducir condiciones de optimalidad del tipo de «punto de silla» de la lagrangiana:

$$\Psi(x, \lambda) = \psi(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t(x)$$

con

$$\lambda = (\lambda_t) \in R_+^{(T)},$$

$\psi(x)$ función objetivo y restricciones $f_t(x) \leqslant 0$, $t \in T$. Este último resultado puede encontrarse en [8].

Bibliografía

[1] Charnes, A., Cooper, W. W. and Kortanek, K. O. (1963). Duality in Semi-infinite Programs and some works of Haar and Caratheódory. *Manag. Sc.*, **9**, núm. 2, 209-228.

[2] Chung-Wei Ha. (1979). On Systems of Convex Inequalites. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **68**, 25-34.

[3] FAN, K. (1968). On Infinite Systems of Linear Inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, **21**, 475-478.

[4] GOBERNA, M. A , LÓPEZ, M. A. y PASTOR, J. (1980). Representación finita de sistemas de infinitas inecuaciones. Aceptado para su publicación en *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa.*

[5] GOBERNA, M. A., LÓPEZ, M. A. y PASTOR, J. (1980). Farkas-Minkowski Systems in Semi-infinite Programming. Aceptado para su publicación en *Applied Mathematics and Optimization.*

[6] GOBERNA, M. A., LÓPEZ, M. A. y PASTOR, J. (1980). A New Methodology in the Analysis of Infinite Linear Inequality Systems, with Applications to Semi-infinite Programming. Comunicación presentada al EURO IV. Cambridge (julio 80).

[7] GOBERNA, M A., LÓPEZ, M. A. y PASTOR, J. (1980). Infinite Linear Inequality Systems: Consequence Relations and Consistency. Sometido a *Israel J. Math.*

[8] GOBERNA, M. A., LÓPEZ, M. A. y PASTOR, J. (1981). An Approach to Semi-infinite Programming via Consequence Relations. Comunicación presentada al *International Symposium on Semi-infinite Programming and Applications.* Austin (Texas) (septiembre 81).

[9] GOBERNA, M A., LÓPEZ, M. A., PASTOR, J. y VERCHER, E. (1981). The Alternative Theorems for Infinite Systems with Applications to Semi-infinite Games. Sometido a *Mathematics for Operations Research.*

[10] KORTANEK, K. O. (1977). Constructing a Perfect Duality in Infinite Programming. *Applied Math. and Opt.*, **3**, 357-372.

[11] SOYSTER, A. L. (1975). A Semi-infinite Game. *Manag. Sc.*, **21**, núm. 7, 806-812.

ESTRUCTURA DE LAS ECUACIONES DE EVOLUCION SINGULARES (*)

L. Abellanas

Departamento de Métodos Matemáticos de la Física
Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense

The purpose of this note is to analyse those polynomial conservative evolution equations in two variables which are singular from the view point of conservation laws and infinitesimal Lie-Bäcklund symmetries. More concretely we are interested

(*) Presentada en la sesión celebrada el día 8 de abril de 1981.