SOBRE LA B-COMPLETITUD DE C (K, E)

Antonio Marquina (*)

Recibido: 7 marzo 1979

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

In this paper it is shown that C (K, E) fails to be B-complete (or Ptàk space) for a wide class of B-complete locally convex spaces E, being K any Hausdorff compact space with an infinite number of points.

1 Notación

Todos los espacios topológicos usados aquí serán Hausdorff. Denotaremos por $\mathbb{P}$ el cuerpo de los números reales o complejos. Los espacios vectoriales que utilizaremos estarán definidos sobre el cuerpo $\mathbb{P}$. Si E y F son espacios localmente convexos, entonces se dice que E y F son *topológicamente isomorfos*, si existe un homeomorfismo lineal de E sobre F, denotando dicho concepto por el símbolo $E \simeq F$. Si E es un espacio localmente convexo, decimos que F *contiene una copia de* E, siendo F otro espacio localmente convexo, si F contiene un subespacio topológicamente isomorfo a E. Denotamos por φ el espacio suma topológica directa de una sucesión de espacios localmente convexos $\{E_n : n = 1, 2, \ldots\}$ tal que cada E_n topológicamente isomorfo a $\mathbb{P}$, con su topología usual. Sea I un conjunto de índices infinito. Representamos por $\omega(I)$ el espacio producto topológico de una familia de espacios localmente convexos $\{E_i : i \in I\}$, tal que E_i es topológicamente isomorfo a $\mathbb{P}$ para cada $i \in I$. c_0 representará el espacio de Banach de todas las sucesiones en $\mathbb{P}$ que convergen a cero en $\mathbb{P}$, dotado con la norma supremo.

(*) Dedicado al Profesor M. Valdivia con motivo de su 50 cumpleaños (noviembre 12, 1978) en reconocimiento a su labor y en agradecimiento.

Si E y F son espacios localmente convexos, entonces $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ y $E \hat{\otimes}_\pi F$, representan el ε-producto tensorial y el π-producto tensorial completados, respectivamente. Sea K un espacio topológico compacto infinito. Si E es un espacio localmente convexo, entonces C (K, E) representará al espacio de todas las funciones continuas definidas sobre K, con valores en E, equipado con la topología *compacta-abierta*. Si E es igual a $\mathbb{P}$ escribiremos C (K) en vez de C (K, $\mathbb{P}$). La definición de espacio B-completo y sus propiedades pueden encontrarse en [5] y [9]. Denotamos por $2^{\aleph_0}$, el número cardinal del conjunto de las partes de $\mathbb{N}$, el conjunto de los enteros positivos.

2. Lista de resultados utilizados

Sea E un espacio localmente convexo completo y sea K un espacio compacto infinito arbitrario.

2.1. $c_0 \hat{\otimes}_\varepsilon c_0$ *es topológicamente isomorfo a* c_0 (ver Pelzcyński, [10]).

2.2. *Si* $F = c_0 \hat{\otimes}_\varepsilon E$, *entonces* F *es topológicamente isomorfo a* $c_0 \hat{\otimes}_\varepsilon F$ (2.2 es consecuencia inmediata de 2.1).

2.3. C (K, E) *es topológicamente isomorfo a* C (K) $\hat{\otimes}_\varepsilon$ E (ver Nachbin [8], Grothendieck [4]).

2.4. C (K) *contiene una copia de* c_0 (Pelzcyński [10], Corollary 2).

2.5. *Existe un límite inductivo numerable no-completo de una sucesión de espacios de Banach, cada uno de ellos topológicamente isomorfo a* c_0 (ver Köthe [6], p. 434).

2.6. *Todo subespacio cerrado y todo cociente de un espacio localmente convexo* B*-completo es* B*-completo* (Collins [2], ver también [5], p. 299).

2.7. *Sea I un conjunto de índices cuyo número cardinal es mayor que* $2^{\aleph_0}$. *Sea* F *un espacio de Banach de dimensión infinita. Si* F^I *es el producto de una familia de espacios* $\{E_i : i \in I\}$ *cada* $E_i = F$, *entonces* F^I *contiene una copia de* φ (Saxon [11], Th. 1.4).

Utilizaremos también operaciones con productos tensoriales topológicos, que pueden encontrarse en la tesis de Grothendieck [4].

3. El resultado principal

3.1. TEOREMA.—«*Sea* K *un espacio topológico compacto infinito. Sea* E *un espacio localmente convexo completo tal que* $c_0 \widehat{\otimes}_\varepsilon$ E *contiene una copia de* φ. *Entonces,* C (K, E) *no es* B-*completo.*»

DEMOSTRACIÓN.—Denotamos por $c_0^{(N)}$ la suma topológica directa de una sucesión de espacios de Banach, cada uno de ellos topológicamente isomorfo a c_0. En virtud de 2.5 $c_0^{(N)}$ tiene un cociente no-completo y por lo tanto dicho espacio no será B-completo por 2.6. Probaremos que C (K, E) tiene una copia de $c_0^{(N)}$, con lo que aplicando 2.6 quedará probado el resultado. En efecto, en virtud de 2.4 C (K) contiene una copia de c_0, y puesto que el ε-producto tensorial conserva subespacios se tendrá, por la aplicación de 2.3, que C (K, E) contendrá una copia de $c_0 \widehat{\otimes}_\varepsilon$ E. Es suficiente demostrar, ahora, que $c_0 \widehat{\otimes}_\varepsilon$ E tiene una copia de $c_0^{(N)}$. Denotamos por F el espacio localmente convexo $c_0 \widehat{\otimes}_\varepsilon$ E. A partir de 2.2 se deduce que F es topológicamente isomorfo a $c_0 \widehat{\otimes}_\varepsilon$ F, y puesto que F contiene una copia de φ, por la hipótesis del teorema, resulta que F contendrá una copia de $c_0 \widehat{\otimes}_\varepsilon \varphi$. Puesto que φ es un espacio nuclear localmente convexo se tiene que

$$c_0 \widehat{\otimes}_\varepsilon \varphi \cong c_0 \widehat{\otimes}_\pi \varphi$$

Por otro lado, a partir de un resultado de Grothendieck [4], el π-producto tensorial preserva las sumas directas localmente convexas, por lo que

$$c_0 \widehat{\otimes}_\pi \varphi \simeq c_0^{(N)}$$

ya que $c_0 \times \mathbb{P} \simeq c_0$ (Banach [1]). De esta manera,

$$c_0 \widehat{\otimes}_\varepsilon \varphi \simeq c_0 \widehat{\otimes}_\pi \varphi \simeq c_0^{(N)}$$

y, por lo tanto, F tendrá una copia de $c_0^{(N)}$. Q. E. D.

3.2. COROLARIO.—«*Sea* K *un espacio topológico compacto infi-*

nito. Sea E *un espacio localmente convexo completo. Si* E *contiene una copia de* φ, *entonces* C (K, E) *no es* B-*completo. En particular,* C (K, φ) *no es* B-*completo.*

3.3. Corolario.—«*Sea* K *un espacio topológico compacto infinito. Sea* I *un conjunto de índices cuyo número cardinal es mayor que* $2^{\aleph_0}$. *Entonces,* C (K, ω (I)) *no es* B-*completo.*

Demostración.—Por el 3.1. Teorema, es suficiente comprobar que $c_0 \hat{\otimes}_\varepsilon \omega$ (I) contiene una copia de φ. Puesto que ω (I) es un espacio nuclear se tendrá que

$$c_0 \hat{\otimes}_\varepsilon \omega (I) \simeq c_0 \hat{\otimes}_\pi \omega (I) \simeq c^I_0$$

siendo c^I_0 el producto topológico de I copias de c_0. En virtud de 2.7 se tiene que c^I_0 contiene una copia de φ, y, por lo tanto, $c_0 \hat{\otimes}_\varepsilon \omega$ (I) contendrá una copia de φ. Q. E. D.

4. Observaciones finales

4.1. En la práctica, para comprobar la hipótesis del 3.1.Teorema es necesario conocer la estructura de $c_0 \hat{\otimes}_\varepsilon$ E. Algunas condiciones de tonelación de $c_0 \hat{\otimes}_\varepsilon$ E han sido estudiadas en [7].

4.2. El espacio ω es un ejemplo de un espacio que satisface el Teorema de Krein-Šmulian y para todo espacio compacto infinito K, C (K, φ) no es B-completo.

4.3. La afirmación contenida en 3.3.Corolario puede ser mejorada en el siguiente sentido: Si K e I son como en el mencionado corolario, entonces C (K, ω (I)) no es B_r-completo (ver [5] o [9] para su definición). Para demostrar esto, es suficiente ver que c^I_0 no es B_r-completo. El siguiente argumento que demuestra que c^I_0 no es B_r-completo se debe a M. Valdivia (ver [14]): Puesto que $\varphi \omega \oplus \omega \varphi$ es un espacio nuclear completo que no es B_r-completo (ver [3]) y en virtud de un resultado de M. Valdivia ([13]) dicho espacio se puede sumergir como subespacio de c^I_0, se obtiene que c^I_0 no es B_r-completo, ya que todo subespacio cerrado de un espacio B_r-completo hereda la misma propiedad.

4.4. Bajo las hipótesis del 3.3.Corolario, puesto que ω (I) es hipercompleto (ver [12]) y no satisface el teorema de Krein-Šmulian ([6], p. 268), tendremos que C (K, ω (I)) no es B_r-completo.

Referencias

[1] BANACH, S. (1932). Theorie des Operations Lineaires.

[2] COLLINS, H. S. (1955). Completeness, full completenses and k-spaces. *Proc. A. M. S.*, **6**, 832-835.

[3] EBERHARDT, V. (1975). Einige Vererbbarkeitseigenschaften von B- und B_r-vollständigen Räumen. *Math. Ann.*, **215**, 1-11.

[4] GROTHENDIECK, A. (1955). Produits Tensoriel Topologiques el espaces nucleaires. *Memoirs A. M. S.* Vol. 16.

[5] HORVATH, J. (1966). Topological Vector Spaces and Distributions. Vol. I.

[6] KÖTHE, G. (1966). Topological Vector Spaces I. Springer, Berlín.

[7] MARQUINA, A., SANZ SERNA, J. M. Barrelledness conditions on c_0 (E). *Archiv der Math.* (To appear).

[8] NACHBIN, L. (1967). Elements of approximation theory. *Van Nostrand.* Princeton, NJ.

[9] PTAK, V. (1958). Completeness and the open mapping theorem. *Bull. Soc. Math. France*, **86**, 41-74.

[10] PELCZYNSKY, A. (1960). Projections on certain Banach spaces. *Studia Math.*, **19**, 209-228.

[11] SAXON, S. A. (1972). Nuclear and product spaces, Baire-like spaces, and the strongest locally convex topology. *Math.* Ann.», **197**, 87-106.

[12] SHAVGULIDZE, E. T. (1973). On the hypercompleteness of locally convex spaces. *Math. Notes*, **13**, 180-182.

[13] VALDIVIA, M. (1976-77). Nuclearity and Banach spaces. *Proc. Edimburg Math. Soc.*, **20**, 205-209.

[14] VALDIVIA, M. (1975). On inductive limits of Banach spaces. *Manuscripta Math.*, **15**, 153-163.

Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad de Valencia