FUNCIONES DE BAIRE ASOCIADAS A CIERTAS SUBALGEBRAS DE C(X)

José L. Blasco (*)

Recibido: 10 octubre 1979

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

An algebra on a Tychonoff space X is a subring of C (X) which separates points and closed sets, contains all the real constant functions and is closed under inversion and uniform convergence. In this paper we study the Baire functions associated to an algebra on X. Also, we give some properties of the algebras on X which are of the form C (Y) for some space Y.

Un álgebra sobre un espacio de Tychonoff X es un subanillo de C (X) que separa puntos y cerrados en X, contiene las funciones constantes y es cerrado para inversión y convergencia uniforme. En este artículo estudiamos las funciones de Baire asociadas a un álgebra sobre X, así como las álgebras sobre X que son de la forma C (Y) para algún espacio Y.

1. Notación, definiciones y algunos resultados previos

En este artículo X será un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. Una *base sobre* X es una base de cerrados $\mathfrak{D}$ con las siguientes propiedades (I):

(a) Es cerrada para uniones finitas e intersecciones numerables.

(b) Si $p \in X \sim H$, $H \in \mathfrak{D}$, existe $D \in \mathfrak{D}$ tal que $p \in D$ y $D \cap H = \emptyset$.

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valencia, que dirige el profesor D. Manuel Valdivia Ureña.

(I) Este concepto se debe a Alò y Shapiro [1], quienes usan el término strong delta normal base. Otro concepto equivalente es el de separating nest generated intersection ring debido a E. F. Steiner [17].

(c) Si D_1 y D_2 son elementos disjuntos de $\mathfrak{D}$, existen E_1 y E_2 en $\mathfrak{D}$ tales que $D_i \cap E_i = \emptyset$ y $X = E_1 \cup E_2$.

(d) Para cada $D \in \mathfrak{D}$ existe una sucesión $\{E_n : n \in N\}$ en $\mathfrak{D}$ tal que $D = \cap \{X \sim E_n : n \in N\}$.

Escribiremos $\mathcal{L}(X)$ para la familia de todas las bases sobre X y C (X) para el anillo de las funciones reales continuas en X. Un conjunto cero es un conjunto de la forma $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$, $f \in C(X)$. La familia de todos los conjuntos cero en X vendrá denotada por Z (X). Es bien conocido que Z (X) es una base sobre X.

Sea $\mathfrak{D} \in \mathcal{L}(X)$ y sea $\sigma(\mathfrak{D})$ la mínima σ-álgebra en X que contiene a $\mathfrak{D}$. Denotamos por $X'_{\mathfrak{D}}$ al conjunto X provisto de la topología para la cual una base de cerrados es $\sigma(\mathfrak{D})$.

1.1. Proposición.—*Un subconjunto B de X es cerrado en $X'_{\mathfrak{D}}$ si y sólo si es $\mathfrak{D}$-cerrado* (II).

Demostración.—La suficiencia de la condición es una consecuencia inmediata de que $\mathfrak{D} \subset \sigma(\mathfrak{D})$. Veamos la necesidad. Sea $\mathcal{V}$ la familia de los conjuntos $M \in \sigma(\mathfrak{D})$ tales que $M = \cup \{D \in \mathfrak{D} : D \subset M\}$ y $X \sim M = \cup \{D \in \mathfrak{D} : D \cap M = \emptyset\}$. Entonces se comprueba fácilmente que $\mathcal{V}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathfrak{D}$. Por lo tanto $\mathcal{V} = \sigma(\mathfrak{D})$. Sea ahora B un conjunto cerrado en $X'_{\mathfrak{D}}$ y sea $p \in X \sim B$. Entonces existe $E \in \sigma(\mathfrak{D})$ tal que $p \in X \sim E$, $B \subset E$. Puesto que $E \in \mathcal{V}$, existe $D \in \mathfrak{D}$ de modo que $p \in D \subset X \sim E$. De esta forma $D \cap B = \emptyset$ y por lo tanto B es $\mathfrak{D}$-cerrado.

Es claro que la identidad de $X'_{\mathfrak{D}}$ sobre X es continua. Además, puesto que toda base sobre X es una subfamilia de Z (X) ([2], corolario 2.2), se tiene que la identidad de $X'_{Z(X)}$ sobre $X'_{\mathfrak{D}}$ es continua. Lo que vamos a ver a continuación es que la topología del espacio $X'_{\mathfrak{D}}$ es independiente de la base considerada.

1.2. Proposición.—*Si $\mathfrak{D} \in \mathcal{L}(X)$, la identidad de $X'_{Z(X)}$ sobre $X'_{\mathfrak{D}}$ es un homeomorfismo.*

Demostración.—Puesto que $\mathfrak{D}$ es una base sobre X, si $Z \in Z(X)$ entonces $X \sim Z$ es un conjunto $\mathfrak{D}$-cerrado. Entonces por el resul-

(II) Un subconjunto M de X se dice que es $\mathfrak{D}$-cerrado si cuando $x \in X \sim M$ existe $D \in \mathfrak{D}$ tal que $x \in D \subset X \sim M$. Este concepto es una pequeña modificación del concepto de conjunto Q-cerrado debido a Mrówka [15].

tado anterior, los conjuntos cero en X son a la vez abiertos y cerrados en $X'_{\mathfrak{D}}$. Por lo tanto la identidad de $X'_{\mathfrak{D}}$ sobre $X'_{Z(X)}$ es continua.

Según el resultado anterior, y por brevedad, escribiremos X′ en lugar de $X'_{\mathfrak{D}}$. Es fácil comprobar que todo conjunto G_δ en X′ es abierto. Luego X′ es un P-espacio completamente regular. Más aún, si $\mathcal{T}$ es una topología de P-espacio sobre X más fina que la dada, es claro que todo conjunto $Z \in Z(X)$ es $\mathcal{T}$-abierto. Por lo tanto:

1.3. PROPOSICIÓN.—*La topología de X′ es la mínima topología de P-espacio sobre el conjunto X que contiene a la dada. Un punto* $z \in X'$ *es aislado si y sólo si* $\{z\}$ *es un conjunto* G_δ *en X.*

NOTA.—La caracterización anterior de los puntos aislados de X′, permite una rápida y fácil construcción de una amplia clase de P-espacios completamente regulares sin puntos aislados (comparar con 13.P de [6]). Si Y es un espacio de Hausdorff completamente regular con más de un punto y X es el producto de una familia no numerable de copias de Y, entonces X′ es un P-espacio sin puntos aislados.

Usualmente se denomina a $\sigma(Z(X))$ la σ-álgebra de los conjuntos de Baire en X [12]. Si $\mathfrak{D} \in \mathcal{L}(X)$, llamaremos a $\sigma(\mathfrak{D})$ la σ-álgebra de los conjuntos de Baire asociados a $\mathfrak{D}$.

2. Conjuntos de Baire en $v(X, \mathfrak{D})$

Para cada base $\mathfrak{D}$ sobre X consideraremos la compactación de tipo Wallman $\omega(X, \mathfrak{D})$ y la realcompactación de tipo Wallman $\upsilon(X, \mathfrak{D})$ asociadas a $\mathfrak{D}$. Dicha compactación está constituida por la familia $\omega(X, \mathfrak{D})$ de todos los $\mathfrak{D}$-ultrafiltros, provista de la topología para la cual una base de cerrados es la colección de todos los conjuntos de la forma $\{\mathcal{U} \in \omega(X, \mathfrak{D}) : D \in \mathcal{U}\}$, $D \in \mathfrak{D}$. La realcompactación $\upsilon(X, \mathfrak{D})$ es el subespacio de $\omega(X, \mathfrak{D})$ formado por los $\mathfrak{D}$-ultrafiltros cerrados para intersecciones numerables. Para la construcción y propiedades de estos espacios de ultrafiltros ver [1], [18] y [19]. Escribiremos βX (resp. υX) para la compactación de Stone-Čech (resp. realcompactación de Hewitt) de X. Es bien conocido que $\beta X = \omega(X, Z(X))$ y $\upsilon X = \upsilon(X, Z(X))$ (III).

(III) Dos extensiones E_1 y E_2 de X se dice que son equivalentes si existe un

Los puntos de $\omega(X, \mathcal{D})$ vendrán denotados por $p, q, \ldots$ y el $\mathcal{D}$-ultrafiltro que representan por $\mathcal{U}_p, \mathcal{U}_q, \ldots$ Escribiremos $cl_{\upsilon(X,\mathcal{D})} H$ para la clausura de H en $\upsilon(X, \mathcal{D})$, y cuando no haya lugar a confusión, $cl_\upsilon H$ simplemente.

La familia $\mathcal{D}^\upsilon = \{cl_\upsilon D : D \in \mathcal{D}\}$ es una base sobre $\upsilon(X, \mathcal{D})$ ([2], corolario 3.4), por lo tanto los elementos de $\mathcal{D}^\upsilon$ son conjuntos cero en $\upsilon(X, \mathcal{D})$. El objetivo de esta sección es poner de manifiesto la íntima relación existente entre $\sigma(\mathcal{D})$ y los conjuntos de Baire en $\upsilon(X, \mathcal{D})$ asociados a $\mathcal{D}^\upsilon$.

2.1. LEMA.—*Si $H \in \sigma(\mathcal{D})$ y χ_H es la función característica del conjunto H, entonces para todo $p \in \upsilon(X, \mathcal{D})$ existe $\lim \chi_H(\mathcal{U}_p)$.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $p \in \upsilon(X, \mathcal{D})$. Es claro que existe $\lim \chi_H(\mathcal{U}_p)$ si y sólo si existe un $D \in \mathcal{U}_p$ tal que $D \subset H$ o $D \cap H = \emptyset$. Si $\mathcal{N} = \{G \in \sigma(\mathcal{D}) :$ para todo $q \in \upsilon(X, \mathcal{D})$ existe $\lim \chi_G(\mathcal{U}_q)\}$, se tiene que $\mathcal{D} \subset \mathcal{N} \subset \sigma(\mathcal{D})$. Por mera comprobación se llega a que $\mathcal{N}$ es una σ-álgebra y de esta forma, $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{D})$.

En la demostración del resultado siguiente usaremos una técnica análoga a la de la proposición 3.2 de [14].

2.2. TEOREMA. — *Para cada $B \in \sigma(\mathcal{D})$, sea $B^* = \bigcup \{cl_\upsilon D : D \in \mathcal{D}, D \subset B\}$. Entonces la familia $\{B^* : B \in \sigma(\mathcal{D})\}$ coincide con la σ-álgebra $\sigma(\mathcal{D}^\upsilon)$ de los conjuntos de Baire asociados a $\mathcal{D}^\upsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. — Veamos en primer lugar que $\mathcal{V} = \{B^* : B \in \sigma(\mathcal{D})\}$ es una σ-álgebra en $\upsilon(X, \mathcal{D})$ que contiene a $\mathcal{D}^\upsilon$. En efecto, como $D^* = cl_\upsilon D$ se sigue que $\mathcal{D}^\upsilon \subset \mathcal{V}$. Si $B_n \in \sigma(\mathcal{D})$, $n = 1, 2, \ldots$, es claro que $(\bigcap \{B_n : n \in N\})^* \subset \bigcap \{B_n^* : n \in N\}$. Supongamos ahora que $p \in B_n^*$, $n = 1, 2, \ldots$ Para cada $n \in N$, existe $D_n \in \mathcal{D}$ tal que $D_n \subset B_n$ y $D_n \in \mathcal{U}_p$. Como $\mathcal{U}_p$ es cerrado para intersecciones numerables, se sigue que $D = \bigcap \{D_n : n \in N\} \in \mathcal{U}_p$. Entonces $D \subset \bigcap \{B_n : n \in N\}$ y $p \in cl_\upsilon D$. Por lo tanto $p \in (\bigcap \{B_n : n \in N\})^*$. Luego $(\bigcap \{B_n : n \in N\})^* = \bigcap \{B_n^* : n \in N\}$.

Veamos ahora que dado $B \in \sigma(\mathcal{D})$ se verifica $(X \sim B)^* = \upsilon(X, \mathcal{D}) \sim B^*$. Sea $p \in \upsilon(X, \mathcal{D})$ y χ_B la función característica de B. Por el lema anterior, sabemos que existe $\lim \chi_B(\mathcal{U}_p)$. Eso quiere decir que existe un $Z \in \mathcal{U}_p$ tal que $Z \subset B$ o $Z \cap B = \emptyset$.

homeomorfismo de E_1 sobre E_2 cuya restricción a X es la identidad. En ese caso escribiremos $E_1 = E_2$.

Por lo tanto p pertenece a uno y a uno sólo de los conjuntos B^* y $(X \sim B)^*$. De esta forma, $\mathcal{V}$ es una σ-álgebra en $\upsilon(X, \mathcal{D})$ que contiene a $\mathcal{D}^\upsilon$, luego $\sigma(\mathcal{D}^\upsilon) \subset \mathcal{V}$.

Si $\mathcal{H} = \{B \in \sigma(\mathcal{D}) : B^* \in \sigma(\mathcal{D}^\upsilon)\}$, de las propiedades de $\mathcal{V}$ se deduce claramente que $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{D}$. Luego $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{D})$ y por lo tanto $\mathcal{V} = \sigma(\mathcal{D}^\upsilon)$.

2.3. COROLARIO.—*Si* $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(X)$, *entonces* $\sigma(\mathcal{D}) = \{H \cap X : : H \in \sigma(\mathcal{D}^\upsilon)\}$.

Como consecuencia del resultado anterior y de que todo conjunto cero en $\upsilon(X, \mathcal{D})$ tiene intersección no vacía con X ([2], teorema 3.1), se deduce el siguiente:

2.4. COROLARIO.—*X' es un subespacio denso de $\upsilon(X, \mathcal{D})'$.*

3. Una representación del espacio $\upsilon(X, \mathcal{D})'$

El principal resultado que vamos a obtener en esta sección es la representación del espacio $\upsilon(X, \mathcal{D})'$ como la realcompactación de tipo Wallman asociada a la base $\sigma(\mathcal{D})$ sobre X'. Como veremos después este resultado tiene interesantes consecuencias. En primer lugar probaremos tres lemas.

3.1. LEMA.—*Sea* $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(X)$. *Entonces:*

(a) *Si* $p \in \upsilon(X, \mathcal{D})$, *la familia* $\mathcal{W} = \{G \in \sigma(\mathcal{D}) : G$ *contiene un elemento de* $\mathcal{U}_p\}$ *es un* $\sigma(\mathcal{D})$*-ultrafiltro cerrado para intersecciones numerables.*

(b) *Si* $\mathcal{V}$ *es un* $\sigma(\mathcal{D})$*-ultrafiltro cerrado para intersecciones numerables, entonces* $\mathcal{V} \cap \mathcal{D}$ *es un* $\mathcal{D}$*-ultrafiltro.*

DEMOSTRACIÓN.—Es claro que $\mathcal{W}$ es un $\sigma(\mathcal{D})$-filtro cerrado para intersecciones numerables, luego únicamente queda probar que es un $\sigma(\mathcal{D})$-ultrafiltro. Sea $F \in \sigma(\mathcal{D})$. Como $\upsilon(X, \mathcal{D}) \sim F^* = (X \sim F)^*$, se tiene que $p \in F^*$ o bien $p \in (X \sim F)^*$. En el primer caso existe un $D \in \mathcal{D}$ tal que $D \subset F$ y $p \in cl_\upsilon D$. Por lo tanto $D \in \mathcal{U}_p$ y consecuentemente $F \in \mathcal{W}$. Si $p \in (X \sim F)^*$, existe $D' \in \mathcal{D}$ tal que $D' \subset X \sim F$ y $D' \in \mathcal{U}_p$. Entonces $\mathcal{W}$ es maximal.

(b) Obviamente $\mathcal{V} \cap \mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-filtro. Veamos que es un $\mathcal{D}$-ultrafiltro. Si $D \in \mathcal{D}$, entonces $D \in \mathcal{V}$ o $X \sim D \in \mathcal{V}$. En el primer caso $D \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}$. Si $X \sim D \in \mathcal{V}$, puesto que

$$X \sim D = \bigcup \{D_n : n \in N\}, \; D_n \in \mathcal{D},$$

existe un $n_0 \in N$ de modo que $D_{n_0} \in \mathcal{V}$ (ya que $\mathcal{V}$ es cerrado para intersecciones numerables). Entonces

$$D_{n_0} \cap D = \emptyset \quad \text{y} \quad D_{n_0} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}.$$

Luego $\mathcal{V} \cap \mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-ultrafiltro, además $\mathcal{V}$ es el único $\sigma(\mathcal{D})$-ultrafiltro cerrado para intersecciones numerables que lo contiene.

3.2. LEMA.—*Si* $Z \in Z(\upsilon(X, \mathcal{D}))$, *entonces* $Z = cl_\upsilon(Z \cap X)$.

DEMOSTRACIÓN.—Claramente $cl_\upsilon(Z \cap X) \subset Z$. Supongamos ahora que $p \in Z \sim cl_\upsilon(Z \cap X)$. Entonces existe un entorno Z' de p, $Z' \in Z(\upsilon(X, \mathcal{D}))$ tal que $Z' \cap (Z \cap X) = \emptyset$. Pero en ese caso $Z \cap Z'$ es un conjunto cero, no vacío, en $\upsilon(X, \mathcal{D})$ que no corta a X, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $Z = cl_\upsilon(Z \cap X)$.

3.3. LEMA.—*Si* $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(X)$ *y* $B \in \sigma(\mathcal{D})$, *entonces*

$$B^* = cl_{\upsilon(X, \mathcal{D})'} B.$$

DEMOSTRACIÓN.—Veamos en primer lugar que si $D \in \mathcal{D}$,

$$cl_{\upsilon(X, \mathcal{D})} D = cl_{\upsilon(X, \mathcal{D})'} D.$$

Una de las inclusiones es obvia. Veamos la otra. Si $p \in \upsilon(X, \mathcal{D})'$ no pertenece a $cl_{\upsilon(X, \mathcal{D})'} D$, por la proposición 1.1 aplicada al espacio $\upsilon(X, \mathcal{D})$, existe $Z \in \mathcal{D}^\upsilon$ tal que $p \in Z$ y $Z \cap D = \emptyset$. Por el lema 3.2, $Z = cl_{\upsilon(X, \mathcal{D})}(Z \cap X)$ y por la definición de $\mathcal{D}^\upsilon$, $Z \cap X \in \mathcal{D}$. Por lo tanto, $Z \cap X \in \mathcal{U}_p$. Como $Z \cap cl_{\upsilon(X, \mathcal{D})} D = \emptyset$, se tiene que $p \notin cl_{\upsilon(X, \mathcal{D})} D$.

Supongamos ahora que $B \in \sigma(\mathcal{D})$. Como $B^* \in \sigma(\mathcal{D}^\upsilon)$, resulta que B^* es un conjunto cerrado en $\upsilon(X, \mathcal{D})'$ y por lo tanto

$$cl_{\upsilon(X, \mathcal{D})'} B \subset B^*.$$

Si $p \in B^*$, existe un $D \in \mathcal{D}$ tal que $p \in cl_{\upsilon(X, \mathcal{D})} D$ y $D \subset B$. Entonces $p \in cl_{(X, \mathcal{D})'} D \subset cl_{\upsilon(X, \mathcal{D})'} B$ y queda completa la prueba.

Para la demostración del principal resultado necesitamos el siguiente teorema sobre extensión de aplicaciones ([4], teorema 2.3):

3.4. TEOREMA.—*Sean T e Y dos espacios de Hausdorff completamente regulares. Sea Z un subespacio denso de T y* ξ *una base* *sobre Y. Una función continua* $\varphi : Z \longrightarrow Y$ *se puede extender continuamente a una función* $\bar{\varphi} : T \longrightarrow \upsilon (Y, \xi)$ *si y sólo si cuando* $\{E_n : n \in N\}$ *es una sucesión de conjuntos de* ξ *tales que* $\bigcap \{E_n : n \in N\} = \emptyset$, *entonces*

$$\bigcap \{ cl_T \, \varphi^{-1} (E_n) : n \in N \} = \emptyset.$$

3.5. TEOREMA.—*Si* $\mathcal{D} \in \mathcal{L} (X)$, *entonces*

$$v (X, \mathcal{D})' = v (X', \sigma (\mathcal{D})).$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea φ la identidad de $X' \subset \upsilon (X, \mathcal{D})'$ sobre $X' \subset \upsilon (X', \sigma (\mathcal{D}))$. Si

$$B_n \in \sigma (\mathcal{D}), \; n = 1, 2, \ldots \quad \text{y} \quad \bigcap \{ B_n : n \in N \} = \emptyset,$$

sabemos que

$$\bigcap \{ B^*_n : n \in N \} = (\bigcap \{ B_n : n \in N \})^* = \emptyset.$$

Por el lema 3.3 se tiene entonces que

$$\bigcap \{ cl_{\upsilon (X, \mathcal{D})'} \, \varphi^{-1} (B_n) : n \in N \} = \emptyset.$$

Aplicando el teorema 3.4, φ se extiende a una aplicación continua

$$\psi : v (X, \mathcal{D})' \longrightarrow v (X', \sigma (\mathcal{D})).$$

Veamos que ψ es una biyección. Si p y q son puntos distintos de $\upsilon (X, \mathcal{D})'$, existen D_1, D_2 en $\mathcal{D}$ tales que

$$p \in cl_{\upsilon (X, \mathcal{D})} D_1, \quad q \in cl_{\upsilon (X, \mathcal{D})} D_2 \quad \text{y} \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

Como

$$cl_{\upsilon (X, \mathcal{D})} D_1 = cl_{\upsilon (X, \mathcal{D})'} D_1$$

y ψ es continua, se sigue que

$$\psi (p) \in cl_{\upsilon (X', \sigma (\mathcal{D}))} D_1.$$

De la misma forma

$$\psi (q) \in cl_{\upsilon (X', \sigma (\mathcal{D}))} D_2.$$

Por otra parte, como $D_i \in \sigma(\mathfrak{D})$, se tiene que

$$\mathrm{cl}_{\upsilon(X', \sigma(\mathfrak{D}))} D_1 \cap \mathrm{cl}_{\upsilon(X', \sigma(\mathfrak{D}))} D_2 = \emptyset.$$

Por lo tanto $\psi(p) \neq \psi(q)$.

Sea ahora $p \in \upsilon(X', \sigma(\mathfrak{D}))$. Por el lema 3.1 $\mathcal{U}_p \cap \mathfrak{D}$ es un $\mathfrak{D}$-ultrafiltro cerrado para intersecciones numerables, luego existe $q \in \upsilon(X, \mathfrak{D})$ tal que

$$\mathcal{U}_p \cap \mathfrak{D} = \{ D \in \mathfrak{D} : D \in \mathcal{U}_q \}.$$

Como $q \in \mathrm{cl}_{\upsilon(X, \mathfrak{D})} D$ para todo $D \in \mathcal{U}_p \cap \mathfrak{D}$, se tiene que

$$\psi(q) \in \cap \{ \mathrm{cl}_{\upsilon(X', \sigma(\mathfrak{D}))} D : D \in \mathcal{U}_p \cap \mathfrak{D} \}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{U}_p \cap \mathfrak{D} \subset \mathcal{U}_{\psi(q)}$. Pero puesto que $\mathcal{U}_p$ es el único $\sigma(\mathfrak{D})$-ultrafiltro cerrado para intersecciones numerables que contiene a $\mathcal{U}_p \cap \mathfrak{D}$, se deduce que $\mathcal{U}_{\psi(q)} = \mathcal{U}_p$. Entonces $p = \psi(q)$ y ψ es sobreyectiva.

Finalmente, por el teorema 3.4 se tiene que la identidad de $X' \subset \upsilon(X', \sigma(\mathfrak{D}))$ sobre $X' \subset \upsilon(\upsilon(X, \mathfrak{D})', \sigma(\mathfrak{D}^\upsilon))$ se extiende a una aplicación continua

$$\delta : \upsilon(X', \sigma(\mathfrak{D})) \longrightarrow \upsilon(\upsilon(X, \mathfrak{D})', \sigma(\mathfrak{D}^\upsilon)).$$

Aplicando el lema 3.1 a $\mathfrak{D}^\upsilon$ se tiene que

$$\upsilon(X, \mathfrak{D})' = \upsilon(\upsilon(X, \mathfrak{D})', \sigma(\mathfrak{D}^\upsilon)).$$

Entonces $\delta = \psi^{-1}$ y ψ es un homeomorfismo cuya restricción a X es la identidad.

3.6. Corolario.—*Si $\mathfrak{D} \in \mathcal{L}(X)$, entonces $X = \upsilon(X, \mathfrak{D})$ si y sólo si $X' = \upsilon(X', \sigma(\mathfrak{D}))$.*

Entonces si X es un espacio realcompacto, también lo es X'. Sin embargo, X' puede ser realcompacto sin serlo X. Consideremos un espacio X de cardinal no medible que verifique el primer axioma de numerabilidad. Entonces por la proposición 1.3, X' es un espacio discreto realcompacto.

3.7. Corolario (Hewitt [12], Hayes [11], Morán [14], Gordón [7], Frolík [5]).—*Un espacio X es realcompacto si y sólo si todo $\sigma(Z(X))$-ultrafiltro cerrado para intersecciones numerables es fijo.*

NOTA.—Del corolario 3.6 se deduce inmediatamente que todo espacio realcompacto, cero-dimensional, en el que todos los conjuntos cero son conjuntos de Baire asociados a la familia de los conjuntos a la vez abiertos y cerrados, es N-compacto [16].

4. Algebras completas

Un álgebra sobre X es un subanillo de C (X) que contiene las funciones constantes, separa puntos y cerrados en X y es cerrado para inversión y convergencia uniforme. Si A es un álgebra sobre X, escribiremos Z (A) para el conjunto $\{Z(f) : f \in A\}$. Como ha sido probado en [19] la correspondencia $A \longrightarrow Z(A)$ es una biyección entre la familia de todas las álgebras sobre X y $\mathcal{L}$ (X). Esta relación es de gran importancia ya que los resultados sobre los espacios $\omega(X, \mathfrak{D})$ y $\upsilon(X, \mathfrak{D})$ son equivalentes a otros sobre ciertos espacios de ideales maximales.

En la familia de todas las álgebras sobre X podemos considerar dos clases, la de aquellas álgebras que son isomorfas a un anillo de la forma C (Y) y la de las álgebras que no poseen esa propiedad. A las álgebras de la primera clase las llamaremos *completas*. Por ejemplo, si υX es un espacio de Lindelöf se tiene que toda álgebra sobre X es completa ([8], 4.4). Sin embargo, tanto el álgebra de las funciones medibles Lebesgue en la recta real R, como el álgebra de las funciones medibles Borel de un espacio vectorial topológico metrizable de cardinal no medible, no son completas ([3], teorema 6).

El estudio de las álgebras sobre un espacio se reduce al estudio de las bases sobre el mismo, gracias a la biyección existente entre álgebras y bases. Es lógico pensar que las bases cuya álgebra asociadas es completa tengan ciertas propiedades especiales. Esta clase de bases, llamadas completas, ha sido estudiada por el autor en [3]. Si $\mathfrak{D}$ es una base sobre X, la familia

$$\hat{\mathfrak{D}} = \{ Z \cap X : Z \in Z(\upsilon(X, \mathfrak{D})) \}$$

también es una base sobre X que contiene a $\mathfrak{D}$. Se dice que la base $\mathfrak{D}$ es completa si $\mathfrak{D} = \hat{\mathfrak{D}}$. En general Z (X) es una base completa, mientras que la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de la recta es una base no completa sobre el espacio discreto R. Algunas de las propiedades más interesantes son las siguientes ([3], [4]):

BC1. *$\hat{\mathfrak{D}}$ es la mayor base sobre X tal que*

$$v(X, \hat{\mathfrak{D}}) = v(X, \mathfrak{D})$$

y la menor base completa que contiene a $\mathfrak{D}$.

BC2. *Un álgebra A sobre X es completa si y sólo si Z (A) es una base completa.*

BC3. *Sea $\mathfrak{D}_*$ la familia de los conjuntos cero en X tales que*

$$cl_{v(X, \mathfrak{D})} Z = \bigcup \{ cl_{v(X, \mathfrak{D})} D : D \in \mathfrak{D},\ D \subset Z \}.$$

Si $f \in C(X)$ sea $\Omega(f)$ la familia de todos los conjuntos de la forma $f^{-1}(C)$, donde C es un conjunto cerrado en R. Entonces

$$\hat{\mathfrak{D}} = \bigcup \{ \Omega(f) : f \in C(X) \quad \text{y} \quad \Omega(f) \subset \mathfrak{D}_* \}.$$

4.1. TEOREMA.—*Si A es un álgebra sobre X, entonces*

$$\hat{A} = \{ g/_X : g \in C(v(X, Z(A))) \}$$

es la mínima álgebra completa que contiene a A.

DEMOSTRACIÓN.—Que $\hat{A}$ es un álgebra sobre X es consecuencia de que todo conjunto cero en $v(X, Z(A))$ tiene intersección no vacía con X. Por otra parte, puesto que

$$Z(\hat{A}) = \{ Z \cap X : Z \in Z(v(X, Z(A))) \} = \widehat{Z(A)},$$

se deduce que $\hat{A}$ es un álgebra completa por BC2. De BC1 se sigue que $\hat{A}$ es la mínima álgebra completa que contiene a A.

De BC3 se obtiene la siguiente expresión de la completación de un álgebra.

4.2. TEOREMA.—*Si A es un álgebra sobre X, entonces*

$$\hat{A} = \{ f \in C(X) : \Omega(f) \subset Z(A)_* \}.$$

5. Funciones de Baire asociadas a un álgebra

Sea L un álgebra sobre X. Sea $\mathcal{B}$ (L) el mínimo subanillo de R^{X} que contiene a L y es sucesionalmente cerrado en la topología de la convergencia puntual en X. A las funciones de $\mathcal{B}$ (L) las llamaremos funciones de Baire asociadas al álgebra L. El anillo $\mathcal{B}$ (L) coincide con la familia de las funciones reales σ (Z (L))-medibles [10], [13]. De las propiedades usuales de las funciones medibles se deduce entonces que $\mathcal{B}$ (L) es un álgebra sobre el espacio X′ y $\mathrm{Z}\,(\mathcal{B}\,(\mathrm{L})) = \sigma\,(\mathrm{Z}\,(\mathrm{L}))$.

En general $\mathrm{L} \subset \{f \in \mathrm{R}^{\mathrm{X}} : \Omega\,(f) \subset \mathrm{Z}\,(\mathrm{L})\}$ (IV), y por el teorema 3.4 toda función f de L se puede extender a una función continua f^{υ} en $\upsilon\,(\mathrm{X}, \mathrm{Z}\,(\mathrm{L}))$. Escribiremos L^{υ} para el conjunto $\{f^{\upsilon} : f \in \mathrm{L}\}$. Nótese que $\mathrm{Z}\,(\mathrm{L}^{\upsilon}) = \mathrm{Z}\,(\mathrm{L})^{\upsilon}$.

5.1. Proposición.—*Sea A un álgebra sobre X. Entonces las álgebras* $\mathcal{B}\,(A)^{\upsilon}$ *y* $\mathcal{B}\,(A^{\upsilon})$ *son iguales.*

Demostración.—Según acabamos de ver, $\mathcal{B}$ (A) es un álgebra sobre X′, por lo tanto $\mathcal{B}\,(\mathrm{A})^{\upsilon}$ es un álgebra sobre $\upsilon\,(\mathrm{X}', \sigma\,(\mathrm{Z}\,(\mathrm{A})))$. Pero $\upsilon\,(\mathrm{X}', \sigma\,(\mathrm{Z}\,(\mathrm{A}))) = \upsilon\,(\mathrm{X}, \mathrm{Z}\,(\mathrm{A}))'$, luego $\mathcal{B}\,(\mathrm{A})^{\upsilon}$ y $\mathcal{B}\,(\mathrm{A}^{\upsilon})$ son álgebras sobre $\upsilon\,(\mathrm{X}, \mathrm{Z}\,(\mathrm{A}))'$. Además,

$$\mathrm{Z}\,(\mathcal{B}\,(\mathrm{A})^{\upsilon}) = (\sigma\,(\mathrm{Z}\,(\mathrm{A})))^{\upsilon} = \{\, \mathrm{cl}_{\upsilon\,(\mathrm{X}',\, \sigma\,(\mathrm{Z}\,(\mathrm{A})))}\, \mathrm{B} : \mathrm{B} \in \sigma\,(\mathrm{Z}\,(\mathrm{A}))\,\}$$

y

$$\mathrm{Z}\,(\mathcal{B}\,(\mathrm{A}^{\upsilon})) = \sigma\,(\mathrm{Z}\,(\mathrm{A}^{\upsilon})).$$

Por el lema 3.3 se tiene que

$$\sigma\,(\mathrm{Z}\,(\mathrm{A}^{\upsilon})) = \sigma\,(\mathrm{Z}\,(\mathrm{A})^{\upsilon}) = \{\, \mathrm{cl}_{\upsilon\,(\mathrm{X},\, \mathrm{Z}\,(\mathrm{A}))'}\, \mathrm{B} : \mathrm{B} \in \sigma\,(\mathrm{Z}\,(\mathrm{A}))\,\}.$$

De esta forma

$$\mathrm{Z}\,(\mathcal{B}\,(\mathrm{A})^{\upsilon}) = \mathrm{Z}\,(\mathcal{B}\,(\mathrm{A}^{\upsilon})),$$

por lo tanto $\mathcal{B}\,(\mathrm{A})^{\upsilon} = \mathcal{B}\,(\mathrm{A}^{\upsilon})$.

(IV) De hecho es cierta la igualdad (ver [9]). Veamos una demostración sencilla de la inclusión considerada. Si $f \in \mathrm{L}$ y $\alpha \in \mathrm{R}$, entonces $(f - \alpha) \wedge 0$ y $(f - \alpha) \vee 0$ están en L, luego los conjuntos $f^{-1}\,(]-\infty, \alpha\,])$ y $f^{-1}\,([\,\alpha, +\infty\,[)$ pertenecen a Z (L). Como Z (L) es cerrado para intersecciones numerables se sigue que $\Omega\,(f) \subset \mathrm{Z}\,(\mathrm{L})$.

5.2. TEOREMA.—*Si A es un álgebra sobre X, entonces*

$$\widehat{\mathcal{B}(A)} = \{ g/X : g \in C(v(X, Z(A))') \}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia de la definición de la completación de un álgebra y del teorema 3.5.

5.3. COROLARIO.—*Si X es un espacio realcompacto y*

$$\mathcal{B}(C(X)) \neq C(X'),$$

el álgebra $\mathcal{B}(C(X))$ no es completa.

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia de que

$$X = vX = v(X, Z(X)) \quad \text{y} \quad \widehat{\mathcal{B}(C(X))} = \{ g/X : g \in C(X') \}.$$

Como consecuencia inmediata del resultado anterior se tiene que, las funciones de Baire de la recta real es un álgebra no completa sobre el espacio discreto R.

El operador $\wedge$ hace corresponder a cada álgebra A sobre X, la mínima álgebra $\hat{A}$ sobre X que es isomorfa a un anillo de la forma C (Y). Por otra parte, el operador $\mathcal{B}$ le hace corresponder el álgebra $\mathcal{B}$ (A) sobre X'. Al aplicar de nuevo esos operadores (alternativamente, pues son idempotentes) sobre las álgebras obtenidas, resultan nuevas álgebras sobre X', ya que $(X')' = X'$. Entonces es lógico preguntarse si al aplicar sucesiva e indefinidamente dichos operadores, el conjunto de álgebras obtenidas es finito o infinito. Como veremos a continuación, se pueden obtener a lo sumo cuatro álgebras distintas de la de partida.

5.4. LEMA.—*Si $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(X)$ es una σ-álgebra, entonces $\hat{\mathcal{D}}$ también lo es. Por lo tanto si A es un álgebra sobre X,*

$$\mathcal{B}(\widehat{\mathcal{B}(A)}) = \widehat{\mathcal{B}(A)}.$$

DEMOSTRACIÓN.—De BC3 se deduce que si $Z \in \hat{\mathcal{D}}$, entonces

$$Z = \bigcup \{ D \in \mathcal{D} : D \subset Z \}.$$

Por lo tanto Z es un conjunto a la vez abierto y cerrado. De este modo $\sigma(\hat{\mathfrak{D}})$ es una base sobre $X = X'$, y por el teorema 3.5 se tiene que

$$v(X, \hat{\mathfrak{D}}) = v(X, \sigma(\hat{\mathfrak{D}})).$$

Entonces $\hat{\mathfrak{D}} = \sigma(\dot{\mathfrak{D}})$ por BC1.

5.5. Teorema.—*Si A es un álgebra sobre X, entonces pueden construirse, a lo sumo, cuatro álgebras distintas a partir de A al aplicar sucesivamente los operadores $\wedge$ y $\mathscr{B}$.*

Demostración.—En virtud del lema anterior se deduce que

$$\widehat{\mathscr{B}(\hat{A})} = \mathscr{B}(\widehat{\mathscr{B}(\hat{A})}) \quad \text{y} \quad \widehat{\mathscr{B}(A)} = \mathscr{B}(\widehat{\mathscr{B}(A)}).$$

Entonces al aplicar sucesivamente los operadores $\wedge$ y $\mathscr{B}$ sobre A obtenemos

$$\hat{A}, \ \mathscr{B}(\hat{A}), \ \widehat{\mathscr{B}(\hat{A})}, \quad \mathscr{B}(A) \quad \text{y} \quad \widehat{\mathscr{B}(A)}.$$

Sin embargo, puesto que

$$\widehat{\mathscr{B}(A)} = \{ g/X : g \in C(v(X, Z(A))') \}, \quad \widehat{\mathscr{B}(\hat{A})} = \{ f/X : f \in C(v(X, \widehat{Z(A)})') \}$$

y

$$v(X, Z(A)) = v(X, \widehat{Z(A)})$$

se deduce que

$$\widehat{\mathscr{B}(A)} = \widehat{\mathscr{B}(\hat{A})}.$$

Luego a lo sumo son distintas las álgebras

$$A, \ \hat{A}, \ \mathscr{B}(\hat{A}), \ \mathscr{B}(A), \ \widehat{\mathscr{B}(A)}.$$

La demostración del siguiente lema se deja al lector.

5.6. Lema.—*Sea A_i un álgebra sobre un espacio X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ y sea X la suma topológica de los espacios $X_1, \ldots, X_n$. Entonces:*

(a) $A = \{f \in R^X : f/X_i \in A_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ *es un álgebra sobre X.*

(b) *$\upsilon(X, Z(A))$ es equivalente a la suma topológica de los espacios $\upsilon(X_1, Z(A_1)), \ldots, \upsilon(X_n, Z(A_n))$.*

(c) $\hat{A} = \hat{A}_1 \oplus \ldots \oplus \hat{A}_n$.

(d) $\mathscr{B}(A) = \mathscr{B}(A_1) \oplus \ldots \oplus \mathscr{B}(A_n)$.

5.7. Ejemplo.—Sea X_1 el espacio discreto R y sea X_2 el conjunto de todos los ordinales menores que el primer ordinal no numerable, provisto de la topología del orden. Sea X_3 el conjunto R con la métrica usual. Como X_2 es un espacio casi-compacto (i. e. posee una única compactación de Hausdorff) y X_3 es un espacio de Lindelöf, se tiene que $C(X_2)$ y $C(X_3)$ son las únicas álgebras sobre X_2 y X_3 respectivamente ([8], teorema 3). Además, puesto que ni X_2 ni X_3 son P-espacios, se sigue que

$$\mathscr{B}(C(X_2)) \neq C(X_2) \quad \text{y} \quad \mathscr{B}(C(X_3)) \neq C(X_3).$$

Sea A_1 el álgebra sobre X_1 de las funciones de Baire sobre la recta real con la topología usual.

Si $A = A_1 \oplus C(X_2) \oplus C(X_3)$, se tienen las siguientes igualdades:

$$\hat{A} = R^{X_1} \oplus C(X_2) \oplus C(X_3), \quad \mathscr{B}(\hat{A}) = R^{X_1} \oplus \mathscr{B}(C(X_2)) \oplus \mathscr{B}(C(X_3))$$

$$\mathscr{B}(A) = A_1 \oplus \mathscr{B}(C(X_2)) \oplus \mathscr{B}(C(X_3))$$

$$\widehat{\mathscr{B}(A)} = R^{X_1} \oplus R^{X_2} \oplus R^{X_3}$$

Luego en este caso las cinco álgebras consideradas son distintas entre sí.

Si A es un álgebra sobre X, sea

$$A^c = \widehat{\mathscr{B}(A)} \cap C(X).$$

Por simple comprobación se demuestra que A^c es un álgebra sobre X que contiene A. Además, como

$$\widehat{\mathscr{B}(A)} = \{ g/X : g \in C(\upsilon(X, Z(A))') \} \quad \text{y} \quad \hat{A} = \{ f/X : f \in C(\upsilon(X, Z(A))) \}$$

se sigue que $\hat{A} \subset A^c$. Entonces es natural preguntarse si $\hat{A} = A^c$ siempre. Sin embargo, aunque en general A^c es un álgebra completa, no es cierta la igualdad. (Nótese que en caso afirmativo, el problema de hallar la completación de un álgebra sobre X, se reduciría al caso en que dicha álgebra fuese sucesionalmente cerrada para la topología puntual en X.)

5.8. PROPOSICIÓN.—*Si A es un álgebra sobre X, entonces A^c es un álgebra completa.*

DEMOSTRACIÓN.—Es suficiente probar que

$$A^c = \widehat{A^c} = \{ f/X : f \in C(\upsilon(X, Z(A^c))) \}.$$

En efecto, puesto que

$$Z(A) \subset Z(A^c) \subset \widehat{\sigma(Z(A))} \quad \text{y} \quad \upsilon(X, Z(A))' = \upsilon(X', \sigma(Z(A)))$$

se tiene que existe una biyección continua de $\upsilon(X, Z(A))'$ sobre $\upsilon(X, Z(A^c))$. Consecuentemente, si $h \in C(\upsilon(X, Z(A^c)))$ entonces $h \in C(\upsilon(X, Z(A))')$. Por lo tanto

$$h/X \in \widehat{\mathscr{B}(A)} \cap C(X) = A^c.$$

5.9. EJEMPLO.—Sea X un espacio discreto no numerable y sea X^* su compactación de Alexandrof. Si $\mathfrak{D} = \{F \subset X : F$ finito o $X \sim F$ es numerable$\}$, es fácil comprobar que $\mathfrak{D} \in \mathscr{L}(X)$ y que $\omega(X, \mathfrak{D}) = X^* = \upsilon(X, \mathfrak{D})$. Si A es el álgebra sobre X tal que $Z(A) = \mathfrak{D}$, entonces A es completa ([3], p. 117). La σ-álgebra de los conjuntos de Baire en X^* es la familia $\{M, X^* \sim M : M$ es un subconjunto numerable de $X\}$. Entonces si M es un subconjunto de X infinito numerable, se tiene que

$$\chi_M \in C(X) \cap \mathscr{B}(A) \subset A^c.$$

Sin embargo, $\chi_M \notin \hat{A} = A$.

Bibliografía

[1] ALÒ, R. A. y SHAPIRO, H. L. (1974). Normal Topological Spaces. Cambridge Univ. Press.

[2] ALÒ, R. A., SHAPIRO, H. L. y WEIR, M. (1975). Realcompactness and Wallman realcompactification. *Port. Math.*, **34**, 33-43.

[3] BLASCO, J. L. (1979). Complete bases and Wallman realcompactifications. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **75**, 114-18.

[4] BLASCO, J. L. Realcompactaciones de tipo Wallman: Sobre la completación de una base. (Pendiente de publicación.)

[5] FROLIK, Z. (1971). Realcompactness is a Baire-measurable property. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **19**, 617-621.

[6] GILLMAN, L. y JERISON, M. (1960). Rings of continuous functions. Princeton.

[7] GORDON, H. (1971). Rings of functions determined by zero-sets. *Pacific J. Math.*, **36**, 133-157.

[8] HAGER, A. W. y JOHNSON, D. G. (1968). A note on certain subalgebras of C (X). *Canad. J. Math.*, **20**, 389-93.

[9] HAGER, A. W. (1976). A class of function algebras (and compactifications, and uniform spaces). *Symposia Mathematica*, **17**, 11-23.

[10] HAHN, H. (1948). Reelle Funktionen. Chelsea, New York.

[11] HAYES, A. (1968). Alexander's theorem for realcompactness *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **64**, 41-43.

[12] HEWITT, E. (1950). Linear functionals on spaces of continuous functions. *Fund. Math.*, **37**, 161-89.

[13] KURATOWSKI, K. (1966). Topology, vol. 1, Acad. Press.

[14] MORAN, W. (1969). Measures and mappings on topological spaces. *Proc. London Math. Soc.*, **19**, 493-503.

[15] MROWKA, S. (1957). Some properties of Q-spaces. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Astron. Phys.*, **5**, 497-50.

[16] MROWKA, S. (1972). Recent results on E-compact spaces. General Topology and Its Applications. Second Pittsburgh International Conference, 298-301.

[17] STEINER, E. F. (1966). Normal families and completely regular spaces. *Duke Math. J.*, **33**, 743-45.

[18] STEINER, E. F. (1968). Wallman spaces and compactifications. *Fund. Math.*, **61**, 295-304.

[19] STEINER, A. K. y STEINER, E. F. (1970). Nest generated intersection rings in Tychonoff spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **148**, 589-601.

Cátedra de Matemáticas II
Facultad de Ciencias
Burjasot (Valencia)