REALCOMPACTACIONES DE TIPO WALLMAN: SOBRE LA COMPLETACION DE UNA BASE

José L. Blasco (*)

Recibido: 7 marzo 1979

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

By a base on a space X is meant a separating nest generated intersection ring on X. A base $\mathfrak{D}$ on X is called complete if it coincides with the trace on X of all zero-sets in the associated Wallman realcompactification $\upsilon(X, \mathfrak{D})$. For each base $\mathfrak{D}$ on X there is a smallest complete base $\hat{\mathfrak{D}}$ which contains $\mathfrak{D}$. In this paper we give a constructive method of the completion $\hat{\mathfrak{D}}$.

Introducción

Todos los espacios usados aquí serán completamente regulares de Hausdorff. En este artículo consideramos la compactación de tipo Wallman $\omega(X, \mathfrak{D})$ y la realcompactación de tipo Wallman $\upsilon(X, \mathfrak{D})$ asociadas a una base (**) $\mathfrak{D}$ sobre un espacio X. Denotamos por $\mathcal{L}(X)$ la familia de todas las bases sobre X. Como se ha probado en [4], la aplicación que a cada $\mathfrak{D} \in \mathcal{L}(X)$ le hace corresponder el espacio $\omega(X, \mathfrak{D})$ es inyectiva. Sin embargo existen bases distintas sobre un espacio que dan lugar a realcompactaciones de tipo Wallman equivalentes. De hecho, la σ-álgebra $\mathcal{L}$ de los con-

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valencia que dirige el profesor D. Manuel Valdivia.

(**) Este concepto se debe a E. F. Steiner [5], quien usa el término *separating nest generated intersection ring*. Otro concepto equivalente es el de *strong delta normal base* debido a Alò y Shapiro [1].

juntos medibles Lebesgue de la recta real R es una base sobre el espacio discreto R_d tal que $R_d = \upsilon R_d = \upsilon (R_d, \mathcal{L})$.

En [2] se estudia una clase especial de bases $\mathfrak{D}$ sobre un espacio X, llamadas completas, que se caracterizan por la relación $\beta (\upsilon (X, \mathfrak{D})) = \omega (X, \mathfrak{D})$. La familia $\mathcal{L}_c (X)$ de las bases completas sobre X resulta ser la mayor subfamilia de $\mathcal{L} (X)$ tal que la aplicación que a cada $\mathfrak{D}$ le hace corresponder el espacio $\upsilon (X, \mathfrak{D})$ es inyectiva.

Para cada base $\mathcal{F}$ sobre X existe una mínima base completa $\hat{\mathcal{F}}$ que contiene a $\mathcal{F}$. En este artículo se da una caracterización de los conjuntos de la completación $\hat{\mathcal{F}}$.

1. Notación, definiciones y algunos resultados previos

Escribimos C (X) para el anillo de las funciones reales continuas en el espacio X. Un conjunto cero en X es un conjunto de la forma $Z (f) = \{x \in X : f (x) = 0\}$ donde $f \in C (X)$. La familia de todos los conjuntos cero en X vendrá denotada por Z (X).

Una *base sobre* X será una base $\mathfrak{D}$ de cerrados en X con las siguientes propiedades:

(a) *Es cerrada para uniones finitas e intersecciones numerables.*

(b) *Si* $p \in X \sim H$, $H \in \mathfrak{D}$ *existe* $D \in \mathfrak{D}$ *tal que* $p \in D$ *y* $D \cap H = \varnothing$.

(c) *Si* D_1 *y* D_2 *son elementos disjuntos de* $\mathfrak{D}$, *existen* E_1 *y* E_2 *en* $\mathfrak{D}$ *tales que* $D_i \cap E_i = \varnothing$ *y* $X = E_1 \cup E_2$.

(d) *Para cada* $D \in \mathfrak{D}$ *existe una sucesión* $\{E_n : n = 1, 2, ...\}$ *en* $\mathfrak{D}$ *tal que* $D = \bigcap \{X \sim E_n : n = 1, 2, ...\}$.

Sea $\omega (X, \mathfrak{D})$ la familia de todos los $\mathfrak{D}$-ultrafiltros. La colección de los conjuntos de la forma $\{\mathcal{U} \in \omega (X, \mathfrak{D}) : D \in \mathcal{U}\}$, $D \in \mathfrak{D}$, es base de cerrados para una topología en $\omega (X, \mathfrak{D})$. A cada punto $x \in X$ le corresponde el punto $\varphi (x)$ de $\omega (X, \mathfrak{D})$, que representa el $\mathfrak{D}$-ultrafiltro de todos los miembros de $\mathfrak{D}$ que contienen a x. Mediante la aplicación φ, X es homeomorfo a un subespacio denso de $\omega (X, \mathfrak{D})$. El espacio $S = \omega (X, \mathfrak{D})$ es una compactación Hausdorff de X con las propiedades siguientes:

W1. *La familia* $\{\mathrm{cl}_S D : D \in \mathfrak{D}\}$ *es una base de cerrados.*

W2. *Si* $\{D_1, ..., D_n\}$ *es una subfamilia finita de* $\mathfrak{D}$, *entonces*

$$\mathrm{cl}_S \bigcap \{\ _i : 1 \leq i \leq n\} = \bigcap \{\mathrm{cl}_S D_i : 1 \leq i \leq n\}$$

Sea $\upsilon(X, \mathfrak{D})$ el subconjunto de $\omega(X, \mathfrak{D})$ formado por los $\mathfrak{D}$-ultrafiltros cerrados para intersecciones numerables. Entonces, como subespacio topológico de $\omega(X, \mathfrak{D})$, $\upsilon(X, \mathfrak{D})$ es realcompacto y X es homeomorfo a un subespacio denso (mediante la aplicación φ). Entonces $T = \upsilon(X, \mathfrak{D})$ es una realcompactación de X con las siguientes propiedades:

R1. *La familia* $\{cl_T D : D \in \mathfrak{D}\}$ *es una base de cerrados.*

R2. *Si* $\{D_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *es una subfamilia numerable de* $\mathfrak{D}$,

$$cl_T \bigcap \{D_n : n = 1, 2, \ldots\} = \bigcap \{cl_T D_n : n = 1, 2, \ldots\}$$

R3. *Todo conjunto cero en T tiene intersección no vacía con X.*

Si $\mathfrak{D}$ es una base sobre X, sea $\hat{\mathfrak{D}}$ la traza sobre X de todos los conjuntos cero en la realcompactación $\upsilon(X, \mathfrak{D})$. Entonces $\hat{\mathfrak{D}}$ es una base sobre X que contiene a $\mathfrak{D}$ ([4], 1.4). Una base $\mathfrak{D}$ sobre X se dice que es completa si $\mathfrak{D} = \hat{\mathfrak{D}}$. De ([2], C.2.2) se tiene que:

B1. $\hat{\mathfrak{D}}$ *es la mayor base sobre X tal que*

$$\upsilon(X, \mathfrak{D}) = \upsilon(X, \hat{\mathfrak{D}}) \quad (***)$$

B2. $\hat{\mathfrak{D}}$ *es la menor base completa sobre X que contiene a* $\mathfrak{D}$.

Cuando no haya posibilidad de confusión escribiremos $\omega(\mathfrak{D})$ y $\upsilon(\mathfrak{D})$ en lugar de $\omega(X, \mathfrak{D})$ y $\upsilon(X, \mathfrak{D})$, respectivamente. Para una discusión detallada de los espacios de tipo Wallman, así como de sus propiedades ver [1], [3] y [4].

1.1. LEMA.—*Sea* $\mathfrak{D} \in \mathcal{L}(X)$. *Para todo* $Z \in \hat{\mathfrak{D}}$, $cl_{\upsilon(\mathfrak{D})} Z$ *es un conjunto cero en* $\upsilon(\mathfrak{D})$.

DEMOSTRACIÓN.—Si $Z \in \hat{\mathfrak{D}}$, por definición existe un conjunto cero Z' en $\upsilon(\mathfrak{D})$ tal que $Z = Z' \cap X$. Sea $p \in Z'$ y supongamos que $p \in \upsilon(\mathfrak{D}) \sim cl_{\upsilon(\mathfrak{D})} Z$. Entonces por completa regularidad existe un conjunto cero Z'' en $\upsilon(\mathfrak{D})$ tal que $p \in Z''$ y $Z'' \cap cl_{\upsilon(\mathfrak{D})} Z = \varnothing$. El conjunto $Z' \cap Z''$ es un conjunto cero en $\upsilon(\mathfrak{D})$ que contiene a p y tiene intersección vacía con X. Sin embargo, por la propiedad R3 esto es una contradicción. Por lo tanto $p \in cl_{\upsilon(\mathfrak{D})} Z$ y Z' será igual a $cl_{\upsilon(\mathfrak{D})} Z$.

(***) Dos extensiones T_1 y T_2 de un espacio X se dice que son equivalentes si existe un homeomorfismo de T_1 sobre T_2 cuya restricción a X es la identidad. En este caso escribiremos $T_1 = T_2$.

1.2. PROPOSICIÓN.—*Sea* $\mathfrak{D} \in \mathcal{L}(X)$. *Si* $\mathfrak{D}_*$ *es la familia de los conjuntos cero* Z *en* X *tales que*

$$\mathrm{cl}_{\upsilon(\mathfrak{D})} Z = \bigcup \{\mathrm{cl}_{\upsilon(\mathfrak{D})} D : D \in \mathfrak{D}, \quad D \subset Z\}$$

entonces $\hat{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{D}_*$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $Z \in \hat{\mathfrak{D}}$. Entonces por el lema anterior, $\mathrm{cl}_{\upsilon(\mathfrak{D})} Z$ es un conjunto cero en $\upsilon(\mathfrak{D})$, y por lo tanto es un conjunto G_δ en $\upsilon(\mathfrak{D})$. Consecuentemente, existe una sucesión $\{F_n : n = 1, 2, \ldots\}$ de conjuntos cerrados en $\upsilon(\mathfrak{D})$, tal que $F_n \cap \mathrm{cl}_{\upsilon(\mathfrak{D})} Z = \varnothing$ y

$$(\mathfrak{D}) = [\mathrm{cl}_{\upsilon(\mathfrak{D})} Z] \cup [\bigcup \{F_n : n = 1, 2, \ldots\}]$$

Supongamos que p es un punto de $\mathrm{cl}_{\upsilon(\mathfrak{D})} Z$. Entonces $p \notin F_n$, por lo que existen $D_n \in p$ y $D'_n \in \mathfrak{D}$ tales que $D_n \cap D'_n = \varnothing$ y $F_n \subset \mathrm{cl}_{\upsilon(\mathfrak{D})} D'_n$. Puesto que el $\mathfrak{D}$-ultrafiltro p es cerrado para intersecciones numerables se tiene que, el conjunto

$$D = \bigcap \{D_n : n = 1, 2, \ldots\}$$

pertenece a p y tiene intersección vacía con todos los conjuntos D'_n. Por otra parte, de

$$X = Z \cup [\bigcup \{F_n \cap X : n = 1, 2, \ldots\}]$$

se sigue que $D \subset Z$. Entonces como $p \in \mathrm{cl}_{\upsilon(\mathfrak{D})} D$ se sigue que $Z \in \mathfrak{D}_*$.

2. La completación de una base

El siguiente resultado es consecuencia del teorema de extensión de Tajmanov [6] y de las propiedades W1 y W2.

2.1. TEOREMA.—*Sea* X *un subespacio denso de un espacio* T *y sea* ξ *una base sobre un espacio* Y. *Una función continua* $f : X \longrightarrow Y$ *se puede extender a una función continua de* T *en* $\omega(Y, \xi)$ *si y sólo si cuando* E_1 *y* E_2 *son elementos disjuntos de* ξ:

$$\mathrm{cl}_T f^{-1}(E_1) \cap \mathrm{cl}_T f^{-1}(E_2) = \varnothing$$

En ([7], 6.16) se prueba la siguiente proposición:

2.2. PROPOSICIÓN.—*Sea* ξ *una base sobre un espacio* Y *y sea* $\mathcal{F}$ *un* ξ*-filtro con la propiedad de la intersección numerable. Supongamos que cuando* Y *es la unión de dos conjuntos de* ξ, *al menos uno pertenece a* $\mathcal{F}$. *Entonces existe un único* ξ*-ultrafiltro que contiene a* $\mathcal{F}$, *que además es cerrado para intersecciones numerables.*

2.3. TEOREMA.—*Sea* $\mathfrak{D}$ *una base sobre* X, *sea* ξ *una base sobre* Y *y* f *una función continua de* X *en* Y. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Existe una extensión continua* $\bar{\text{f}} : \upsilon(X, \mathfrak{D}) \longrightarrow \upsilon(Y, \xi)$ *de* f.

(b)*Si* $\{E_n : \text{n} = 1, 2, \ldots\}$ *es una sucesión de elementos de* ξ *cuya intersección es vacía, entonces*

$$\bigcap \{\mathrm{cl}_{\upsilon(X,\mathfrak{D})} f^{-1}(E_n) : n = 1, 2, \ldots\} = \varnothing$$

(c) *Para todo* $E \in \xi$, *el conjunto* $\text{f}^{-1}(E)$ *pertenece a* $\mathfrak{D}_*$.

DEMOSTRACIÓN.—Para mayor comodidad escribiremos

$$\mathrm{H} = \upsilon(\mathrm{X}, \mathfrak{D}), \quad \mathrm{S} = \omega(\mathrm{Y}, \xi) \quad \text{y} \quad \mathrm{G} = \upsilon(\mathrm{Y}, \xi).$$

(a) *implica* (c). Sea $\mathrm{E} \in \xi$. De ([4], T. 2.2) se deduce la existencia de un conjunto cero Z en S tal que $\mathrm{Z} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{E}$. Entonces el conjunto $\bar{f}^{-1}(\mathrm{Z} \cap \mathrm{G})$ pertenece a $\mathrm{Z}(\mathrm{H})$. Por lo tanto $f^{-1}(\mathrm{E}) = \mathrm{X} \cap \cap \bar{f}^{-1}(\mathrm{Z} \cap \mathrm{G})$ está en $\hat{\mathfrak{D}} \subset \mathfrak{D}_*$.

(c) *implica* (b). Supongamos que $p \in \mathrm{cl_H}\, f^{-1}(\mathrm{E}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, donde $\{\mathrm{E}_n : n = 1, 2, \ldots\}$ es una sucesión en ξ con intersección vacía. Por (c), para cada n existe $\mathrm{D}_n \in \mathfrak{D}$ tal que $\mathrm{D}_n \subset f^{-1}(\mathrm{E}_n)$ y $p \in \mathrm{cl_H}\, \mathrm{D}_n$. Entonces $p \in \bigcap \{\mathrm{cl_H}\, \mathrm{D}_n : n = 1, 2, \ldots\}$. Por otra parte, como $f(\mathrm{D}_n) \subset \mathrm{E}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, se tiene que $\bigcap \{\mathrm{D}_n : n = 1, 2, \ldots\} = \varnothing$. Pero esto es una contradicción por la propiedad R2 de $\upsilon(\mathrm{X}, \mathfrak{D})$, luego

$$\bigcap \{\mathrm{cl_H} f^{-1}(\mathrm{E}_n) : n = 1, 2, \ldots\} = \varnothing$$

(b) *implica* (a). Por el teorema 2.1 existe una extensión continua

$$\bar{f} : \upsilon(\mathrm{X}, \mathfrak{D}) \longrightarrow \omega(\mathrm{Y}, \xi)$$

de f, por lo que es suficiente probar que $\tilde{f}(\mathrm{H}) \subset \mathrm{G}$. Sea p un punto arbitrario de H. Entonces la familia

$$\mathcal{F} = \{\mathrm{F} \in \xi : \mathrm{E}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{E}_n \subset \mathrm{F}, \quad \mathrm{E}_i \in \xi, \quad p \in \mathrm{cl_H} f^{-1}(\mathrm{F}_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

es un ξ-filtro, y por (b) tiene la propiedad de la intersección numerable. Es fácil ver que cuando Y es la unión de dos elementos de ξ, al menos uno de ellos pertenece a $\mathcal{F}$. Entonces por la proposición 2.2, existe un punto $q \in \upsilon(\mathrm{Y}, \xi)$ tal que $\{q\} = \cap \{\mathrm{cl_S\,E} : \mathrm{E} \in \mathcal{F}\}$. Por la propiedad W2 de $\omega(\mathrm{Y}, \xi)$, se tiene que $\tilde{f}(p) \in \mathrm{cl_S\,E}$ para todo $\mathrm{E} \in \mathcal{F}$, luego $\tilde{f}(p) = q$. Por lo tanto $\tilde{f}(p) \in \mathrm{G}$ y queda demostrado el teorema.

El próximo resultado es consecuencia de la propiedad R2 y generaliza el teorema 9.9 de [7].

2.4. Corolario.—*Sea* $\mathcal{D}$ *una base sobre* X *y* ξ *una base sobre* Y. *Sea* f *una función continua de* X *en* Y. *Supongamos que para cada sucesión* $\{E_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *en* ξ *con intersección vacía, existe una sucesión* $\{D_n : n = 1, 2, \ldots\}$ *en* $\mathcal{D}$ *con intersección vacía tal que* $f^{-1}(E_n) \subset D_n$, $n = 1, 2, \ldots$ *Entonces existe una extensión continua* $\tilde{f} : \upsilon(X, \mathcal{D}) \longrightarrow \upsilon(Y, \xi)$ *de* f.

El interés de la anterior condición suficiente reside en el hecho de que está expresada en términos de las bases dadas únicamente. Pero desafortunadamente, esa condición no es necesaria como vamos a ver a continuación.

Ejemplo.—Sea $\mathcal{D}$ la σ-álgebra de todos los conjuntos medibles Lebesgue en R y sea ξ la familia de todos los subconjuntos de R. Si f es la identidad de R sobre R, se tiene que $\mathcal{D}$ y ξ son dos bases sobre el espacio discreto R, que no satisfacen la condición anterior. Sin embargo, como se ha probado en [2], se tiene que

$$\mathrm{R} = \upsilon(\mathrm{R}, \xi) = \upsilon(\mathrm{R}, \mathcal{D}).$$

2.5. Corolario.—*Sea* $\mathcal{D}$ *una base sobre* X. *Una función* $f \in C(X)$ *se puede extender continuamente a* $\upsilon(X, \mathcal{D})$ *si y sólo si para todo conjunto cerrado* M *en* R, *el conjunto* $f^{-1}(M)$ *pertenece a* $\mathcal{D}_*$.

Para cada $f \in \mathrm{C}(\mathrm{X})$, sea $\Omega(f)$ la familia de todos los conjuntos $f^{-1}(\mathrm{C})$, donde C es un conjunto cerrado en R.

2.6. TEOREMA.—*Para cada base* $\mathfrak{D}$ *sobre* X, $\hat{\mathfrak{D}}$ *es igual a* $\cup \{\Omega(f) : f \in C(X) \text{ y } \Omega(f) \subset \mathfrak{D}_*\}$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $Z \in \hat{\mathfrak{D}}$. Por definición, existe una función real continua g en $\upsilon(\mathfrak{D})$ tal que $Z = Z(g) \cap X$. Del corolario 2.5 se sigue entonces que $Z \in \Omega(g/X) \subset \mathfrak{D}_*$.

Recíprocamente, sea Z un conjunto cero perteneciente a

$$\Omega(f) \subset \mathfrak{D}_*, \quad f \in C(X).$$

Por el corolario 2.5, existe una extensión continua $\tilde{f}$ de f a $\upsilon(\mathfrak{D})$. Si C es un subconjunto cerrado de R tal que $Z = f^{-1}(C)$, entonces $Z = \tilde{f}^{-1}(C) \cap X \in \hat{\mathfrak{D}}$.

Bibliografía

[1] ALÒ, R. A. and SHAPIRO, H. L. (1974). Normal Topological Spaces, Cambridge Univ. Press.

[2] BLASCO, J. L. (1979). Complete bases and Wallman realcompactifications. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **75**, 114-118.

[3] STEINER, A. K. and STEINER, E. F. (1968). Wallman spaces and compactifications. *Fund. Math.*, **61**, 295-304.

[4] STEINER, A. K. and STEINER, E. F. (1970). Nest generated intersection rings in Tychonoff spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **148**, 589-601.

[5] STEINER, E. F. (1966). Normal families and completely regular spaces. *Duke Math. J.*, **33**, 743-45.

[6] TAJMANOV, A. D. (1952). On extension of continuous mappings of topological spaces. *Math. Sbornik*, **3** , 459-463.

[7] WEIR, M. D. (1975). Hewitt-Nachbin Spaces, North-Holland. *Math. Studies*, 17.

Cátedra de Matemáticas II
Facultad de Ciencias
Burjasot (Valencia)