REFLEXIVIDAD EN LOS ESPACIOS ESCALONADOS DE KÖTHE (*)

J. A. López Molina

Recibido: 27 noviembre 1979

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. MANUEL VALDIVIA UREÑA

An echelon Köthe space Λ is reflexive if and only if it is K-isomorphic to a reflexive echelon sequence space. An echelon Köthe space Λ^p, $p > 1$ is a Montel space if and only if it is K-isomorphic to a Montel sequence space λ^p, $p > 1$. We give a characterization of the weakly relatively compact subsets of an echelon Köthe space of order 1.

En este trabajo estudiamos la reflexividad de los espacios escalonados de Köthe sobre un espacio medida localizable con la propiedad de los subconjuntos finitos, así como ciertas cuestiones relacionadas con este tema. Todos los espacios vectoriales que usemos serán reales. Si $\langle E, F \rangle$ es un par dual, la forma bilineal canónica se denotará por $\langle x, y \rangle$, $x \in E$, $y \in F$. Las topologías débil y fuerte en E se denotarán por $\sigma(E, F)$ y $\beta(E, F)$ respectivamente. E' será el dual topológico de un espacio localmente convexo $[E, \mathfrak{T}]$ y E'' su bidual.

Sea $(E, \mathcal{R}, \mu)$ un espacio medida localizable y con la propiedad de los subconjuntos finitos (ver [3] para estos conceptos). El conjunto de todas las funciones reales $\mathcal{R}$-medibles, definidas en E, será $\Omega(E)$. Si identificamos dos funciones iguales excepto en un

(*) Este trabajo es parte de la Tesis Doctoral del autor leída en Valencia el 29 de octubre de 1977 y realizada en el Departamento de Teoría de Funciones y Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Matemáticas de Valencia, bajo la dirección del profesor Dr. D. Manuel Valdivia Ureña.

conjunto de medida cero (iguales «casi por todas partes», c. t. p. abreviadamente), obtenemos el conjunto cociente $\Omega_0(E)$. Usaremos el mismo símbolo para denotar $f \in \Omega(E)$ y su clase en $\Omega_0(E)$.

Sea N el conjunto de los números naturales no nulos y R el de los reales. Sea $p \in R$, $p \geqslant 1$. Sea $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $\Omega(E)$ tal que

$$0 \leqslant g_k(t) \leqslant g_{k+1}(t)$$

para todo $t \in E$ y $k \in N$, y tal que

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \{t \in E / g_k(t) = 0\}\right) = 0$$

Definimos el espacio escalonado de Köthe de orden p

$$\Lambda^p = \Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k) = \left\{ f \in \Omega_0(E) / \int_E |f|^p g_k \, d\mu < \infty \quad \forall k \in N \right\}$$

Si $p = 1$ escribimos Λ en vez de Λ^1. En Λ^p consideramos la topología $\mathcal{T}$ definida por la familia de seminormas

$$P_k(f) = \left(\int_E |f|^p g_k \, d\mu\right)^{1/p}, \quad f \in \Lambda^p \quad k \in N$$

Entonces $[\Lambda^p, \mathcal{T}]$ es un espacio de Frechet, cuyo dual topológico es el α-dual de Λ^p

$$(\Lambda^p)^\alpha = \left\{ h \in \Omega_0(E) / \int_E |h| \cdot |f| \, d\mu < \infty, \quad \forall f \in \Lambda^p \right\},$$

estando definida la forma bilineal canónica por la fórmula

$$\langle f, h \rangle = \int_E f h \, d\mu \quad f \in \Lambda, \quad h \in \Lambda^\alpha$$

(ver [1] para los detalles).

Dado un espacio medida $(E, \mathcal{A}, \mu)$, si $A \in \mathcal{A}$, la σ-álgebra y la medida inducidas por $\mathcal{A}$ y μ en A se siguen denotando con las mismas letras. Sea

$$S(g_k) = \{t \in E / g_k(t) \neq 0\}.$$

Junto al espacio $\Lambda^p(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$ podemos considerar los espacios

$$\Lambda^p_k = \left\{ f \in \Omega_0(S(g_k)) / P_k(f) = \left(\int_{S(g_k)} |f|^p g_k \, d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

que con la topología $\mathcal{T}_k$ definida por la norma P_k son isométricos a espacios L^p de Lebesgue. Si $I_k : \Lambda^p \longrightarrow \Lambda^p_k$ es la restricción de cada $f \in \Lambda^p$ a $S(g_k)$ e $I_{nm} : \Lambda^p_m \longrightarrow \Lambda^p_n$, $n \leqslant m$ es la restricción de cada $f \in \Lambda^p_m$ a $S(g_n)$, se tiene que $[\Lambda^p, \mathcal{T}]$ es el límite proyectivo $\varprojlim I_{nm}(\Lambda^p_m, \mathcal{T}_m)$. Como cada Λ^p_k es un espacio escalonado particular, su dual topológico es su α-dual $(\Lambda^p_k)^\alpha$ que si $p = 1$ escribimos Λ^α_k. Si I'_k es la traspuesta de I_k, se verifica

$$\Lambda^\alpha = \bigcup_{k=1}^{\infty} I'_k(\Lambda^\alpha_k) \tag{1}$$

(ver [1] para los detalles).

Teorema 1.—*Un espacio escalonado de Köthe* $\Lambda(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$ *es* $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$*-sucesionalmente completo.*

Demostración.—Designaremos por χ_A la función característica de un conjunto A. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$-sucesión de Cauchy en Λ, para cada $k \in N$, la sucesión $\{f_n \cdot \chi_{S(g_k)}\}_{n=1}^{\infty}$ es $\sigma(\Lambda_k, \Lambda^\alpha_k)$ de Cauchy en Λ^α_k. Por tanto es $\sigma(\Lambda_k, \Lambda^\alpha_k)$-convergente a una función $h_k \in \Lambda_k$. Como la aplicación

$$I_{nm} : [\Lambda_m, \mathcal{T}_m] \longrightarrow [\Lambda_n, \mathcal{T}_n], \quad n < m,$$

es continua, también es continua de

$$[\Lambda_m, \sigma(\Lambda_m, \Lambda^\alpha_m)] \quad \text{en} \quad [\Lambda_n, \sigma(\Lambda_n, \Lambda^\alpha_n)]$$

Entonces $h_k = \chi_{S(g_k)} \cdot h_{k+1}$ c. t. p. en $S(g_k)$ y la función h que vale h_k c. t. p. en $S(g_k)$ es un elemento de Λ tal que $h = \lim_n f_n$ en $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$. c. q. d.

Vamos a caracterizar los elementos del bidual Λ'' de $\Lambda(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$ que están en Λ.

TEOREMA 2.—*Sea* $G \in [\Lambda^{\alpha}, \beta(\Lambda^{\alpha}, \Lambda)]'$. *G es* $\sigma(\Lambda^{\alpha}, \Lambda)$ *continua si y sólo si se cumplen las dos condiciones:*

1. *Para cada* g_k *y cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\mu(A) < \delta$ *y* $h \in \Lambda^{\alpha}$, $|h| \leqslant \chi_A g_k$, *se tiene* $|G(h)| \leqslant \varepsilon$.

2. *Para cada* g_k *y* $\varepsilon > 0$, *existe* A_0 *con* $\mu(A_0) < \infty$ *tal que si* $h \in \Lambda^{\alpha}$, $|h| \leqslant \chi_A g_k$ *para* $A \subset E - A_0$, *se tiene* $|G(h)| \leqslant \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN.—Necesidad. Si G es $\sigma(\Lambda^{\alpha}, \Lambda)$ continua, existe $f \in \Lambda$ tal que

$$G(h) = \int_E f h \, d\mu \qquad \forall h \in \Lambda^{\alpha} \tag{2}$$

Entonces, tomando un representante de f, que lo seguimos denotando por f, debe ser

$$S(f) = \{t \in E / f(t) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

con

$$\mu(E_n) < \infty, \quad E_n \subset E_{n+1}, \quad n \in N.$$

Las condiciones 1 y 2 se deducen fácilmente de (2), de ser $f \in \Lambda$ y de las propiedades de la integral.

Suficiencia. Si en Λ definimos $f \leqslant g$ si y sólo si $f(t) \leqslant g(t)$ c. t. p. en E, se introduce una relación de orden en Λ que hace que $[\Lambda, \mathcal{T}]$ sea un retículo vectorial topológico orden completo. En Λ^{α} y Λ'' consideramos el orden canónico derivado del orden de Λ. Si G^+ y G^- son las partes positiva y negativa de G, se sabe que

$$\left.\begin{aligned} |G^+(h)| &\leqslant G^+(|h|) = \sup_{0 \leq y \leq |h|} G(y) \leqslant \sup_{0 \leq y \leq |h|} |G(y)| \\ |G^-(h)| &\leqslant G^-(|h|) = \sup_{0 \leq y \leq |h|} -G(y) \leqslant \sup_{0 \leq y \leq |h|} |G(y)| \end{aligned}\right\} \quad h \in \Lambda^{\alpha},\ g \in \Lambda^{\alpha}$$

Por tanto si G cumple 1) y 2) también las cumplen G^+ y G^-. Como $G = G^+ - G^-$, para demostrar el teorema se puede suponer que G es positiva.

Por 2), existe M_{kn}, $k \in N$, $n \in N$, tal que $\mu(M_{kn}) < \infty$ y si

$$A \subset E - M_{kn}, \quad h \in \Lambda^{\alpha} \quad y \quad |h| \leqslant \chi_A g_k,$$

se tiene $|G(h)| \leqslant 1/n$. Se sabe que si $h \in \Lambda^\alpha$, existe $C > 0$ y $k \in N$ tales que $|h| \leqslant C g_k$ c. t. p. (ver [1]). Sea

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{kn}$$

Entonces, si $h \in \Lambda^\alpha$ y h es nula en M, es fácil ver que $G(h) = 0$.

Como M es σ-finito, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ con $\mu(H_n) < \infty$. Si

$$H_{nk} = \{t \in H_n / g_k(t) > 1/k\}$$

se tiene, excepto un conjunto de medida cero

$$H_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{nk}.$$

Sea

$$E_n = \bigcup_{1 \leq i, j \leq n} H_{ij}.$$

Entonces, salvo un conjunto de medida cero

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad F_n \subset E_{n+1}, \mu(E_n) < \infty, \quad y \quad \chi_{E_n} \in \Lambda^\alpha, \quad n \in N$$

(pues el ínfimo de g_n en E_n es mayor que cero). Definamos ahora $K_1 = E_1$, $K_n = E_n - E_{n-1}$, $n > 1$. Se puede suponer que todos los K_n son de medida no nula.

Para cada $n \in N$ vamos a definir una función de conjunto ψ_n en K_n. Si $A \in \mathcal{H}$, $A \subset K_n$ definimos

$$\psi_n(A) = G(\chi_A)$$

ψ_n es completamente aditiva: sea

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subset K_n,$$

con los A_n disjuntos dos a dos. Existe $C > 0$ y $k \in N$ tal que $\chi_A \leqslant C\, g_k$ c. t. p. Por 1), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$\mu(B) \leqslant \delta \quad \text{y} \quad h \in \Lambda^{\alpha}, \; |h| \leqslant \chi_B\, g_k,$$

se tiene $|G(h)| \leqslant \varepsilon / C$. También existe $s_0 \in N$ tal que si $s \geqslant s_0$,

$$\mu(T_s) = \mu\left(\bigcup_{n=s}^{\infty} A_n\right) \leqslant \delta$$

Entonces

$$|G(\chi_A) - G(\chi_{A-T_s})| = |G(\chi_A - \chi_{A-T_s})| = |G(\chi_{T_s})| \leqslant \varepsilon \qquad s \geq s_0$$

y por tanto

$$\psi_n(A) = G(\chi_A) = \lim_{s \to \infty} G(\chi_{A-T_s}) = \lim_{s \to \infty} \sum_{i=1}^{s-1} G(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_n(A_i)$$

ψ_n es absolutamente continua respecto a μ: Sean $C > 0$ y $k \in N$ tales que $\chi_{K_n} \leqslant C \cdot g_k$ c. t. p. Como $\chi_A \leqslant C \cdot \chi_A\, g_k$ para $A \subset K_n$, esto es consecuencia inmediata de la condición 1).

Por el teorema de Radon-Nykodym existe $\varphi_n \geqslant 0$ tal que si $A \subset K_n$, $A \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\psi_n(A) = G(\chi_A) = \int_A \varphi_n\, d\mu = \int_{K_n} \chi_A\, \varphi_n\, d\mu$$

Prolonguemos φ_n a E, haciendo $\varphi_n = 0$ en $E - K_n$, y sea

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$$

que es $\mathcal{H}$-medible. Es fácil comprobar que si f es una función simple de Λ^{α} que se anule en $E - E_n$, se tiene

$$G(f) = \int_E \varphi f\, d\mu \tag{3}$$

Sea $f \geqslant 0$, $f \in \Lambda^\alpha$. Veamos que (3) también es válida para f. Existe una sucesión monótona creciente de funciones simples $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de Λ^α tal que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$$

para todo $t \in E$. Sean $C > 0$ y $k \in N$ tales que $|f| \leqslant C\, g_k$ c. t. p. Dado $\alpha > 0$, sean $\delta > 0$ y H de medida finita que verifiquen las condiciones de 1) y 2) de la hipótesis, con $\varepsilon = \alpha/3\, C$. Como $\mu(K_p) < \infty$, $p \in N$, por el teorema de Egorov, existe $A^\alpha{}_p \subset K_p$ tal que f_n converge uniformemente a f en $A^\alpha{}_p$ y $\mu(K_p - A^\alpha{}_p) < \delta/2^p$. Si B es $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$ acotado, su envoltura normal

$$B' = \{ f \in \Lambda / \, |f| \leqslant |h| \ \text{para algún } h \in B \}$$

también es acotado, por el teorema de Mackey. Se puede suponer pues que B es normal. Como $\chi_{A_p^\alpha} \in \Lambda^\alpha$

$$\sup_{h \in B} \left| \int_{A_p^\alpha} h\, d\mu \right| = \sup_{h \in B} \int_{A_p^\alpha} |h|\, d\mu < \infty$$

y de esta condición y de la convergencia uniforme en $A^\alpha{}_p$ se deduce que

$$\chi_{A_p^\alpha} \cdot f = \lim_{n \to \infty} f_n \cdot \chi_{A_p^\alpha} \quad \text{en} \quad \beta(\Lambda^\alpha, \Lambda)$$

Entonces, por ser G continua sobre $[\Lambda^\alpha, \beta(\Lambda^\alpha, \Lambda)]$, por ser $\chi_{A_p^\alpha} \cdot f_n$ nula en $E - E_p$, y por el teorema de la convergencia monótona de Lebesgue

$$G(\chi_{A_p^\alpha} \cdot f) = \lim_{n \to \infty} G(\chi_{A_p^\alpha} \cdot f_n) = \lim_{n \to \infty} \int_{A_p^\alpha} f_n \varphi\, d\mu = \int_{A_p^\alpha} f \varphi\, d\mu$$

Tomemos ahora n tal que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(H \cap K_i) = \mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} (K_i \cap H) \right) < \delta$$

(por ser $\mu(H) < \infty$). Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}(K_i - A_i^{\alpha})\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta}{2^i} < \delta$$

Como f es la suma

$$f = \sum_{i=1}^{5} f \cdot \chi_{J_i}$$

siendo

$$J_1 = E - M;\quad J_2 = \bigcup_{i=n+1}^{\infty}(H \cap K_i);\quad J_3 = \bigcup_{i=n+1}^{\infty}(K_i - H);\quad J_4 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^{\alpha}$$

$$J_5 = \bigcup_{i=1}^{n}(K_i - A_i^{\alpha}),$$

por la condición 1) y 2), se tiene que

$$\left| G(f) - \int_{J_4} f \varphi \, d\mu \right| \leqslant \alpha$$

Este proceso se ha hecho para $\alpha > 0$ arbitrario. Considerándolo para cada valor $\alpha = 1/k$, $k \in N$, obtenemos una sucesión de conjuntos $A_i^{1/k} \subset K_i$ para cada $i \in N$, $k \in N$, y una sucesión estrictamente creciente de naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que, si ponemos

$$W_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} A_i^{1/k}$$

se tiene

$$\left| G(f) - \int_{W_k} f \varphi \, d\mu \right| \leqslant \frac{1}{k} \tag{4}$$

Además, de la demostración del teorema de Egorov, se deduce que si $r > k$ es $A_i^{1/r} \supset A_i^{1/k}$. Como $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente y $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, es fácil comprobar que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(M - \bigcup_{i=1}^{n_k} A_i^{1/k}\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(K_i - A_i^{1/k})\right)$$

Entonces

$$\mu\left(M - \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(M - \bigcup_{i=1}^{n_k} A_i^{1/k}\right)\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(K_i - A_i^{1/k})\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(K_i - A_i^{1/k})\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu(K_i - A_i^{1/k}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{k} \qquad \forall k \in N$$

(recordar que, por construcción es

$$\mu(K_p - A_p^{\alpha}) \leqslant \frac{\delta}{2^p} \leqslant \frac{\alpha}{2^p}).$$

Entonces debe ser

$$\mu\left(M - \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k\right) = 0.$$

Esto junto a la relación (4) nos da

$$G(f) = \lim_{k\to\infty}\int_{W_k} f\varphi\, d\mu = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k} f\varphi\, d\mu = \int_M f\varphi\, d\mu = \int_E f\varphi\, d\mu$$

Como $f \in \Lambda^{\alpha}$ es $f = f^+ - f^-$, la fórmula (3) vale para toda $f \in \Lambda^{\alpha}$ y el teorema queda demostrado, pues $\varphi \geqslant 0$ y $g_k \in \Lambda^{\alpha}$, $k \in N$, implica que $\varphi \in \Lambda$, c. q. d.

En un retículo vectorial, se puede definir el módulo de un elemento mediante $|x| = x^+ + x^-$. Una parte A de un retículo vectorial E se llama normal si $x \in A$ y $|z| \leqslant |x|$, $z \in E$ implica que $z \in A$. Tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.—*Un espacio escalonado de Köthe* $\Lambda(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$ *es normal en su bidual.*

Demostración.—Sea $f \in \Lambda$ y $\varphi \in \Lambda''$, $|\varphi| \leqslant |f|$. Para $h \in \Lambda^{\alpha}$, $|h| \leqslant \chi_A g_k$ es

$$|\varphi(h)| \leq \langle |h|, |\varphi| \rangle \leqslant \langle |h|, |f| \rangle = \int_E |fh|\, d\mu \leqslant \int_A |f|\, g_k\, d\mu$$

Entonces el resultado se deduce inmediatamente del teorema 1 y de las propiedades de la integral

$$\int_E |f| g_k \, d\mu$$

c. q. d.

Podemos aplicar el teorema 1 al estudio de la compacidad débil de $\Lambda(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$.

TEOREMA 3.—*Un conjunto* $H \subset \Lambda(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$ *es* $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$*-relativamente compacto si y sólo si es acotado y se cumplen estas dos condiciones:*

1) *Para cada* g_k *y cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\mu(A) < \delta$ *es*

$$\int_A |f g_k| \, d\mu \leqslant \varepsilon \quad \forall f \in H$$

2) *Para cada* g_k *y cada* $\varepsilon > 0$ *existe* M *con* $\mu(M) < \infty$ *tal que*

$$\int_{E-M} |f g_k| \, d\mu \leqslant \varepsilon \quad \forall f \in H$$

DEMOSTRACIÓN.—Necesidad. Sea H $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$ relativamente compacto. Entonces es acotado. Si 1) no fuera cierto existirían g_k, $\varepsilon > 0$, una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en H tales que

$$\mu(A_n) \leqslant \frac{1}{n}, \qquad \int_{A_n} |f_n g_k| \, d\mu \geq 2\varepsilon \quad \forall n \in N$$

Si

$$A_n^+ = \{t \in A_n / f_n(t) \geq 0\} \quad \text{y} \quad A_n^- = \{t \in A_n / f_n(t) < 0\},$$

para cada $n \in N$ se tiene

$$\int_{A_n^+} f_n g_k \, d\mu \geq \varepsilon \quad \text{ó} \quad -\int_{A_n^-} f_n g_k \, d\mu \geq \varepsilon$$

Como — H también es $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$ relativamente compacto, se puede suponer que hay una subsucesión $\{f_{n_r}\}_{r=1}^{\infty} \subset$ H y una sucesión de conjuntos $\{A'_{n_r}\}_{r=1}^{\infty}$ tales que

$$\mu(A'_{n_r}) \leqslant \frac{1}{n_r}, \quad f_{n_r}(t) \geq 0 \quad \forall t \in A'_{n_r}, \quad \int_{A'_{n_r}} f_{n_r} g_k \, d\mu \geq \varepsilon \tag{5}$$

Por el teorema de Dieudonné-Schwartz, existe una subsucesión de $\{f_{n_r}\}_{r=1}^{\infty}$, que se sigue denotando igual, tal que f_{n_r} es $\sigma(\Lambda, \Lambda^{\alpha})$ convergente a $f \in \Lambda$. Por tanto, como para cada $F \in \mathcal{R}$, $\chi_F \cdot g_k \in \Lambda^{\alpha}$, por el teorema de Vitali-Hahn-Saks, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(A) < \delta$ es

$$\sup_{D \subset A} \int_D f_{n_r} g_k \, d\mu + \left| \inf_{D \subset A} \int_D f_{n_r} g_k \, d\mu \right| \leqslant \varepsilon \qquad \forall r \in N$$

y como n_r tiende a infinito con r, esto contradice (5), luego se cumple 1).

Si 2) no fuera cierto, existirían g_k y $\varepsilon > 0$ tales que, para cada A con $\mu(A) < \infty$, existiría $f \in$ H tal que

$$\int_{E-A} |f g_k| \, d\mu > \varepsilon$$

Entonces, comenzando con un conjunto cualquiera A_1 de medida finita no nula, se puede construir una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos disjuntos dos a dos, de medida finita, y una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en H tales que

$$\int_{A_n} |f_n g_k| \, d\mu > \varepsilon \qquad \forall n \in N \tag{6}$$

Igual que antes, se puede suponer que $\chi_{A_n} f_n \geqslant 0$, $n \in N$. Por el teorema de Dieudonné-Schwartz, obtenemos una subsucesión convergente a f en $\sigma(\Lambda, \Lambda^{\alpha})$, y que aún se sigue denotando igual. Como

$$Y_n = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) - \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right), \qquad n \in N$$

es una sucesión contractiva, cuya intersección total es vacía, por el teorema de Vitali Hahn-Saks, existe n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ es

$$\sup_{D \subset Y_n} \int_D f_r g_k \, d\mu + \left| \inf_{D \subset Y_n} \int_D f_r g_k \, d\mu \right| \leqslant \varepsilon \quad \forall r \in N$$

lo cual contradice (6), pues $A_{n+1} \subset Y_n$. Luego se cumple 2).

Suficiencia. Supongamos que H es acotado y cumple 1) y 2). La $\sigma(\Lambda'', \Lambda^\alpha)$ clausura de H en Λ'', $\overline{H}$, es $\sigma(\Lambda'', \Lambda^\alpha)$-compacto pues H es acotado en Λ. Si probamos que $\overline{H} \subset \Lambda$, H será relativamente débilmente compacto y el teorema estará probado. Sea $\varphi \in \overline{H}$. Por 1), dado g_k y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(A) < \delta$ es

$$\int_A |f g_k| \, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall f \in H$$

Sea $h \in \Lambda^\alpha$, tal que $|h| \leqslant \chi_A g_k$. Como $\varphi \in \overline{H}$ existe $f \in H$ tal que

$$\left| \int_E f h \, d\mu - \langle \varphi, h \rangle \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

y entonces

$$|\langle \varphi, h \rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_E f h \, d\mu \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_A |f g_k| \, d\mu \leqslant \varepsilon$$

y se cumple la condición 1) del teorema 2. Análogamente, por 2) se cumple la condición 2) del teorema 2. Entonces $\varphi \in \Lambda$. c. q. d.

Pasemos a estudiar la reflexividad de los espacios escalonados $\Lambda^p(E, \mathcal{R}, \mu, g_k)$.

TEOREMA 4.—*Un espacio escalonado de Köthe* $\Lambda^p(E, \mathcal{R}, \mu, g_k)$, $p > 1$ *es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN.—Cada $\Lambda^p{}_k$, $k \in N$ es reflexivo por ser isométrico a un espacio L^p, $p > 1$. Como

$$[\Lambda^p, \mathcal{T}] = \underset{\longleftarrow}{\lim} I_{nm} (\Lambda^p{}_n, \mathcal{T}_n),$$

$[\Lambda^p, \mathcal{T}]$ es semi-reflexivo, y al ser de Frechet es reflexivo. c. q. d.

DEFINICIÓN.—Dado un espacio medida $(E, \mathcal{H}, \mu)$ se dice que $A \in \mathcal{H}$ es un átomo si $\mu(A) > 0$ y para toda parte $B \in \mathcal{H}$, $B \subset A$, se tiene $\mu(B) = 0$ o $\mu(B) = \mu(A)$. Si el conjunto $A \in \mathcal{H}$ no contiene ningún átomo se llama puramente no atómico. Si todo conjunto de medida finita es unión de átomos, el especio se llama puramente atómico.

LEMA.—*Sea M un átomo del espacio medida* $(E, \mathcal{H}, \mu)$ *y sea* f *medible en E. Entonces* f *es constante en M c. t. p.*

DEMOSTRACIÓN.—Se puede suponer que $f \geqslant 0$. Es claro que existe $n_1 \in N$ tal que

$$\mu(M_1) = \mu\{t \in M / f(t) \in I_1 = [0, n_1]\} \neq 0 \quad y \quad \mu(M_1) > 0$$

por ser M un átomo y tener $(E, \mathcal{H}, \mu)$ la propiedad de los subconjuntos finitos. Entonces debe ser

$$\mu(M - M_1) = \mu(N_1) = 0$$

Se puede construir inductivamente una sucesión de partes $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ de M y una sucesión contractiva de intervalos cerrados I_k tales que si $|I_k|$ es la longitud de I_k, sea

$$|I_k| = |I_1| / 2^{k-1}, \quad \mu(N_k) = 0$$

y

$$f(t) \in I_k \quad si \quad t \in M - \bigcup_{i=1}^{k} N_i.$$

En efecto, basta pensar que si $I_k = [a, b]$ se tiene

$$T = M - \bigcup_{i=1}^{k} N_i = \left\{t \in T / f(t) \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right[\right\} \cup \left\{t \in T / f(t) \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]\right\};$$

por ser M átomo, uno de estos conjuntos, que llamaremos N_{k+1} debe tener medida cero; llamando I_{k+1} a la clausura del intervalo correspondiente al otro conjunto, se tienen las condiciones deseadas. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k\right) = 0 \quad y \text{ si } \quad t \in M - \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k,$$

debe ser

$$f(t) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k .$$

Pero esta intersección consta de un solo punto. c. q. d.

Entonces, si M es un átomo el valor constante c. t. p. de una función medible f en M se denotará por f (M).

Necesitaremos el concepto de K-isomorfismo.

DEFINICIÓN.—Dos espacios escalonados de Köthe

$$\Lambda^p(E, \mathcal{R}, \mu, g_k) \quad \text{y} \quad \Gamma^p(T, \mathcal{B}, \nu, h_k), \quad p \geq 1$$

se llaman K-isomorfos si existe una biyección $G: \Lambda^p \longrightarrow \Gamma^p$ tal que

$$\int_T |G(f)|^p h_k \, d\nu = \int_E |f|^p g_k \, d\mu \quad \forall f \in \Lambda^p, \quad \forall k \in N$$

También usaremos el siguiente teorema de Valdivia, demostrado en [2]:

TEOREMA 4.—*Sea E un espacio de Frechet y F un subespacio de su bidual E″ tal que E y F sean algebraicamente complementarios en E″. Si F es* $\beta(E'', E')$ *separable y E es* $\sigma(E, E')$ *sucesionalmente completo, entonces E es reflexivo.*

TEOREMA 5.—*Se tienen las siguientes equivalencias para un espacio escalonado de Köthe* $\Lambda(E, \mathcal{R}, \mu, g_k)$:

1) $[\Lambda, \mathcal{T}]$ *es reflexivo.*

2) $(E, \mathcal{R}, \mu)$ *es puramente atómico y no existe ninguna sucesión infinita de átomos* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que existe* g_{k_0} *y una sucesión* $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de números mayores que cero tal que*

$$g_{k_0+n}(X_j) \leqslant M_n \, g_{k_0}(X_j) \quad \forall n \in N, \quad \forall j \in N$$

3) $[\Lambda, \mathcal{T}]$ *es K-isomorfo a un espacio escalonado de sucesiones reflexivo.*

4) $[\Lambda, \mathcal{T}]$ *es de Montel.*

5) $[\Lambda^{\alpha}, \beta(\Lambda^{\alpha}, \Lambda)]$ *es separable.*

6) $[\Lambda'', \beta(\Lambda'', \Lambda^{\alpha})]$ *es separable*

DEMOSTRACIÓN.—1) $\Longrightarrow$ 2) Recordemos que (E, $\mathcal{H}$, μ) se supone siempre con la propiedad de los subconjuntos finitos. Supongamos que existiera una parte T, $0 < \mu(T) < \infty$ puramente no atómica. Sea $k_0 \in N$ tal que

$$\mu(T \cap S(g_{k_0})) > 0.$$

Podemos seguir llamando T a este conjunto, para simplificar la escritura. Entonces, partiendo de $T = A_0$ se puede construir por inducción una sucesión contractiva $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de partes de T, y una sucesión estrictamente creciente $\{k_n\}_{n=1}$ tales que

$$\mu(A_r - A_{r+1}) \leqslant \frac{\mu(T)}{2^{r+2}}\ ; \quad g_{r+2}(t) \leqslant k_{r+1} g_{k_0}(t) \quad \forall\, t \in A_{r+1},\ \forall\, r \in N$$

En efecto, construido A_n y k_n, como

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ t \in {}_n / \frac{g_{n+2}(t)}{g_{k_0}(t)} \leqslant k \right\}$$

existe $k_{n+1} > k_n$, tal que, si

$$A_{n+1} = \left\{ t \in A_n / \frac{g_{n+2}(t)}{g_{k_0}(t)} \leqslant k_{n+1} \right\}$$

se tiene

$$\mu(A_n - A_{n+1}) < \frac{\mu(T)}{2^{n+2}}\ .$$

Sea

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Es fácil ver que

$$\mu(A) \geq \frac{\mu(T)}{2} > 0.$$

Como una sucesión convergente en $[\Lambda, \mathcal{T}]$ posee una subsucesión convergente puntualmente c. t. p. (ver [1]) el conjunto

$$\Delta = \{ f \cdot \chi_A,\ f \in \Lambda \}$$

es un subespacio cerrado de Λ. Por las propiedades de la sucesión $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, Δ con la topología inducida por $\mathcal{T}$ es un espacio normado con la norma

$$\|f \chi_A\| = \int_A |f g_{k_0}| \, d\mu$$

que es isométrico al espacio de Lebesgue $L^1(A, \mu)$ mediante la aplicación

$$\varphi : \Delta \longrightarrow L^1(A, \mu)$$

tal que

$$\varphi(\chi_A \cdot f) = \chi_A \cdot f \cdot g_{k_0}$$

Como $[\Lambda, \mathcal{T}]$ es de Frechet reflexivo, Δ debe ser reflexivo, y como es isométrico a un espacio L^1 debe ser de dimensión finita. Pero esto es absurdo, pues debe existir $n \in N$ tal que

$$\infty > \mu(G_n) = \mu \}t \in A / g_{k_0}(t) \leqslant n\{ > 0$$

Como G_n no es átomo, ni sus partes tampoco, existe $T_1 \subset G_n$ tal que

$$0 < \mu(T_1) \leqslant \frac{1}{2} \mu(G_n),$$

y en general, por inducción, existe

$$T_m \subset G_n - \bigcup_{i=1}^{m-1} T_i$$

tal que

$$0 < \mu(T_m) \leqslant \frac{1}{2^m} \mu(G_n)$$

Es claro que para cada $m \in N$, $\chi_{T_m} \in \Delta$ y son funciones linealmente independientes.

La demostración de la otra condición es análoga trabajando con

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

siendo $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión infinita de átomos que no cumpla la condición exigida, c. q. d.

2) $\Longrightarrow$ 3) Sea $\{X_i, i \in I\}$ la familia de todos los átomos de $(E, \mathcal{H}, \mu)$. Veamos que esa familia es numerable. Supongamos que no lo fuera. Debe existir entonces $k \in N$ tal que

$$\{X_i, i \in I/g_k(X_i) \neq 0\}$$

sea no numerable. Por comodidad, se puede suponer, pues, que ese conjunto comprende todos los X_i, $i \in I$. Como

$$\{X_i, i \in I\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_i/g_{k+1}(X_i) \leqslant n\, g_k(X_i)\}.$$

debe existir un conjunto

$$A_1 = \{X_i/g_{k+1}(X_i) \leqslant n_1 g_k(X_i)\}$$

no numerable. Tomemos un $X_1 \in A_1$. Por inducción, si tenemos construido A_r no numerable, $X_r \in A_r$ y n_r, como $A_r - \{X_r\}$ es no numerable, deben existir $n_{r+1} > n_r$ tal que el conjunto

$$A_{r+1} = \{X_i \in A_r - \{X_r\}/g_{k+r+1}(X_i) \leqslant n_{r+1} g_k(X_i)\}$$

es no numerable. Tomamos un elemento de A_{r+1} que llamamos X_{r+1}, y podemos proseguir indefinidamente el proceso, Es claro entonces que la sucesión infinita $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ contradice la hipótesis.

Entonces sólo existe una familia numerable $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ de átomos Consideremos ahora el espacio escalonado de sucesiones

$$\lambda = \left\{y = (y_n)/\sum_{n=1}^{\infty} |\, y_n g_k(X_n)\, \mu(X_n)\, | < \infty, \quad \forall k \in N\right\}$$

La aplicación G que a $f \in \Lambda$ le asocia la sucesión $(f(X_n)) \in \lambda$ es claramente un K-isomorfismo y λ es reflexivo, pues la hipótesis del enunciado no hace sino expresar la condición de Köthe de reflexividad de un espacio escalonado de sucesiones, c. q. d.

3) $\Longrightarrow$ 4) Es conocido de la teoría de espacios de sucesiones.

4) $\Longrightarrow$ 1) Trivial.

1) $\Longrightarrow$ 5) Por 3) $[\Lambda, \mathcal{T}]$ es K-isomorfo a un espacio reflexivo

de sucesiones. Se puede suponer, pues, que Λ es un espacio de sucesiones

$$\lambda = \left\{ x = (x_n) / \sum_{n=1}^{\infty} | x_n a^k_n | < \infty \quad \forall k \in \mathrm{N} \right\}$$

Si e_n es la sucesión con todas las componentes cero salvo la n-sima que vale 1, sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales con coeficientes racionales de elementos e_n, $n \in \mathrm{N}$. Es claro que $\mathcal{P}$ es numerable y que $\mathcal{P} \subset \lambda^\alpha$. Veamos que $\mathcal{P}$ es denso en $[\lambda^\alpha, \beta(\lambda^\alpha, \lambda)]$.

Sea $x = (x_n) \geqslant 0$, $x \in \lambda^\alpha$. Existe $\mathrm{C} > 0$ y $k \in \mathrm{N}$ tal que, para todo $n \in \mathrm{N}$ es $x_n \leqslant \mathrm{C}\, a^k_n$. Por ser $[\lambda, \mathfrak{T}]$ reflexivo, si B es un acotado normal de λ, B es $\sigma(\lambda, \lambda^\alpha)$ relativamente compacto, y por el teorema 3, existe $n_0 \in \mathrm{N}$ tal que

$$\sum_{n > n_0} | h_n | a^k_n \leqslant \frac{1}{2\,\mathrm{C}} \qquad \forall h = (h_n) \in \mathrm{B}$$

Sea S_n la sucesión $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Entonces si $n > n_0$

$$\sup_{h \in \mathrm{B}} | \langle x - \mathrm{S}_n, h \rangle | = \sup_{h \in \mathrm{B}} \left| \sum_{i > n} x_i h_i \right| \leqslant \mathrm{C} \sup_{h \in \mathrm{B}} \sum_{i > n} | h_i | a^k_i \leqslant \frac{1}{2}$$

luego $x = \lim\limits_n \mathrm{S}_n$ en $[\lambda^\alpha, \beta(\lambda^\alpha, \lambda)]$. Como es claro que S_n se puede aproximar con elementos de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ es denso en $[\lambda^\alpha, \beta(\lambda^\alpha, \lambda)]$, pues toda sucesión de λ^α es diferencia de dos sucesiones positivas, c. q. d.

5) $\Longrightarrow$ 1) Sea $\mathrm{B} \subset \Lambda$ acotado, cerrado y absolutamente convexo. Entonces B es equicontinuo para la topología $\beta(\Lambda^\alpha, \Lambda)$. Como $[\Lambda^\alpha, \beta(\Lambda^\alpha, \Lambda)]$ es separable, la topología $\sigma(\Lambda'', \Lambda^\alpha)$ es metrizable en los equicontinuos de Λ''. Luego $\sigma(\Lambda'', \Lambda^\alpha)$ es metrizable en B, y por tanto la topología $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$ es metrizable en B (pues $\sigma(\Lambda'', \Lambda^\alpha)$ y $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$ inducen la misma topología en B). Como $[\Lambda, \mathfrak{T}]$ es $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$ sucesionalmente completo (teorema 1), y B es $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$ sucesionalmente completo (teorema 1), y B es $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$ cerrado, B es $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$-completo y por tanto $[\Lambda, \mathfrak{T}]$ es reflexivo, c. q. d.

6) $\Longrightarrow$ 1) En este caso, $[\Lambda'', \beta(\Lambda'', \Lambda^\alpha)]$ es metrizable y separable, luego todo complemento algebraico de Λ en Λ'' debe ser separable. Por el teorema 1 y el teorema 4, $[\Lambda, \mathfrak{T}]$ es reflexivo, c. q. d.

1) $\Longrightarrow$ 6) En este caso $[\Lambda, \mathcal{T}] = [\Lambda'', \beta(\Lambda'', \Lambda^\alpha)]$. Por 3), $[\Lambda, \mathcal{T}]$ es K-isomorfo a un espacio reflexivo escalonado de sucesiones, y por tanto separable, c. q. d.

Para los espacios $\Lambda^p(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$, $p > 1$ tenemos:

TEOREMA 5.—*Las condiciones siguientes son equivalentes para un espacio escalonado* $\Lambda^p(E, \mathcal{H}, \mu, g_k)$, $p > 1$:

1) $[\Lambda^p, \mathcal{T}]$ *es de Montel.*

2) $(E, \mathcal{H}, \mu)$ *es puramente atómico y no hay ninguna sucesión infinita de átomos* $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ *tal que existe* g_{k_0} *y una sucesión* $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ *de constantes mayores que cero tales que*

$$g_{k_0+n}(X_i) \leqslant M_n g_{k_0}(X_i) \quad \forall i \in N, \quad \forall n \in N$$

3) $[\Lambda^p, \mathcal{T}]$ *es K-isomorfo a un espacio de sucesiones de Montel.*

DEMOSTRACIÓN.—1) $\Longrightarrow$ 2) La demostración es exactamente igual que la de la implicación 1) $\Longrightarrow$ 2) del teorema 4, llegándose en este caso a la contradicción de que Δ sería un espacio de Banach de dimensión infinita y de Montel, c. q. d.

2) $\Longrightarrow$ 3) Exactamente igual que la demostración de 2) $\Longrightarrow$ 3) del teorema 4, por la condición de Köthe para que un λ^p sea de Montel.

3) $\Longrightarrow$ 1) Trivial.

NOTA.—Si Λ^p, $p > 1$ es de Montel

$$[(\Lambda^p)^{\alpha}, \beta((\Lambda^p), \Lambda^p)]$$

es separable. En efecto, por el teorema 5, $[\Lambda^p, \mathcal{T}]$ es K-isomorfo a un espacio de sucesiones de Montel λ^p. En $(\lambda^p)^\alpha$ el conjunto de las combinaciones lineales con coeficientes racionales de los elementos e_n, $n \in N$ es $\sigma((\lambda^p)^\alpha, \lambda^p)$ denso en $(\lambda^p)^\alpha$. Como λ^p es reflexivo, ese conjunto también es denso en $\beta((\lambda^p)^\alpha, \lambda^p)$ pues $\beta((\lambda^p)^\alpha, \lambda^p)$ es compatible con la dualidad $\langle(\lambda^p)^\alpha, \lambda^p\rangle$. Luego

$$[(\Lambda^p)^\alpha, \beta((\Lambda^p)^\alpha, \Lambda^p)]$$

es separable.

El recíproco no es cierto: Si

$$p > 1 \quad \text{y} \quad 1/p + 1/q = 1,$$

el espacio L^q [0, 1] es separable, es dual fuerte de L^p [0, 1], pero L^q [0, 1] no es de Montel.

Referencias

[1] LÓPEZ MOLINA, J. A. (1980). The dual and bidual of an echelon Köthe space. *Collec. Math.*, XXXI, **2**, 159-191.
[2] VALDIVIA, M. (1976). On metrizable locally convex spaces. *Arch. Math.*, **27**, 79-85.
[3] ZAANEN, A. C. (1967). Integration. North Holland.

Cátedra de Matemáticas
E. T. S. Ingenieros Agrónomos
Córdoba