EL TEOREMA DE RADON-NIKODYM EN ESPACIOS BORNOLOGICOS

F. Bombal Gordón

Recibido: 9 mayo 1979

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Several proofs of Radon-Nikodym type theorems for measures with values in locally convex spaces which appear in the literature, usually involve an embedding in an appropiate Banach space built on the range of the vector measure, and an application of the Banach space result. The bornological character of these proofs made us to ask for a general Radon-Nikodym theorem for bornological spaces. In this paper we establish that theorem, which specializes to improve several known results. For this purpose, we make an essential use of [1], where we establish a theory of measure and integration in bornological convex spaces.

Introducción y notaciones

Aunque los primeros resultados sobre teoremas del tipo de Radon-Nikodym para medidas con valores en un espacio de Banach, se remontan a los trabajos de Dunford, Pettis y Phillips en la década de los 40, no es hasta 1968 cuando Metivier y Rieffel, independientemente, establecen condiciones necesarias y suficientes para la validez del teorema de Radon-Nikodym en espacios de Banach para la integral de Bochner, y Moedomo y Uhl extienden estos resultados para la integral de Pettis. El establecimiento de teoremas análogos para medidas con valores en clases más amplias de espacios localmente convexos ha motivado gran número de trabajos (véase la bibliografía). Una técnica muy utilizadas consiste en la construcción de un espacio de Banach adecuado sobre la imagen (acotada) de la medida vectorial, y aplicar entonces el resultado de espacios de Banach. El carácter indiscutiblemente bornológico de este procedimiento hace pensar que un enfoque de este tipo permitiría sistematizar muchos de los resultados obtenidos, así como obtener otros nuevos. En este trabajo se intenta llevar a cabo este programa. Para ello, resultan esenciales los resultados de [1], en donde se establece una teoría de la medida e integración en espacios bornológicos convexos. Se obtiene un teorema del tipo de Radon-Nikodym para espacios bornológicos que, en particular, se especializa para obtener muchos de los resultados conocidos con ventajas adicionales, pues en las mismas hipótesis se obtienen funciones de densidad respecto a una noción de integración que, en general, es más estricta que las utilizadas en los distintos trabajos citados.

En general, para las nociones no definidas a continuación, nos remitimos a [7] y [14]. Por un e. b. c. (resp. e. l. c.) se entenderá siempre un espacio bornológico convexo (resp. espacio vectorial topológico localmente convexo) y separado, sobre el cuerpo K de los reales o los complejos. Para cada disco acotado $B \subset E$ se designará por E_B el s. v. engendrado por B en E, dotado de la norma p_B = funcional de Minkowski de B. $E^\times$ (resp. E') designará el dual bornológico (resp. topológico) de un e. b. c. (resp. e. l. c.) E. Se supondrá siempre que los e. b. c. que aparecen son regulares, es decir, que $E^\times$ separa los puntos de E. Si Ω es un conjunto y $A \subset \Omega$, designaremos por C_A la función característica de A. Finalmente, si m es una medida con valores en el e. l. c. E, para cada seminorma continua p sobre E se define la p-variación

$$|m|_p(S) = \operatorname{Sup}\{\Sigma\, p(m(S_i))\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones finitas de S en conjuntos medibles. $|m|_p$ es una medida escalar; se dice que m es de variación acotada si $|m|_p$ es una medida finita para cada seminorma continua p.

Preliminares

A continuación, para comodidad del lector, expondremos las definiciones y resultados sobre la teoría de la medida e integración en espacios bornológicos que se utilizarán a lo largo del trabajo. En todo caso, nos remitiremos a [1] para las demostraciones y aclaraciones pertinentes.

En lo que sigue, designaremos por Ω un conjunto, Σ una σ-álgebra de partes de Ω y μ una medida finita, positiva y completa sobre Σ. Para cada $S \in \Sigma$, escribiremos

$$\Sigma_S = \{T \cap S : T \in \Sigma \quad \text{y} \quad \Sigma_S{}^+ = \{T \in \Sigma_S : \mu(T) > 0\}.$$

Si E es un e. b. c. completo, una *medida bornológica* con valores en E es una aplicación $m : \Sigma \longrightarrow E$ tal que $m(\emptyset) = 0$ y para toda sucesión disjunta (A_n) de elementos de Σ verifica

$$m\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),$$

donde el segundo miembro es subserie convergente en sentido de Mackey (es decir, en algún espacio E_B, con B disco acotado).

Una función $f : \Omega \longrightarrow E$ es ***b-medible*** si existe una sucesión (f_n) de funciones simples que converge a f casi uniformemente en sentido de Mackey, es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe $K_\varepsilon \in \Sigma$ y un disco acotado B_ε tal que $\mu(\Omega \backslash K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ y (f_n) converge uniformemente a f sobre K_ε en el espacio normado E_{B_ε}. Diremos que (f_n) es una *sucesión aproximadora* de f y escribiremos

$$U(f, f_n) = \{K \in \Sigma : f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente sobre K en el sentido de Mackey}\}.$$

Para cada $K \in U(f, f_n)$ existe un disco completante acotado B_K tal que $f_K = c_K f : \Omega \longrightarrow E_B$ es integrable Bochner, y el elemento

$$\int f_k \, d\mu = \int_K f \, d\mu \in E_{B_K}$$

no depende del disco B_K elegido. Una función b-medible se llama ***b-integrable*** si verifica alguna de las dos condiciones equivalentes siguientes:

I) Si (f_n) es una sucesión aproximadora de f, para cada sucesión disjunta (K_n) de elementos de $U(f, f_n)$, existe un disco acotado completante B tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{K_n} f \, d\mu$$

es sumable en E_B.

II) Se verifica:

i) Para cada $x' \in E^\times$, la función $t \longrightarrow \langle f(t), x' \rangle$ es integrable.

ii) Para cada $A \in \Sigma$, existe $\int_A f \, d\mu \in E$ tal que

$$\left\langle \int_A f \, d\mu, x' \right\rangle = \int_A \langle f, x' \rangle \, d\mu, \quad \forall x' \in E^\times$$

iii) La aplicación

$$\Sigma \ni A \longrightarrow \mu_f(A) = \int_A f \, d\mu$$

es una medida bornológica.

En particular, si existe un disco acotado completante B tal que $f(t) \in E_B$ para casi todo t, y la función $f : \Omega \longrightarrow E_B$ (definida en casi todo punto) es integrable Bochner, evidentemente f es b-integrable. Por razones obvias, llamaremos *funciones integrables Bochner* a este tipo de funciones b-integrables (véase [1]).

Si E es un e. l. c., una aplicación $f : \Omega \longrightarrow E$ diremos que es b-integrable, si lo es como función con valores en el e. b. c. (E, β), donde β es la bornología de Von Neumann de E.

Finalmente, citemos que se cumple el siguiente teorema del valor medio:

«Si $f : \Omega \longrightarrow E$ es b-integrable y S es un subconjunto absolutamente convexo y $\sigma(E, E^\times)$-cerrado tal que

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in S, \quad \forall A \in \Sigma^+,$$

entonces $f(t) \in S$ para casi todo $t \in \Omega$.»

El teorema de Radon-Nikodym

El objeto principal de este trabajo es caracterizar cuándo una medida bornológica m con valores en un e. b. c. E, es del tipo μ_f para alguna función b-integrable f. Obviamente, m debe verificar la condición necesaria siguiente: Si $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = 0$, entonces $m(A) = 0$, es decir, m debe ser *absolutamente continua respecto de* μ (o μ-continua). Esta condición es suficiente cuando $E = \mathbb{K}$, pero no lo es en absoluto en el caso general, como es bien conocido (véase, por ej., [4], III.1). Como consecuencia de los resultados de Rieffel [12], Metivier [9] y Moedomo y Uhl [10], entre otros, se puede enunciar el siguiente teorema:

1. TEOREMA *(Teorema de Radon-Nikodym para espacios de Banach).—Sea E un espacio de Banach y* $m : \Sigma \longrightarrow E$ *una medida vectorial* μ*-continua. Son equivalentes:*

1.1. *Existe* $f : \Omega \longrightarrow E$ *medible Bochner e integrable Pettis tal que*

$$m(S) = \int_S f \, d\mu, \quad \forall S \in \Sigma.$$

1.2. *Para cada* $S \in \Sigma^+$, *existe* $T \in \Sigma^+_S$ *tal que*

$$A(T) = \{m(A)/\mu(A) : A \in \Sigma_T^+\}$$

es relativamente compacto.

1.3. *Para cada* $S \in \Sigma^+$, *existe* $T \in \Sigma^+_S$ *tal que* $A(T)$ *es débilmente relativamente compacto.*

(Véase también [4], III.2.7 y III.2.18). El siguiente teorema es la extensión natural del resultado anterior en el marco de los espacios bornológicos:

2. TEOREMA *(Teorema de Radon-Nikodym para espacios bornológicos).—Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida finita, E un e. b. c. completo y* $m : \Sigma \longrightarrow E$ *una medida bornológica absolutamente continua respecto de* μ. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

2.1. *Existe* $f : \Omega \longrightarrow E$ *b-integrable tal que* $m = \mu_f$.

2.2. *Para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $K_\varepsilon \in \Sigma$ *y un disco acotado completante* B_ε, *tales que* $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ *y*

$$A(K_\varepsilon) = \{m(S)/\mu(S) : S \in \Sigma^+_{K_\varepsilon}\}$$

es relativamente compacto en E_{B_ε}.

2.3. *Para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $K_\varepsilon \in \Sigma$ *y un acotado completante* B_ε, *tales que* $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ *y* $A(K_\varepsilon)$ *es débilmente relativamente compacto en* E_{B_ε}.

2.4. *Para cada* $T \in \Sigma^+$, *existe* $S \in \Sigma^+_T$ *y un disco acotado completante* B_S *tal que* $A(S)$ *es relativamente compacto en* E_{B_S}.

2.5. *Para cada* $T \in \Sigma^+$ *existe* $S \in \Sigma^+_T$ *y un disco acotado completante* B_S *tal que* $A(S)$ *es débilmente relativamente compacto en* E_{B_S}.

DEMOSTRACIÓN.—2.1 $\Longrightarrow$ 2.2. La demostración es análoga al caso de espacios de Banach: Sea (f_n) una sucesión aproximadora de f y $K_\varepsilon \in U(f, f_n)$, B_ε disco acotado completante, tales que $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ y (f_n) converja a f uniformemente sobre K en el espacio de Banach E_{B_ε}. Entonces $f_\varepsilon = C_K f : \Omega \longrightarrow E_{B_\varepsilon}$ es acotada e integrable Bochner, luego el operador de $L^1(\mu)$ en E_{B_ε} definido por:

$$T(\varphi) = \int \varphi f_\varepsilon \, d = \int_{K_\varepsilon} \varphi f \, d\mu$$

es compacto (véase [4], III.2.1) y, por tanto,

$$A(K) \subset T\,\{\text{bola unidad de } L^1(\mu)\}$$

es relativamente compacto.

2.2 $\Longrightarrow$ 2.3 y 2.4 $\Longrightarrow$ 2.5 son triviales.

2.2 $\Longrightarrow$ 2.4 y 2.3 $\Longrightarrow$ 2.5: Sea $T \in \Sigma^+$ y tomemos $\varepsilon = \mu(T)/2$. Por 2.2 (resp. 2.3) existe $K_\varepsilon \in \Sigma$ y B_ε disco acotado completante, tales que $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ y $A(K_\varepsilon)$ es (débilmente) relativamente compacto. Tomando $S = T \cap K_\varepsilon$ se tiene

$$\mu(S) \geqq \mu(T)/2 \quad \text{y} \quad A(S) \subset A(K_\varepsilon).$$

2.5 $\Longrightarrow$ 2.1. La propiedad de ser A (S) débilmente relativamente compacto en algún E_B la verifican los conjuntos de medida 0 y es hereditaria por inclusión y uniones finitas. Por tanto, si se cumple 2.5, se verifican todas las hipótesis del lema III.2.4 de [4] y, en consecuencia, existe una sucesión disjunta (K_n) de elementos de Σ^+ y otra (B_n) de discos acotados completantes, de modo que $\Omega = \bigcup K_n$ y $A(K_n)$ sea débilmente relativamente compacto en E_{B_n}. Sea

$$m_n : \Sigma_{K_n} \longrightarrow E_{B_n}$$

la restricción de m a Σ_K. Como $A(K_n)$ es acotado en E_{B_n}, podemos suponer que $A(K_n) \subset B_n$. Si p_n es la norma en E_{B_n}, se tiene

$$p_n(m_n(S)) \leqslant \mu(S), \quad \forall S \in \Sigma_{K_n}$$

lo que prueba que m_n es una medida vectorial con valores en E_{B_n}, μ-continua y de variación acotada, tal que

$$A_n(K_n) = \{m_n(S)/\mu(S) : S \in \Sigma_{K_n}\} = A(K_n)$$

es débilmente relativamente compacto. Por el teorema 1, existe entonces una función $f_n : K_n \longrightarrow E_{B_n}$ integrable Bochner, tal que

$$m(S \cap K_n) = \int_{K_n \cap S} f_n \, d\mu, \quad \forall S \in \Sigma.$$

Sea (f^i_n) una sucesión de funciones simples de K_n en E_{B_n} que converja casi uniformemente a f_n en E_{B_n}. Definamos f^i_n y f_n iguales a 0 fuera de K_n y

$$g_i(t) = \sum_{n=1}^{i} f^i_n(t), \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t).$$

Cada $g_i : \Omega \longrightarrow E$ es simple; si $t \in K_n$, $f(t) = f_n(t)$, luego f está bien definida.

i) f es b-medible. En efecto, probemos que g_i converge a f casi uniformemente en el sentido de Mackey: Sea $\varepsilon > 0$ y $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(\Omega \setminus \bigcup_{1}^{r} K_n) \leqslant \varepsilon/2.$$

Para cada $n = 1, 2, \ldots, r$, sea $S_n \in \Sigma_{K_n}$ tal que

$$\mu(K_n \setminus S_n) \leqslant \varepsilon/2r.$$

y (f^i_n) converja a f_n uniformemente sobre S_n en E_{B_n}. Entonces

$$\mu(\Omega \setminus \bigcup_{1}^{r} S_n) \leqslant \varepsilon.$$

Dado $\delta > 0$, existe $i_0 > r$ tal que si $i \geqslant i_0$, entonces

$$p_n(f^i_n(t) - f_n(t)) < \delta \quad \text{para} \quad n = 1, \ldots, r, \text{y} \quad t \in S_n.$$

Por tanto, si B es un disco acotado completante que contiene a $B_1 \cup \ldots \cup B_r$ resulta que si

$$t \geq i_0 \quad \text{y} \quad t \in \bigcup_1^r S_{n'}$$

existe un único $n_0 \leqslant r$ tal que $t \in S_{n_0}$, luego

$$p_B(f(t) - g_i(t)) = p_B(f_{n_0}(t) - f^i_{n_0}(t)) \leqslant p_{n_0}(f_{n_0}(t) - f^i_{n_0}(t)) < \delta.$$

ii) f es b-integrable y $m = \mu_f$. En efecto, si $S \in \Sigma$, se tiene

$$\mu(S \setminus \bigcup (S \cap K_n)) = 0,$$

luego

$$m(S) = m(\bigcup S \cap K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(S \cap K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S \cap K_n} f \, d\mu$$

en algún E_B. Pero si $x' \in E^\times$,

$$\langle m(S \cap K_n), x' \rangle = \int_{K \cap S_n} \langle f, x' \rangle \, d\mu \quad \forall n \in N, S \in \Sigma.$$

Como $x' \circ m$ es una medida con valores en $\mathbb{K}$, y por tanto de variación finita, resulta

$$|\langle m(S), x' \rangle| = \left| \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S \cap K_n} f \, d\mu, x' \right\rangle \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S \cap K_n} \langle f, x' \rangle \, d\mu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S \cap K_n} |\langle f, x' \rangle| \, d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x' \circ m| (S \cap K_n) \leqslant |x' \circ m| (\Omega) < \infty .$$

El teorema de la convergencia monótona prueba que $\langle f, x' \rangle C_S$ es integrable para cada $S \in \Sigma$ y $x' \in E^\times$, y además

$$\langle m(S), x' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S \cap K_n} \langle f, x' \rangle \, d\mu = \int_S \langle f, x' \rangle \, d\mu,$$

luego f es b-integrable y $m = \mu_f$.

A continuación veremos cómo el teorema anterior se especializa para obtener algunos de los teoremas del tipo Radon-Nikodym en e. l. c. que aparecen en la literatura:

Recordemos que un e. l. c. verifica la *propiedad estricta de Mackey* si para todo acotado B de E existe un disco cerrado y acotado A de E tal que E_A y E inducen en B la misma topología. Esta propiedad es estable por el paso a sumas directas, subespacios y productos numerables, y la verifican los espacios metrizables ([6], pág. 117). En [1], ej. 11, se prueba que toda medida con valores en un e. l. c. E casi completo que verifica la propiedad estricta de Mackey, es una medida con valores en un espacio de Banach E_B, y por tanto una medida bornológica con valores en el e. b. c. (E, β), siendo β la bornología de Von Neumann de E. En este caso, las funciones b-integrables son las que son límites casi uniformes de una sucesión de funciones simples, e integrables en el sentido de Pettis ([1], ej. 14 (i)). El teorema 2 proporciona entonces el siguiente resultado, debido a Gilliam ([5]):

3. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. casi completo con la propiedad estricta de Mackey, y* $m : \Sigma \longrightarrow E$ *una medida vectorial absolutamente continua respecto de* μ. *Entonces son equivalentes:*

3.1. *Existe* $f : \Omega \longrightarrow E$ *b-integrable, tal que* $m = \mu_f$.

3.2. *Para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $K_\varepsilon \in \Sigma$ *tal que* $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ *y* $A(K_\varepsilon)$ *es relativamente compacto en E.*

3.3. *Para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $K_\varepsilon \in \Sigma$ *tal que* $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ *y* $A(K_\varepsilon)$ *es débilmente relativamente compacto en E.*

3.4. *Para cada* $T \in \Sigma^+$, *existe* $S \in \Sigma^+_T$ *tal que* $A(S)$ *es relativamente compacto en E.*

3.5. *Para cada* $T \in \Sigma^+$, *existe* $S \in \Sigma^+_T$ *tal que* $A(S)$ *es débilmente relativamente compacto en E.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta tener en cuenta que al verificar E la propiedad estricta de Mackey, las condiciones 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 son equivalentes, respectivamente, a 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 (respecto a 2.4 y 2.5, nótese que para un disco A de un e. l. c. F ($= E_B$), el hecho de ser débilmente compacto depende sólo de la topología inducida por F, no por (F, σ(F, F′). Véase [6], Chap. 2, part. B, Ex. 2).

En el caso especial en que E es un espacio de Fréchet, el teorema de Radon-Nikodym fue probado, con técnicas análogas a las de Rieffel, por Chi (véase [2], théor. 2.1), para las funciones integrables usuales (es decir, fuertemente medibles y tales que

$$\int p(f)\, d\mu < \infty$$

para cada seminorma continua). Como veremos a continuación, el teorema 2 permite mejorar estos resultados, por un lado debilitando las hipótesis, y por otro obteniendo funciones de densidad integrables Bochner en sentido bornológico. Comencemos con la siguiente definición:

4. Definición.—Sea E un e. l. c. y β una bornología compatible sobre E. Diremos que E *verifica la propiedad* (B_β) si para todo conjunto acotado M del espacio $l^1_N\{E\}$ de las sucesiones absolutamente sumables de E (con la topología π usual), existe un disco $B \in \beta$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_B(x_n) \leqslant 1 \quad \forall x = (x_n) \in M.$$

Cuando β es la bornología de Von Neumann de E, se obtiene la propiedad (B) de Pietsch ([11], 1.5.5). Del mismo modo, si se sustituye la condición $B \in \beta$ por la de que B sea un disco acotado, cerrado y metrizable, resulta la condición (BM) introducida en [3]. La razón de esta definición, es la siguiente proposición, debida esencialmente a Chi ([3]), en un contexto algo diferente:

5. Proposición.—*Sea E un e. l. c. y β una bornología completa compatible de modo que E verifique la propiedad (B_β). Si* $m : \Sigma \longrightarrow E$ *es una medida vectorial de variación acotada, existe un disco completante $B \in \beta$ tal que* m *es una medida con valores en el espacio de Banach E_B, de variación acotada.*

Demostración.—Sea $M = \{(m(S_n)) : (S_n)$ es sucesión disjunta en $\Sigma\}$. Por ser m de variación acotada, M es un acotado de $l^1_N\{E\}$. Por hipótesis, existe entonces un disco completante $B \in \beta$ tal que M es acotado en $l^1_N\{E_B\}$. En particular, $m(\Sigma) \subset E_B$ y claramente $m : \Sigma \longrightarrow E_B$ es una medida vectorial de variación acotada (por 1).

Recordemos que todo espacio metrizable, (LF), (DF) o dual nuclear verifica la propiedad (B) ([11], 1.5.8 y 4.2.9).

6. TEOREMA.—*Sea E un espacio de Fréchet y* $m : \Sigma \longrightarrow E$ *una medida vectorial absolutamente continua respecto de* μ. *Las condiciones 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5 son equivalentes a:*

6.1. *Existe un disco acotado completante B y* $f : \Omega \longrightarrow E_B$ *medible Bochner e integrable Pettis, tal que*

$$m(S) = \int_S f\, d\mu, \quad \forall S \in \Sigma.$$

Si, además, m *es de variación acotada, en 6.1* f *es integrable Bochner.*

DEMOSTRACIÓN.—Existe un disco acotado completante D tal que m es una medida con valores en el espacio de Banach E_D ([1], ej. **11** (i)). Además, para toda función $f : \Omega \longrightarrow E$ b-medible, existe un disco acotado completante A tal que $f(t) \in E_A$ para casi todo t, y como función con valores en E_A, f es medible Bochner ([1], ej. **14** (ii)). Resulta entonces que si f es b-integrable y $m = \mu_f$, existe un disco acotado completante B tal que:

i) m es una medida con valores en E_B.

ii) $f(\Omega) \subset E_B$ y, como función con valores en E_B, f es medible Bochner.

En consecuencia, para cada $S \in \Sigma^+$, existe $T \in \Sigma^+_S$ tal que $C_T f : \Omega \longrightarrow E_B$ es integrable Bochner y

$$m(A) = \int_A f\, d\mu, \quad \forall \in \Sigma_T.$$

Aplicando entonces el teorema 1 a la función $C_T f$, resulta que se cumple 1.2, y por tanto existe una función $g : \Omega \longrightarrow E_B$ medible Bochner e integrable Pettis tal que

$$m(A) = \int_A g\, d\mu, \quad \forall A \in \Sigma.$$

Evidentemente, g es b-integrable. Aplicando de nuevo el lema III.2.4 de [4] y el teorema del valor medio, resulta entonces que $f = g$ en casi todo punto. Por tanto, 6.1 es equivalente a 3.1.

Si m tiene variación acotada, por la proposición 5 podemos suponer en el razonamiento anterior que $m : \Sigma \longrightarrow E_B$ es de variación acotada. De nuevo por el teorema 1, resulta que f es integrable Bochner.

El teorema anterior permite obtener el siguiente resultado:

7. PROPOSICIÓN (*).—*Sea E un e. l. c. casi completo, $D \subset E$ un disco acotado, cerrado y metrizable, y $m : \Sigma \longrightarrow E_D$ una medida μ-continua de variación acotada. Si se verifica 3.5, existe un disco acotado completante $B \subset E$ que absorbe a D, y una función $f : \Omega \longrightarrow E_B$ integrable Bochner, de modo que $m = \mu_f$.*

DEMOSTRACIÓN.—Siguiendo un razonamiento de Chi ([3]), como consecuencia de [8] se prueba que en E_D puede definirse una F-norma N tal que si $F = (E_D, N)$, se cumple:

i) F induce en D la misma topología que E.

ii) Las inclusiones conónicas $E_D \longrightarrow F \longrightarrow E$ son continuas. (Véase [3], Lemma 3.1.) Por tanto, m es una medida μ-continua de variación acotada con valores en F. Además, para cada $S \in \Sigma^+$, existe $T' \in \Sigma^+_S$ con $A(T')$ débilmente relativamente compacto en E. Como $m : \Sigma \longrightarrow E_D$ es de variación acotada, dado T' existe $T \in \Sigma^+_{T'}$ tal que $A(T)$ es acotado en E_D y, por tanto, existe $r > 0$ de modo que $A(T) \subset r D$. Por el teorema de Krein, la envoltura absolutamente convexa y cerrada de $A(T)$ es débilmente compacta en E y contenida en $r D$ y como F induce en $r D$ la misma topología, que E, por la misma observación que en la demostración del teorema 3, resulta que $A(T)$ es débilmente relativamente compacto en F. Sea $\hat{F}$ el completado de F. Por el teorema 6, existe entonces un disco acotado completante $\hat{B} \subset \hat{F}$, que podemos suponer absorbe a D, y una función integrable Bochner $f : \Omega \longrightarrow \hat{F}_{\hat{B}}$, tal que

$$m(S) = \int_S f \, d\mu, \quad \forall S \in \Sigma.$$

En particular, $f : \Omega \longrightarrow \hat{F}$ es b-integrable. De nuevo por el lema III.2.4 de [4], existe una sucesión disjunta (K_n) de elementos de Σ tal que $\cup K_n = \Omega$ y que B_n = envoltura absolutamente convexa y cerrada en E de $A(K_n)$ sea $\sigma(E, E')$-compacta y acotada en E_D para cada $n \in N$ (y por tanto, $\sigma(\hat{F}, \hat{F}')$-compacta por el razona-

(*) Compárese con [13], théor. 4.

miento hecho anteriormente). Entonces para todo $S \in \Sigma^+_{K_n}$ se tiene

$$\frac{1}{\mu(S)} \int_S f \, d\mu = \frac{m(S)}{\mu(S)} \in B_n \subset r_n D$$

para algún $r_n > 0$. Por el teorema del valor medio, resulta que $f(t) \in B_n \subset r_n D \subset E_D$ para casi todo t de K_n. Por tanto, podemos suponer que $f(t) \in E_D$ para todo t de Ω. Si $\hat{B} = B \cap F$, resulta entonces que $f(t) \in F_B = \hat{F}_{\hat{B}} \cap F$ y B es un acotado en F (y por tanto en E). Además, la inclusión

$$F_B \longrightarrow \hat{F}_{\hat{B}}$$

es una isometría. Si $\mathcal{P}$ es la familia de particiones finitas de Ω en conjuntos de Σ^+, ordenada por refinamiento, y para cada $\pi \in \mathcal{P}$ se pone

$$f_\pi(x) = \sum_{S \in \pi} \frac{m(S)}{\mu(S)} C_S(x) \in E_D,$$

se sabe (véase, por ej., [4], III.2.1) que (f_π) converge a f en $L^1(\mu, \Sigma, \hat{F}_{\hat{B}})$ y existe una subsucesión $f_n = f_{\pi_n}$ que converge a f en casi todo punto en $\hat{F}_{\hat{B}}$. Pero cada f_π toma valores en $E_B = F_B$, luego f, como función con valores en E_B, es fuertemente medible. Del mismo modo resulta que

$$\int p_{\hat{B}}(f_n(t) - f(t)) \, d\mu = \int p_B(f_n(t) - f(t)) \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

luego si tomamos un disco acotado completante $K \subset E$ que contenga a B, resulta que $f : \Omega \longrightarrow E_K$ es integrable Bochner y

$$m(S) = \lim_{n \to \infty} \int_S f_n \, d\mu = \int_S f \, d\mu \quad \text{en} \quad E_K.$$

Como consecuencia, resulta la siguiente extensión del resultado principal de Chi ([3], Théor. 3.1):

8. Corolario.—*Sea E un e. l. c. casi completo con la propie-*

dad (BM) y $\mathrm{m} : \Sigma \longrightarrow E$ *una medida topológica. Son equivalentes:*

8.1. *Existe un disco acotado completante* $B \subset E$ *y* $\mathrm{f} : \Omega \longrightarrow E_B$ *integrable Bochner, tal que* $\mathrm{m} = \mu_f$.

8.2. m *es* μ*-continua, de variación acotada y verifica 3.5.*

Demostración.—Está claro que 8.1 $\Longrightarrow$ 8.2. Para el recíproco, notemos que de la hipótesis y la proposición 5 resulta que existe un disco acotado, cerrado y metrizable $D \subset E$ tal que m es una medida con valores en el espacio de Banach E_D. Basta entonces aplicar la proposición 7.

Un e. b. c. se llama infra-Schwartz (resp., Schwartz, nuclear) si todo disco acotado A es absorbido por un disco acotado B de modo que la inclusión canónica de E_A en E_B sea débilmente compacta (resp., compacta, nuclear). Véase [7].

9. Proposición.—*Sea E un e. b. c. completo infra-Schwartz y* $\mathrm{m} : \Sigma \longrightarrow E$ *una medida bornológica. Son equivalentes:*

9.1. *Existe* $\mathrm{f} : \Omega \longrightarrow E$ *b-integrable, tal que* $\mathrm{m} = \mu_f$.

9.2. m *es* μ*-continua y localmente acotada (es decir, para cada* $S \in \Sigma^+$, *existe* $T \in \Sigma^+_S$ *tal que* $A(T)$ *es acotado).*

Demostración.—Basta aplicar el teorema 2, teniendo en cuenta que por ser E infra-Schwartz, la condición 2.5 es equivalente a que m sea localmente acotada.

10. Corolario.—*Sea E un e. l. c. casi completo verificando la propiedad (B) y tal que si* β *es la bornología de Von Neumann de E, el e. b. c.* (E, β) *es infra-Schwartz. Si* $\mathrm{m} : \Sigma \longrightarrow E$ *es una medida topológica, son equivalentes:*

10.1. *Existe un disco acotado completante* $B \subset E$ *y* $\mathrm{f} : \Omega \longrightarrow E_B$ *integrable Bochner, tal que* $\mathrm{m} = \mu_f$.

10.2. m *es* μ*-continua y de variación acotada.*

Demostración.—Basta probar que 10.2 $\Longrightarrow$ 10.1. Por el corolario 10 de [1], m es una medida bornológica con valores en el c. b. c. (E, β). En consecuencia, de la proposición 9 resulta que $m = \mu_f$ para alguna función f b-integrable. Por la proposición 5, existe un disco acotado completante $D \subset E$ tal que $m = \mu_f$ es una medida con valores en el espacio de Banach E_D, de variación acotada, es decir, f es totalmente integrable en la notación de [1], ej. 21 (iii). El resultado se deduce entonces de la proposición 23 de [1].

11. Observación.—Si E es un e. l. c. casi completo verificando

la propiedad (B) tal que es el dual fuerte de un e. l. c. de Schwartz infratonelado, o su dual fuerte es un e. l. c. de Schwartz (en particular, si E es el dual fuerte de un espacio de Fréchet-Schwartz), se verifican las hipótesis del corolario 10.

12. COROLARIO. — *Sea E un e. b. c. completo nuclear y* $m : \Sigma \longrightarrow E$ *una medida bornológica. Son equivalentes:*

12.1. *Existe un disco acotado completante* $B \subset E$ *y* $f : \Omega \longrightarrow E_B$ *integrable Bochner, tal que* $m = \mu_f$.

12.2. m *es* μ*-continua, localmente acotada y* m (Σ) *es acotado.*

DEMOSTRACIÓN.—Para probar que 12.2 $\Longrightarrow$ 12.1, notemos que por la proposición 9 existe $f : \Omega \longrightarrow$ E b-integrable tal que $m = \mu_f$. Como además se supone $m(\Sigma)$ acotado, el resultado se deduce de la proposición 23 de [1].

13. COROLARIO.—*Sea E un e. l. c. casi completo dual nuclear y* m : $\Sigma \longrightarrow E$ *una medida topológica. Son equivalentes:*

13.1. *Existe un disco acotado completante* $B \subset E$ *y* $f : \Omega \longrightarrow E_B$ *integrable Bochner, tal que* $m = \mu_f$.

13.2. m *es* μ*-continua y localmente acotada.*

DEMOSTRACIÓN.—Consecuencia inmediata del corolario 12.

Bibliografía

[1] BOMBAL GORDÓN, F. (1981). Medida e integración en espacios bornológicos. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **75**, 115-138.

[2] CHI, G. Y. H. (1975). A geometric characterization of Fréchet spaces with the Radon-Nikodym property. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, **48**, 371-380.

[3] CHI, G. Y. H. (1976). On the Radon-Nikodym theorem in locally convex spaces. En «Measure theory», *Lect. Notes in Math.*, n.° 541. Springer, Berlin.

[4] DIESTEL, J. and UHL, J. Jr. (1977). Vector Measures. *Math. Surveys*, 15. Amer. Math. Soc., Providence, R. I.

[5] GILLIAM, D. (1976). Geometry and the Radon-Nikodym theorem in strict Mackey convergence spaces. *Pacific Journal of Math.*, **65**, 353-364.

[6] GROTHENDIECK, A. (1973). Topological vector spaces. Gordon and Breach, New York.

[7] HOGBE-NLEND, H. (1971). Théorie des bornologies et applications. *Lect. Notes in Math.*, n.° 213. Springer, Berlin.

[8] LARMAN, D. G. and ROGERS, C. A. (1973). The normability of metrizable sets. *Bull. London Math. Soc.*, **5**, 39-48.

[9] METIVIER, M. (1967). Martingales á valeurs vectorielles. Applications á la derivation des mesures vectorielles. *Ann. Inst. Fourier,* **2**, 175-208.

[10] MOEDANO, S. and UHL, J. Jr. (1971). Radon-Nikodym theorems for the Bochner and Pettis integrals. *Pac. J. of Math.*, **38**, 531-536.

[11] PIETSCH, A. (1972). Nuclear locally convex spaces. Springer, Berlin.

[12] RIEFFEL, M. A. (1968). The Radon-Nikodym theorem for the Bochner integral. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **131**, 466-487.

[13] SAAB, E. (1976). Sur la propriété de Radon-Nikodym dans les spaces localement convexes de type (BM). *C. R. Acad. Paris*, t. 283, Ser. A, 899-902.

[14] SCHAEFER, H. H. (1971). Topological vector spaces. Springer, Berlin.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense
Madrid