MEDIDA E INTEGRACION EN ESPACIOS BORNOLOGICOS

F. Bombal Gordón

Recibido: 4 abril 1979

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

In this paper we establish a theory of measure and integration in bornological convex spaces. We prove that vector measures and integrable functions with values in a large class of locally convex spaces are actually measures or functions with values in a normed space E_B. This bornological character is even more remarkable in the Radon-Nikodym type theorems for locally convex spaces, where the proofs usually involve an embedding in an appropiate Banach space of type E_B and an application of the Banach space result. In [1] we use the results of this paper to establish a general Radon-Nikodym theorem for bornological spaces which specializes to improve several known results.

Introducción y notaciones

En este trabajo se establecen los principios de una teoría de la medida e integración en espacios bornológicos convexos. Independientemente de su posible interés intrínseco, resulta que las medidas vectoriales y funciones integrables con valores en una amplia clase de espacios localmente convexos, se reducen en último término a medidas o funciones que toman valores en un espacio normado E_B (véanse Cor. 10, Ej. 11 y 14 y Prop. 22 y 23). Por otro lado, este carácter bornológico aparece claramente en los teoremas del tipo de Radon-Nikodym en espacios localmente convexos, ya que muchos de los resultados existentes en la literatura se basan esencialmente en la construcción de un espacio de Banach adecuado sobre la imagen (acotada) de una medida vectorial, para aplicar entonces el teorema correspondiente en espacios de Banach. En [1] se utilizan los resultados de este trabajo para establecer un teorema de Radon-Nikodym en espacios bornológicos, que permite deducir teoremas de este tipo en espacios localmente convexos y, como caso particular, abarca varios de los resultados existentes.

En general, para las nociones que no se definen a continuación, nos remitiremos a [7] y [12]. Por un e. b. c. (resp. e. l. c.) se entenderá siempre un espacio bornológico convexo (resp. espacio vectorial topológico localmente convexo) y separado, sobre el cuerpo K de los reales o los complejos. Para cada disco acotado $B \subset E$ (resp. entorno de **0** absolutamente convexo $U \subset E$) se designará por E_B (resp. E_U) el s. v. engendrado por B en E, dotado de la norma p_B = funcional de Minkowski de B (resp. el espacio $E/p_u^{-1}(0)$, dotado de la norma inducida por p_U = funcional de Minkowski de U). E' (resp. $E^{\times}$) designará el dual topológico (resp. bornológico) de un e. l. c. (resp. e. b. c.) E. Se supondrá siempre que los e. b. c. que aparecen son regulares, es decir, que $E^{\times}$ separa los puntos de E. Si $\langle E, F\rangle$ es un par dual, designaremos como es habitual por $\sigma(E, F)$, $\beta(E, F)$ y $\tau(E, F)$ las topologías débil, fuerte y de Mackey, respectivamente. Si Ω es un conjunto y $A \subset \Omega$, se denotará por C_A la función característica de A. Finalmente, una serie Σx_n en un e. l. c. E la llamaremos subserie convergente, si toda subserie suya converge. Si E es casi completo, esto es equivalente a que la familia (x_n) sea sumable en E, es decir, que la red de sumas finitas sea convergente.

§ 1. Medidas bornológicas

En lo que sigue, Ω designará un conjunto, Σ una σ-álgebra de partes de Ω y para cada $A \in \Sigma$ escribiremos $\Sigma_A = \{B \cap A : B \in \Sigma\}$.

1. Definición.—Sea E un e. l. c. (resp. e. b. c.). Una *medida topológica* (resp. *bornológica*) sobre (Ω, Σ) con valores en E es una aplicación $m : \Sigma \longrightarrow E$ tal que $m(\varnothing) = \mathbf{0}$ y para toda sucesión disjunta (A_n) de elementos de Σ verifica

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

donde el segundo miembro es subserie convergente (resp. subserie convergente en el sentido de Mackey).

De la definición resulta inmediatamente que si (A_n) es una sucesión monótona de elementos de Σ, se cumple $\lim m(A_n) = m(\lim A_n)$. Asimismo, está claro que toda medida bornológica es una medida (topológica) con valores en el e. l. c. $(E, \tau(E, E^\times))$. El recíproco no es cierto en general, como veremos más adelante (Ej. 5).

Recordemos que, según Grothendieck ([5]), Déf. 3) un e. l. c. E verifica la *condición estricta de Mackey* si para todo acotado B de E existe un disco cerrado y acotado A que absorbe a B y tal que E_A y E inducen en B la misma topología (y la misma estructura uniforme). Esta propiedad es estable por el paso a sumas directas, subespacios y productos numerables, y Grothendieck probó que la verificaban los espacios metrizables y, en consecuencia, los límites inductivos estrictos de espacios de Fréchet. Es inmediato que si m es una medida topológica con valores en un e. l. c. que verifique la condición estricta de Mackey, es también una medida bornológica con valores en el e. b. c. (E, β), siendo β la bornología de Von Neumann de E. Más adelante veremos otros casos en los que una medida topológica con valores en un e. l. c. E es también una medida bornológica respecto a alguna bornología sobre E compatible con la topología.

Si m es una medida con valores en un e. l. c. E casi completo para la topología de Mackey, se sabe que $m(\Sigma)$ es débilmente relativamente compacto ([15], Theor. 2). Sin ninguna hipótesis de completitud sobre E, puede probarse que $m(\Sigma)$ es acotado incluso para la topología fuerte $\beta(E, E')$ ([16], Prop. 8). Sin embargo, la situación no es tan satisfactoria en el caso de medidas bornológicas, como prueba el siguiente ejemplo:

2. Ejemplo.—Sea E el espacio de Banach $L^1([0, 1], \mu)$, donde μ es la medida de Lebesgue, y β_c la bornología (completa) compacta de E. Cada compacto K_0 de E (y en general en todo espacio de Fréchet) está contenido en un disco compacto K de modo que E y E_K inducen sobre K_0 la misma topología (véase, por ej., [12], III, 9.4.1). Por tanto, una serie es sumable en E si y sólo si lo es en algún E_K, es decir, en el e. b. c. (E, β_c). Si $\Omega = [0, 1]$, Σ es la σ-álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue de Ω y se define $m : \Sigma \longrightarrow E$ por $m(A) = C_A$ = clase a la que pertenece la función característica de A, es inmediato probar que m es una medida topológica y, por lo dicho antes, una medida con valores en el

e. b. c. (E, β_e). Sin embargo, $m(\Sigma) \notin \beta_e$. En efecto, si se define

$$A_n = \bigcup_{K=0}^{2^{n-1}-1} (2k/2^n, \ (2k+1)/2^n),$$

es fácil ver que si $n \neq r$ se tiene $\| m(A_n) - m(A_r) \|_1 = 1/2$, luego $m(\Sigma)$ no puede ser relativamente compacto.

El siguiente resultado caracteriza las medidas bornológicas acotadas.

3. PROPOSICIÓN.—*Sea* $m : \Sigma \longrightarrow E$ *una medida con valores en el e. b. c. completo E. Entonces* $m(\Sigma)$ *es acotado si y sólo si existe un disco acotado B tal que* $m(\Sigma) \subset E_B$.

DEMOSTRACIÓN.—Podemos suponer B completante. Como la inclusión $J : E_B \longrightarrow (E, \tau(E, E^\times))$ es continua, el conjunto $H_B = J'(E^\times)$, formado por las restricciones a E_B de los elementos de $E^\times$, es débilmente denso. Para cada $x' \in H_B$, $x' \cdot m$ es una medida escalar y, en particular, es acotada, luego por un resultado de Grothendieck (véase [4], I.3.3), resulta que $m(\Sigma)$ es acotado en E_B.

4. PROPOSICIÓN.—*Si E es un e. b. c. con una base numerable de acotados, toda medida bornológica con valores en E es acotada.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea (B_n) una base de la bornología formada por discos, tal que $B_n + B_n \subset B_{n+1}$, y $m : \Sigma \longrightarrow E$ una medida bornológica. Pongamos $E_0 = \Omega$ y sea $k_0 = \text{máx}\{n \in N : m(E_0) \notin B_n\}$. Si suponemos que $m(\Sigma)$ no es acotado, sea $A \in \Sigma$ tal que

$$m(F_0) - m(A) = m(E_0 / A) \notin B_{k_0+2}$$

En particular, $m(A) \notin B_{k_0+1}$. Si $m(\Sigma_A)$ no es acotado, pongamos $E_1 = A$. Si $m(\Sigma_A)$ es acotado, entonces $m(\Sigma_{E_0 \setminus A})$ no puede serlo. Pongamos entonces $E_1 = E_0 \setminus A$. En ambos casos, $m(E_1) \notin B_{k_0+1}$. Procediendo del mismo modo, se construye por inducción una sucesión de elementos de Σ

$$E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$$

y una sucesión estrictamente creciente $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ de enteros positivos de modo que $m\,(\Sigma_{E_n})$ no es acotado y $m\,(E_r) \notin B_{k_r}$. Si

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma,$$

se tiene

$$m\,(E) = \lim m\,(E_n)$$

y en consecuencia $(m\,(E_n))$ debería ser un conjunto acotado, contra la elección de los E_n.

El teorema de Orlicz-Pettis permite asegurar que toda función de conjunto definida sobre una σ-álgebra y con valores en un e. l. c. E, tal que $x' \cdot m$ sea una medida escalar para cada $x' \in E'$, es una medida topológica respecto a cualquier topología $\mathcal{T}$ sobre E compatible con la dualidad $\langle E, E' \rangle$ (véase, por ej., [9], theor. 1). El siguiente ejemplo prueba que no se puede esperar un resultado análogo para medidas bornológicas:

5. Ejemplo (1).—Sea E el espacio l^∞ con la topología de Mackey $\tau\,(l^\infty, l^1)$ (que coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de l^1, por el lema de Schur). E es completo y los acotados de E son precisamente los acotados en la norma usual de l^∞. Consideremos la familia $(e_n) \subset E$, donde $e_n = (\delta_{kn})_{k \in N}$. Esta familia es sumable en E, pues si $K \subset l^1$ es compacto y $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in N$ tal que

$$\sum_{n \geq n_0} |\, x_n \,| < \varepsilon, \quad \forall\, x = (x_n) \in K.$$

En consecuencia, si σ es una parte finita de $\mathbb{N}$ disjunta con $\{1, \ldots, n_0\}$ se tiene

$$\left| \left\langle \sum_{n \in \sigma} e_n, x \right\rangle \right| \leqslant \sum_{n \in \sigma} |\, x_n \,| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in K.$$

Por tanto, la función

$$m : \mathcal{P}\,(\mathbb{N}) \longrightarrow E$$

(1) Este ejemplo fue sugerido por el profesor M. Valdivia.

definida por

$$m(\mathrm{P}) = \sum_{n \in \mathrm{P}} e_n$$

es una medida topológica con valores en E. Sin embargo, no existe ningún disco acotado $\mathrm{B} \subset \mathrm{E}$ tal que (e_n) sea sumable en $\mathrm{E_B}$, pues en caso contrario (e_n) sería sumable en l^∞ al ser la inclusión canónica $\mathrm{E_B} \longrightarrow l^\infty$ continua. Además, E se puede sumergir como subespacio cerrado en un producto

$$\mathrm{F} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{E}_i$$

de espacios de Banach, con Card (I) $\leqslant 2^{\mathrm{Card}\,(\mathrm{R})}$, y por tanto F es un e. l. c. bornológico ([8], 28.8). Si β es la bornología de Von Neumann de F y designamos por F_0 el e. b. c. (F, β), resulta pues que $\mathrm{F}_0^\times = \mathrm{F}'$ y por tanto $x' \cdot m$ es una medida escalar para cada $x' \in \mathrm{F}_0^\times$. Sin embargo, no es una medida bornológica, pues si lo fuera existiría un disco $\mathrm{B} \in \beta$ tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} m(\{n\})$$

sería convergente en $\mathrm{F_B}$, y por tanto también en $\mathrm{F_D} = \mathrm{E_D}$, con $\mathrm{D} = \mathrm{E} \cap \mathrm{B}$, que es un acotado en E, contra lo que hemos visto.

A pesar del ejemplo anterior, se pueden obtener algunos resultados positivos en la dirección de un teorema de Orlicz-Pettis bornológico, como veremos a continuación.

Recordemos que si (x_n) es sumable en un e. l. c. E, entonces

$$\mathrm{S} = \left\{ \sum_{n \in \sigma} x_n : \sigma \subset \mathbb{N}, \text{ finito} \right\}$$

es precompacto, y que si S es débilmente relativamente compacto, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es subserie convergente para toda topología compatible con la dualidad $\langle \mathrm{E}, \mathrm{E}' \rangle$ (véase por ej. [9], lemma 4 y theor. 1). En particular, si E es casi completo son equivalentes las condiciones:

a) (x_n) es sumable.

b) $\Sigma\, x_n$ es subserie convergente.

c) S es precompacto.

d) S es débilmente relativamente compacto.

De estas consideraciones se deducen fácilmente los siguientes resultados:

6. PROPOSICIÓN.—*Sea E un e. b. c. y* m : $\Sigma \longrightarrow E$ *una aplicación tal que* $x' \circ m$ *es una medida escalar para cada* $x' \in E^{\times}$. *Si se cumple:*

6.1. *Para cada conjunto* $\tau(E, E^{\times})$*-precompacto A, existe un disco acotado B tal que A es un subconjunto débilmente relativamente compacto de* E_B.

Entonces m *es una medida bornológica.*

DEMOSTRACIÓN.—*m* es una medida topológica con valores en el e. l. c. $(E, \tau(E, E^{\times}))$. Si (A_n) es una sucesión de elementos disjuntos de Σ, resulta por lo dicho anteriormente que

$$S = \left\{ \sum_{n \in \sigma} m(A_n) : \sigma \subset N, \text{ finito} \right\}$$

es $\tau(E, E^{\times})$-precompacto. Basta tener en cuenta la hipótesis y aplicar la implicación (d) $\Longrightarrow$ (b) citada anteriormente, para obtener que $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ es subserie convergente en algún E_B.

7. TEOREMA.—*Sea E un e. b. c. y* m : $\Sigma \longrightarrow E$ *una aplicación tal que* $x' \cdot m$ *es una medida escalar para cada* $x' \in E^{\times}$. *Supongamos que existe un disco acotado completante B tal que* $m(\Sigma) \subset E_B$. *Entonces* m *es una medida con valores en el espacio de Banach* E_B *en cada uno de los casos siguientes:*

7.1. E_B *no contiene ningún subespacio isomorfo a* l^{∞} *(en particular si* E_B *es separable, reflexivo o débilmente secuencialmente completo).*

7.2. *Para todo subespacio vectorial cerrado separable F de* E_B, $F \cap B$ *es cerrado para* $\tau(E, E^{\times})$.

7.3. $m(\Sigma)$ *es débilmente relativamente compacto en* E_B.

DEMOSTRACIÓN.—a) Supongamos que se cumple 7.1. Designemos por H_B las restricciones a E_B de los elementos de $E^{\times}$. Como vimos en la proposición 3, H_B es total en $(E_B)'$, y para cada

$x' \in H_B$, $x' \circ m$ es una medida escalar. Basta tener en cuenta el siguiente resultado ([4], I.4.7): «Si E es un espacio de Banach que no contiene ningún subespacio isomorfo a l^∞ y H es un subconjunto total de E', toda serie que sea subserie convergente para la topología $\sigma(E, H)$, es subserie convergente en norma.»

b) Supongamos que se cumple 7.2. Por la proposición 3, podemos suponer también que $m(\Sigma) \subset B$. Sea (A_n) una sucesión de elementos disjuntos de Σ y F el subespacio cerrado (separable) de E_B engendrado por $(m(A_n))$. Si $P \subset \mathbb{N}$,

$$m\left(\bigcup_{n \in P} A_n\right) = \sum_{n \in P} m(A_n)$$

es límite para $\tau(E, E^\times)$ de una sucesión de elementos de $B \cap F$, luego por hipótesis, pertenece a F. Si H_F es el s. v. de las restricciones a F de los elementos de E, resulta como en (a) que H_F es total en F' y $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$ es subserie convergente para la topología débil $\sigma(F, H_F)$. Como F es separable, no contiene ningún subespacio isomorfo a l^∞ y basta aplicar el argumento de (a).

c) Si se cumple 7.3 y (A_n) es una sucesión de elementos disjuntos de Σ, el conjunto

$$S = \left\{\sum_{n \in \sigma} m(A_n) : \sigma \subset \mathbb{N},\ \text{finito}\right\} \subset m(\Sigma)$$

es $\sigma(E_B, (E_B)')$ relativamente compacto y por la equivalencia (d) $\Longleftrightarrow$ (a) citada antes de la proposición 6, $(m(A_n))$ es sumable en E_B, necesariamente a

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Un e. b. c. E se llama *infra-Schwartz* (resp. *Schwartz, nuclear*) si todo disco acotado A es absorbido por un disco acotado B de modo que la inclusión canónica $E_A \longrightarrow E_B$ sea débilmente compacta (resp. compacta, nuclear) (véase [7]). Por ejemplo, el dual de un e. l. c. de Schwartz (resp. nuclear) dotado de su bornología equicontinua, es un e. b. c. de Schwartz (resp. nuclear). Los e. l. c. con una bornología compatible completa y nuclear β (llamados β-conucleares en [13]) tienen gran importancia en la teoría de medidas cilíndricas. Naturalmente, todo e. b. c. nuclear es de Schwartz y, por tanto, infra-Schwartz. Como consecuencia inmediata del teorema 7, resulta entonces:

8. COROLARIO.—*Sea E un e. b. c. y* $m : \Sigma \longrightarrow E$ *una aplicación acotada tal que* $x' \circ m$ *es una medida escalar para cada* $x' \in E^{\times}$. *Si se cumple alguna de las hipótesis siguientes:*

8.1. *E es un e. b. c. infra-Schwartz.*

8.2. *E posee una base (B_i) formada por discos completantes de modo que E_{B_i} no contiene ningún subespacio isomorfo a* l^{∞}.

Entonces existe un disco acotado B tal que m *es una medida con valores en el espacio normado E_B.*

DEMOSTRACIÓN.—Resulta inmediatamente de 7.3 y 7.1.

9. OBSERVACIÓN.—i) Si E es un e. b. c. completo con base numerable, separable en el sentido de Mackey, posee una base (B_n) formada por discos completantes tales que E_{B_n} es separable y, por tanto, verifica 8.2 (véase [10], en donde se caracterizan este tipo de espacios).

ii) Si E es un e. b. c. y $\mathcal{T}$ es una topología de e. l. c. compatible con la bornología, el razonamiento de la proposición 3 prueba que las restricciones de los elementos de $(E, \mathcal{T})'$ a cada E_B forman un conjunto total en $(E_B)'$. En consecuencia, la proposición 6 y el teorema 7 se siguen verificando con la hipótesis de que $x' \cdot m$ sea una medida escalar para cada $x' \in (E, \mathcal{T})'$, sustituyendo naturalmente la topología $\tau(E, E^{\times})$ por la $\mathcal{T}$. Por tanto, se obtiene el siguiente resultado, que permite reducir en muchos casos el estudio de medidas topológicas al caso de medidas con valores en un espacio normado:

10. COROLARIO.—*Sea E un e. l. c.,* $m : \Sigma \longrightarrow E$ *una medida topológica y β una bornología sobre E compatible con la topología. Supongamos que se verifica alguna de las hipótesis siguientes:*

10.1. *Para todo precompacto $A \subset E$, existe un disco $B \in \beta$ tal que A es débilmente relativamente compacto en E_B.*

10.2. *Para todo conjunto débilmente relativamente compacto $A \subset E$, existe un disco $B \in \beta$ tal que A es débilmente relativamente compacto en E_B.*

Entonces m *es una medida bornológica con valores en el e. b. c. (E, β). Si además se tiene:*

10.3. *E es casi completo y verifica 10.2.*

Entonces existe un disco $B \in \beta$ tal que m *es una medida con valores en el espacio normado E_B. Esta conclusión se sigue verificando si el e. b. c. (E, β) cumple 8.1 ó 8.2 y se supone* $m(\Sigma) \in \beta$.

DEMOSTRACIÓN.—Consecuencia inmediata de la observación 9 (ii) y la proposición 6, teorema 7 y corolario 8.

11. EJEMPLOS.—i) Todo e. l. c. que verifique la condición estricta de Mackey, cumple 10.2 cuando se toma como β la bornología de Von Neumann (nótese que para un *disco* A de un e. l. c. $F(= E_B)$ el hecho de ser débilmente compacto depende sólo de la topología inducida por F (no por $(F, \sigma(F, F'))$. (Véase [6], Chap. 2, part 8, Ex. 2.) En particular, toda medida con valores en un e. l. c. casi completo que cumpla la condición estricta de Mackey, es en realidad una medida con valores en un espacio de Banach.

ii) Como ya hemos indicado, la bornología equicontinua en el dual fuerte de un espacio de Schwartz, verifica 8.1. En particular, toda medida con valores en un e. l. c. casi completo, que sea el dual fuerte de un espacio de Schwartz infratonelado, es una medida con valores en un espacio de Banach E_B, para algún disco acotado B.

iii) En general, si E es un e. l. c. y β una bornología completa compatible sobre E, tal que E′ con la topología de la convergencia uniforme sobre los elementos de β es un e. l. c. de Schwartz, entonces (E, β) verifica 8.1. En efecto, para todo disco $B \in \Sigma$ existe otro (completante) $A \in \Sigma$ tal que la aplicación canónica

$$T(A^0, B^0) : E'_{A^0} \longrightarrow E'_{B^0}$$

es precompacta y, por tanto, la transpuesta

$$T(A^0, B^0)' : (E'_{B^0})' \longrightarrow (E'_{A^0})'$$

es compacta. Pero E_B (resp. E_A) se identifica isométricamente a un subespacio vectorial de $(E'_{B^0})'$ (resp. $(E'_{A^0})'$) y la restricción de $T(A^0, B^0)'$ a E_B es precisamente la aplicación canónica de E_B en E_A que, como E_A es completo, es compacta (véase [10], 0.11.4). En particular, si E es un e. l. c. cuyo dual fuerte es nuclear (por ejemplo, si E es un espacio nuclear metrizable o (DF)), su bornología de Von Neumann es nuclear (no es preciso en este caso que sea completa, véase [11], 4.1.7) y, en consecuencia, se cumple 8.1.

§ 2. Integración bornológica

En esta sección supondremos siempre que los e. b. c. que aparecen son completos. Asimismo, denotaremos por (Ω, Σ, μ) un espacio de medida (e. d. μ una medida positiva sobre la σ-álgebra Σ de partes de Ω) que supondremos siempre finito y completo por simplicidad.

12. DEFINICIÓN.—Sea E un e. b. c. Una función $f : \Omega \longrightarrow E$ se dice *medible en sentido bornológico* (o *b-medible*) si existe una sucesión (f_n) de funciones simples que converge a f casi uniformemente en el sentido de Mackey, es decir:

«Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $K_\varepsilon \in \Sigma$ y un disco acotado B_ε tales que $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ y $(f_n(t))$ converge a $f(t)$ uniformemente sobre K_ε en el espacio normado E_{B_ε}.»

A la sucesión (f_n) la llamaremos una *sucesión aproximadora* de f. De la definición resulta que $(f_n(t)) \longrightarrow f(t)$ para μ-casi todo t de Ω, en el sentido de Mackey, y casi uniformemente para la topología $\tau(E, E^\times)$. En particular, f es esencialmente separable para la topología $\tau(E, E^\times)$, es decir, existe un $N \in \Sigma$ de medida 0 tal que $f(\Omega \setminus N)$ está contenido en un s. v. $\tau(E, E^\times)$-separable.

Si f es b-medible y (f_n) es una sucesión aproximadora de f, escribiremos

$$U(f, f_n) = \{K \in \Sigma : f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente sobre } K \text{ en el sentido de Mackey}\}.$$

Es inmediato comprobar las siguientes propiedades:

i) Si $K_1, K_2 \in U(f, f_n)$, entonces $K_1 \cup K_2 \in U(f, f_n)$.

ii) Si $K \in U(f, f_n)$, entonces $\Sigma_K \subset U(f, f_n)$.

La siguiente proposición recoge las propiedades inmediatas de las funciones b-medibles:

13. PROPOSICIÓN.

i) *El conjunto* $\mathfrak{M}(\Sigma, \mu, E)$ *de las funciones b-medibles con valores en* E *es un espacio vectorial con las operaciones usuales.*

ii) *Si* $f \in \mathfrak{M}(\Sigma, \mu, E)$ *y* φ *es una función escalar* μ*-medible, entonces* $\varphi f \in \mathfrak{M}(\Sigma, \mu, E)$.

iii) *Si* f *es b-medible y* p *una seminorma* $\tau(E, E^\times)$*-continua, entonces la función real* $t \longmapsto p(f(t)$ *es* μ*-medible.*

iv) *Si* f *es b-medible y* x′ ∈ $E^{\times}$, *la función* t $\longmapsto$ ⟨f (t), x′⟩ *es* μ*-medible.*

v) *Si* f ∈ $\mathfrak{M}$ (Σ, μ, *E*), *F es otro e. b. c. y* $T : E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal acotada, entonces* $T \circ$ f ∈ $\mathfrak{M}$ (Σ, μ, *F*).

DEMOSTRACIÓN.—Todas las propiedades se deducen fácilmente de la definición. A título de ejemplo, probemos (i): Sean (f_n) y (g_n) sucesiones aproximadoras de f y g, respectivamente. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $K_1 \in U(f, f_n)$, $K_2 \in U(g, g_n)$ tales que

$$\mu(\Omega \setminus K_i) \leqslant \varepsilon/2 \; (i = 1, 2).$$

Sea B un disco acotado que contiene a B_{K_1} y B_{K_2}. Entonces, si $K = K_1 \cap K_2$ se tiene $\mu(\Omega \setminus K) \leqslant \varepsilon$ y tanto (f_n) como (g_n) convergen uniformemente sobre K en el espacio E_B. Por tanto, si r, s son escalares, $(r f_n + s g_n)$ es una sucesión aproximadora de $s f + r g$.

14. EJEMPLOS.—i) Si E es un e. l. c. que verifica la condición estricta de Mackey y β la bornología de Von Neumann, las funciones b-medibles son precisamente las que son límite casi uniforme de una sucesión de funciones simples (funciones fuertemente medibles con la propiedad de Egoroff, en la terminología de [2]). En efecto, si (f_n) converge a f casi uniformemente y $K_\varepsilon \in \Sigma$ es tal que $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ y (f_n) converge a f uniformemente sobre K_ε, como las f_n son acotadas, existe un disco acotado A que contiene a

$$f(K_\varepsilon) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(K_\varepsilon).$$

Si B es otro disco acotado tal que E_B y E inducen la misma topología sobre A, es evidente que $(f_n(t))$ converge a $f(t)$ en E_B, uniformemente sobre K_ε.

En particular, si E es metrizable, las funciones b-medibles coinciden con las funciones fuertemente medibles (o medibles Bochner).

ii) Un e. b. c. verifica la *condición de numerabilidad de Mackey* si toda sucesión de acotados (A_n) es absorbida por un acotado B. Por ejemplo, si E es un espacio de Fréchet las bornologías de Von Neumann, de los compactos y de los débilmente compactos verifican esta condición (véase [6], pág. 156, theor. 1, y pág. 189, Ex. 1). En este caso, si f es una función b-medible, existe un disco acotado

B tal que $f(t)$ pertenece a E_B en μ-casi todo t y, como función de Ω en E_B, es fuertemente medible. En efecto, basta tomar en la definición 12 sucesivamente $\varepsilon = 1/n$. Entonces

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{1/n}\right) = 0$$

y si B es un acotado que absorbe a todos los $B_{K_{1/n}}$, resulta que para todo

$$t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{1/n}$$

se tiene $f(t) \in E_B$ y $(f_n(t)) \longrightarrow f(t)$ en E_B.

Si f es una función b-medible con valores en el e. b. c. E y (f_n) es una sucesión aproximadora, para cada $K \in U(f, f_n)$ existe un disco completante B_K tal que

$$f_K = f C_K : K \longrightarrow E_{B_K}$$

es integrable Bochner, luego puede definirse el elemento

$$\int_K f\, d\mu = \int f_K\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_K f_n\, d\mu \in E_{B_K}$$

que, claramente, no depende del disco B_K elegido.

15. Proposición.—*Sea* $f \in \mathfrak{M}(\Sigma, \mu, E)$ *y* (f_n) *una sucesión aproximadora de* f. *Son equivalentes:*

15.1. *Se verifica:*

i) *Para cada* $x' \in E^\times$, *la función* $t \longmapsto \langle f(t), x' \rangle$ *es integrable.*

ii) *Para cada* $A \in \Sigma$, *existe* $\int_A \bullet \in E$ *tal que*

$$\left\langle \int_A \bullet, x' \right\rangle = \int_A \langle f, x' \rangle\, d\mu, \quad \forall x' \in E^\times.$$

iii) *La aplicación* $\Sigma \ni A \longmapsto m_f(A) = \int_A \bullet$ *es una medida bornológica.*

15.2. *Para toda sucesión disjunta* (K_n) *de elementos de* $U(f, f_n)$, *existe un disco acotado completante B tal que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{K_n} f\, d\mu$$

es sumable en E_B.

DEMOSTRACIÓN.—15.1 $\Longrightarrow$ 15.2 Si $K \in U(f, f_n)$, se tiene

$$\left\langle \int_K f\, d\mu, x' \right\rangle = \int_K \langle f, x' \rangle\, d\mu, \quad \forall x' \in E^{\times},$$

luego, por ser E un e. b. c. regular, necesariamente el elemento $\int_K \cdot$ cuya existencia se postula en 15.1 (ii) ha de ser $\int_K f\, d\mu$ para cada $K \in U(f, f_n)$. En consecuencia, de 15.1 (iii) resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{K_n} f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} m_f(K_n) = m_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \int_{\cup K_n} \cdot$$

y, en particular, la serie del primer miembro es sumable en algún E_B.

15.2 $\Longrightarrow$ 15.1. Sea (K_n) una sucesión disjunta de elementos de $U(f, f_n)$ tal que $\mu(\Omega \setminus \cup K_n) = 0$.

i) Sea $x' \in E^{\times}$. Descomponiendo $\langle f, x' \rangle$ en su parte real e imaginaria, podemos suponer $\langle f, x' \rangle$ real. Sea

$$A_f^+ = \{t \in \Omega : \langle f(t), x' \rangle \geq 0\} \in \Sigma.$$

Como $A_f^+ \cap K_n \in U(f, f_n)$, por hipótesis la serie

$$\Sigma \int_{A_f^+ \cap K_n} f\, d\mu$$

es sumable en algún E_B, luego

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_f^+ \cap K_n} f\, d\mu, x' \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_f^+ \cap K_n} \langle f, x' \rangle\, d\mu$$

es convergente y, por el teorema de la convergencia monótona, converge a

$$\int_{A^+} \langle f, x' \rangle \, d\mu .$$

Esto prueba que $\langle f, x' \rangle^+$ es integrable. Análogamente se prueba que $\langle f, x' \rangle^-$ es integrable.

ii) Si $A \in \Sigma$, entonces

$$A \cap K_n \in U_{f, f_n} \quad \text{y} \quad \mu\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap K_n)\right) = 0,$$

luego si $x' \in E^\times$:

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap K_n} f \, d\mu, x' \right\rangle \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap K_n} \langle f, x' \rangle \, d\mu = \int_{A} \langle f, x' \rangle \, d\mu .$$

Basta entonces definir

$$\int_A \bullet = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap K_n} f \, d$$

(que existe por hipótesis) para que se cumpla (ii). En lo sucesivo, designaremos a $\int_A \bullet$ por $\int_A f \, d\mu$.

iii) Sea (A_n) una sucesión disjunta de elementos de Σ. Por hipótesis, la familia $\left(\int_{A_n \cap R_m} f \, d\mu\right)$ es sumable en algún espacio de Banach E_B, luego

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \int_{A_n \cap K_m} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A_n \cap K_m} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} m_f(A_n)$$

y también

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \int_{A_n \cap K_m} f \, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \cap K_m} f \, d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{A \cap K_m} f \, d\mu = m_f(A)$$

Por tanto,

$$m_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m_f(A_n)$$

en sentido de Mackey.

16. Observación.—En general, si E es un e. b. c. (resp. e. l. c.), una función $f: \Omega \longrightarrow E$ se llama *escalarmente integrable* si se cumplen las condiciones (i) y (ii) de 15.1 (resp., sustituyendo $E^{\times}$ por E'). El teorema de Orlicz-Pettis prueba entonces que la función

$$\Sigma \ni A \longmapsto m_f(A) = \int_A \bullet$$

es una medida con valores en el e. l. c. $(E, \tau(E, E^{\times}))$ (resp. E). Por tanto, si f es una función escalarmente integrable con valores en el e. b. c. E y se cumple 6.1, automáticamente m_f es una medida bornológica y se verifica 15.1 (iii). Lo mismo sucede si se cumple 8.1 ó 8.2 y m_f es acotada. Del mismo modo, si E es un e. l. c. y β es una bornología sobre E compatible con la topología tal que se cumple 10.1 ó 10.2, automáticamente se verifica 15.1 (iii) para el e. b. c. (E, β). Si se verifica 10.3 o bien $m_f(\Sigma) \in \beta$ y se cumple 8.1 u 8.2, entonces m_f es una medida con valores en un espacio de Banach E_B por el corolario 10 (véanse los ejemplos de 11).

Sin embargo, en general la función m_f no determina unívocamente a f, si se supone ésta escalarmente integrable, por lo que estableceremos la siguiente definición:

17. Definición.—Una función $f \in \mathfrak{M}(\Sigma, \mu, E)$ diremos que es *b-integrable* si verifica alguna de las condiciones equivalentes de la proposición 15.

Nótese que de la proposición 15 resulta que la integrabilidad de una función b-medible no depende de la sucesión aproximadora elegida para comprobar 15.2. Asimismo es inmediato que el conjunto $\mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, E)$ de las funciones b-integrables de Ω en E es un espacio vectorial con las operaciones usuales, y la aplicación

$$f \longmapsto \int_A f \, d\mu$$

es lineal sobre este espacio para cada $A \in \Sigma$.

18. TEOREMA.—*Sea* $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, E)$ *y* S *es un subconjunto absolutamente convexo y* $\sigma(E, E^\times)$*-cerrado tal que*

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in S, \quad \forall A \in \Sigma, \quad con \quad \mu(A) > 0.$$

Entonces $f(t) \in B$ *para casi todo* $t \in \Omega$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea (f_n) una sucesión aproximadora de f y $(K_n) \subset U(f, f_n)$ tal que $K_n \subset K_{n+1}$ y $\mu(\Omega \setminus \cup K_n) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n = C_K f$ es integrable Bochner en un E_{B_n}. Pero $S_n = S \cap E_{B_n}$ es cerrado en el espacio de Banach E_{B_n} y si $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$, se tiene

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A g_n \, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_{A \cap K_n} f \, d\mu = \frac{\mu(A \cap K_n)}{\mu(A)} \mu(A \cap K_n) \int_{A \cap K_n} f \, d\mu \in B_n$$

si $\mu(A \cap K_n) > 0$, y sigue siendo trivialmente cierto si

$$\mu(A \cap K_n) = 0,$$

luego por el resultado análogo para la integral de Bochner, resulta que $g_n(t) \in B_n$ para casi todo t de Ω. Como $g_n(t) \longrightarrow f(t)$ en casi todo punto, resulta que $f(t) \in B$ para casi todo $t \in \Omega$.

19. COROLARIO.—*Si* f *y* g *son b-medibles y para cada* $x' \in E^\times$ *se verifica* $\langle f(t), x' \rangle = \langle g(t), x' \rangle$ *para casi todo* $t \in \Omega$, *entonces* f *y* g *son iguales en casi todo punto.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $h = f - g \in \mathfrak{M}(\Sigma, \mu, E)$. Por hipótesis, para cada $x' \in E^\times$, $\langle h, x' \rangle$ es nula en casi todo punto. Si (h_n) es una sucesión aproximadora de h y $(K_n) \subset U(h, h_n)$ tal que $K_n \subset K_{n+1}$ y $\mu(\Omega \setminus \cup K_n) = 0$, definamos como antes $H_n = C_{K_n} h$, que claramente es b-integrable. Además, si $x' \in E^\times$ se tiene

$$\left\langle \frac{1}{\mu(A)} \int_A d\mu, x' \right\rangle = \frac{1}{\mu(A)} \int_{A \cap K_n} \langle h, x' \rangle \, d\mu = 0, \quad \forall A \in \Sigma \quad \text{con} \quad \mu(A) > 0,$$

luego

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A H_n \, d\mu = 0$$

Por el teorema 18, resulta entonces $H_n(t) = 0$ para casi todo t, luego $h(t)$ es nula en casi todo punto.

20. PROPOSICIÓN.—*Si E, F son e. b. c., $T : E \longrightarrow F$ es lineal y acotada y $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, E)$, entonces $T \circ f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, F)$ y*

$$\int_A T \circ f \, d\mu = T\left[\int_A f \, d\mu\right].$$

DEMOSTRACIÓN.—$T \circ f$ es b-medible por la proposición 13 (v) y si (f_n) es una sucesión aproximadora de f, entonces $(T \circ f_n)$ es una sucesión aproximadora de $T \circ f$. Si $K \in U(f, f_n)$ es inmediato, por el resultado análogo para la integral de Bochner en espacios de Banach, que

$$T\left[\int_K f \, d\mu\right] = \int_K T \circ f \, d\mu.$$

Entonces si (K_n) es una sucesión disjunta de elementos de $U(f, f_n)$, existe un disco completante $B \subset E$ tal que $\left(\int_{K_n} f \, d\mu\right)$ es sumable en E_B. Si D es un disco completante en F tal que $T(B) \subset D$, entonces $T : E_B \longrightarrow E_D$ es continua y, por tanto, la familia

$$\left(T\left[\int_{K_n} f \, d\mu\right]\right) = \left(\int_{K_n} T \circ f \, d\mu\right)$$

es sumable en F_D y

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{K_n} f \, d\mu\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{K_n} T \circ f \, d\mu.$$

21. EJEMPLOS.—i) Si existe un disco acotado completante $B \subset C$ tal que $f(t) \in E_B$ para casi todo $t \in \Omega$ y $f : \Omega \longrightarrow E_B$ (definida en casi todo punto) es integrable Bochner, evidentemente f es b-integrable. Por razones obvias, llamaremos a este tipo de funciones *integrables Bochner.*

ii) Si $g : \Omega \longrightarrow E$ es b-medible y existe un disco acotado completante y $\sigma(E, E^\times)$-cerrado B tal que $g(\Omega) \subset B$, entonces para toda función escalar integrable φ, la función $f = \varphi g$ es b-integrable. En efecto, si (f_n) es una sucesión aproximadora de f y (K_n) una sucesión disjunta de elementos de $U(f, f_n)$, se tiene

$$\sum_{n=m}^{m+p} p_B\left(\int_{K_n} f\,d\mu\right) = \sum_{n=m}^{m+p} \sup_{x' \in B^0} \left|\left\langle \int_{K_n} f\,d\mu, x' \right\rangle\right| \leqslant \sum_{n=m}^{m+p} \int_{K_n} |\varphi|\,d\mu =$$

$$= \int_{\bigcup_m^{m+p} K_n} |\varphi|\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(donde B^0 designa la polar de B en la dualidad $\langle E, E^\times\rangle$) y, por tanto, $\left(\int_{K_n} f\,d\mu\right)$ es sumable en el espacio de Banach E_B. Además, es inmediato que en este caso la función $A \longmapsto m_f(A) = \int_A f\,d\mu$ es una medida con valores en el espacio de Banach E_B, de variación acotada (pues $p_B(m_f(A)) \leqslant \int_A |\varphi|\,d\mu$).

Un caso particular de este tipo de funciones está formado por las $f : \Omega \longrightarrow E$ b-medibles para las que existe un disco acotado completante y $\sigma(E, E^\times)$-cerrado B, tal que la función $t \longmapsto p_B(f(t))$ sea integrable (cfr. [14], donde se estudia un concepto análogo para el caso de medidas de Radon y funciones con valores en un e. l. c.). En efecto, la función $g(t) = f(t)/p_B(f(t))$ si $p_B(f(t)) > 0$ e $= 0$ si $p_B f(t) = 0$, está definida en casi todo punto, es b-medible y $g(\Omega) \subset B$. Basta poner entonces $f = p_B(f)\,g$. Nótese que f, como función con valores en E_B, puede no ser medible y, por tanto, no es necesariamente integrable Bochner (véase [14]).

iii) En general, una función b-integrable diremos que es *totalmente integrable* si existe un disco acotado completante B tal que m_f es una medida topológica con valores en E_B de variación acotada.

Recordemos que un espacio de Banach E verifica la propiedad de Radon-Nikodym (abrev. P. R. N.) si para toda medida $m : \Sigma \longrightarrow E$ de variación acotada y absolutamente continua respecto a una medida positiva finita μ, existe una función integrable Bochner f tal que $m(A) = \int_A f\,d\mu$ (véase [4]).

22. PROPOSICIÓN.—*Sea* f : $\Omega \longrightarrow E$ *totalmente integrable y* B *un disco acotado completante tal que* $m_f(\Sigma) \subset E_B$. *Se supone alguna de las siguientes hipótesis:*

22.1. f (t) $\in E_B$ *para casi todo* t $\in \Omega$ *y* E_B *es separable.*

22.2. E_B *posee la P. R. N.*

Entonces f *es integrable Bochner.*

DEMOSTRACIÓN.—i) Supongamos E_B separable. El conjunto

$$M = \{x' \in (E_B)' ; \langle f, x' \rangle \text{ es medible}\}$$

es débilmente secuencialmente cerrado y contiene a las restricciones de los elementos de $E^{\times}$ a E_B, luego es débilmente denso (véase proposición 3). El teorema de Banach-Dieudonné prueba entonces que $M = (E_B)'$. Basta aplicar el teorema de medibilidad de Pettis ([4], theor. II.1.2) para concluir que $f : \Omega \longrightarrow E_B$ es medible Bochner y, como m_f es de variación acotada, f es integrable Bochner ([4], III.2.5). (Véase [6], pág. 240, Ex. 1 (3).)

ii) Supongamos ahora que E_B posee la P. R. N. La función m_f, por hipótesis, es una medida con valores en el espacio de Banach E_B, de variación acotada y absolutamente continua respecto a μ, luego existe una función $h : \Omega \longrightarrow E_B$ integrable Bochner tal que

$$m_f(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu, \quad \forall A \in \Sigma.$$

En virtud del corolario 19, resulta $f(t) = g(t)$ en casi todo punto.

23. PROPOSICIÓN.—*Sea* f : $\Omega \longrightarrow E$ *b-integrable. Se supone alguna de las siguientes hipótesis:*

23.1. f *es totalmente integrable y E es un e. b. c. infra-Schwartz.*

23.2. *E es un e. b. c. nuclear y* $m_f(\Sigma)$ *es acotado.*

Entonces f *es integrable Bochner.*

DEMOSTRACIÓN.—i) Supongamos 23.1. Existe entonces un disco acotado completante B tal que $m_f : \Sigma \longrightarrow E_B$ es una medida topológica de variación acotada y absolutamente continua respecto de μ. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $K_\varepsilon \in \Sigma$ tal que $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ y

$$S(K_\varepsilon) = \{m_f(A)/\mu(A) : A \subset K_\varepsilon, A \in \Sigma, \mu(A) > 0\}$$

es acotado en E_B. Sea D otro disco completante que absorbe a B y tal que la inclusión canónica $I_{BD} : E_B \longrightarrow E_D$ sea débilmente compacta. Resulta entonces que $I_{BD}(S(K_\varepsilon))$ es débilmente relativamente compacto en E_D, luego en virtud del teorema de Radon-Nikodym para espacios de Banach (véase, por ej., [4], III.2.18), existe $g : \Omega \longrightarrow E_D$, integrable Bochner tal que

$$I_{BD} \circ m_f(A) = \int_A I_{BD} \circ f \, d\mu = \int_A g \, d\mu, \quad \forall A \in \Sigma.$$

Por el corolario 19, $I_{BD} \circ f$ y g coinciden en casi todo punto, es decir, f es integrable Bochner como función de Ω en E_D.

ii) Supongamos ahora que se cumple 23.2. Por la observación 16, existe un disco acotado completante B tal que m_f es una medida con valores en el espacio de Banach E_B, μ-continua. Consideremos el operador lineal asociado a m_f:

$$T : L^\infty(\mu) \longrightarrow E_B$$

definido por $T(\varphi) = \int \varphi \, d\, m_f$ (se demuestra además fácilmente que φf es b-integrable y $T(\varphi) = \int \varphi f \, d\mu$) (véase [4], I.1.13). Sea D otro disco completante que absorbe a B de modo que la aplicación canónica

$$I_{BD} : E_B \longrightarrow F_D$$

sea nuclear. Entonces $I_{BD} T : L^\infty(\mu) \longrightarrow E_D$ es nuclear y, por tanto, en virtud de [3], theor. 2 (véase también [4], VI.3.4 y VI.4.4) existe una función $g : \Omega \longrightarrow E_D$ integrable Bochner tal que

$$I_{BD} \circ m_f(A) = \int_A g \, d\mu = \int_A I_{BD} \circ f \, d\mu, \quad \forall A \in \Sigma.$$

Basta entonces proceder como en i).

24. Observaciones.—i) En virtud de la observación 16, en la hipótesis de la proposición anterior bastaría suponer que f es b-medible y escalarmente integrable.

ii) Como hemos hecho anteriormente, se pueden obtener de modo obvio los resultados correspondientes a la proposición 23 para funciones con valores en un e. l. c. dotado de una bornología compatible con su topología. En particular, destaquemos el siguiente resultado:

25. COROLARIO.—*Sea E un e. l. c. casi completo cuyo dual fuerte es nuclear. Sea* $f : \Omega \longrightarrow E$ *una función escalarmente integrable y b-medible (respecto a la bornología de Von Neumann de E). Entonces* f *es integrable Bochner.*

DEMOSTRACIÓN.—Resulta inmediatamente de la proposición 23.

Bibliografía

[1] BOMBAL GORDÓN, F. (1981). El teorema de Radon-Nikodym en espacios bornológicos. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **75**, 139-154.

[2] CHI, G. Y. H. (1976). On the Radon-Nikodym theorem in locally convex spaces, en «Measure theory», *Lect. Notes in Math.*, n.° 541. Springer, Berlin.

[3] DIESTEL, J. (1972). The Radon-Nikodym property and the coincidence of integral and nuclear operators. *Rev. Roum. Math.*, **17**, 1611-1620.

[4] DIESTEL, J. and UHL, J. Jr. (1977). Vector measures. *Math. Surveys*, **15**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

[5] GROTHENDIECK, A. (1954). Sur les espaces (F) et (DF). *Summa Brasiliensis*, **3**, fasc. 6, 57-122.

[6] GROTHENDIECK, A. (1973). Topological Vector Spaces. Gordon and Breach, N. Y.

[7] HOGBE-NLEND, H. (1971). Theorie des bornologies et applications. *Lect. Notes in Math.*, n.° 213. Springer, Berlin.

[8] KOTHE, G. (1969). *Topological Vector Spaces I.* Springer, New York.

[9] MC ARTHUR, C. W. (1967). On a theorem of Orlicz and Pettis. *Pac. J. of Math.*, **22**, 297-302.

[10] MOSCATELLI, V. B. (1974). Bases in bornological spaces. *Studia Math.*, **50**, 251-264.

[11] PIETSCH, A. (1972). Nuclear locally convex spaces. Springer, Berlin.

[12] SCHAEFER, H. H. (1971). Topological vector spaces. Springer, Berlin.

[13] SCHWARTZ, L. (1973). Radon Measures on arbitrary topological spaces and Cylindrical measures. Tata Inst. Oxford Univ. Press.

[14] THOMAS, E. (1976). Totally summable functions with values in locally convex spaces. En «Measure theory», *Lect. Notes in Math.*, n.° 541. Springer, Berlin.

[15] TWEDDLE, I. (1968). Weak compactness in locally convex spaces. *Glasgow Math. J.*, **9**, 123-127.

[16] TWEDDLE, I. (1970). Vector-valued measures. *Proc. London Math. Soc.* (3), **20**, 469-489.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense
Madrid