UNA NOTA SOBRE CLASES MAXIMALES PARA EL TEOREMA DE APLICACION ABIERTA

Germán Giráldez Tiebo

Recibido: 7 marzo 1979

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

In this work are studied some relations between maximal classes, for the open mapping theorem, characterized by properties of duality. An introduction and study is made, for some of them, by the author in his doctoral thesis and, for others, by professor Valdivia (see references). In particular it is obtained that there exist locally convex Hausdorff spaces E, non of finite dimension, with the following property: Every almost open mapping from E onto a locally convex Hausdorff space is open.

Sea E un espacio localmente convexo separado (e. l. c. s.) sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sean E' y E^* sus duales topológico y algebraico respectivamente. Consideremos las siguientes propiedades:

i) Cada subespacio H de E^* casi cerrado en E'_σ (i. e.: $H \cap U^0$ es $\sigma(E', E)$-cerrado para todo U entorno de cero en E) es cerrado en E_σ^*.

ii) Cada subespacio H de E_σ^* casi completo y tal que H^0 es cerrado en E cumple $H \cap E' = \bar{H} \cap E'$.

iii) Cada subespacio H de E_σ^* casi completo cumple $H \cap E'$ es cerrado en E'_σ.

iv) Cada subespacio H de E_σ^* casi completo y tal que H^0 es cerrado en E cumple $H \cap E'$ es cerrado en E'_σ.

v) Cada subespacio H de E_σ^* casi completo y tal que $H \cap E'$ es denso en E'_σ cumple $H \supset E'$.

Los espacios caracterizados por i) y los caracterizados por ii) son estudiados en [1] como espacios B^*-completos y espacios Γ^* respectivamente. Los que tienen la propiedad iii) y los que tienen la propiedad v) son estudiados en [3] como espacios Γ y Γ_r respectivamente.

Puesto que un e. l. c. s. con una base de Hamel numerable es Γ^* ([1]), la suma directa $K^{(N)}$ (N el conjunto de los naturales) para cualquier topología l. c. s. cumple que toda aplicación lineal de $K^{(N)}$ sobre un espacio tonelado separado y cuyo núcleo sea cerrado, es abierta. Pero además podemos afirmar:

1. PROPOSICIÓN.—*$E = K^{(N)}$ con la topología $\tau(K^{(N)}, K^N)$ es un espacio B^*-completo.*

DEMOSTRACIÓN.—Evidentemente $E' = E^*$. Por tener base de Hamel numerable E es un espacio Γ y como es un espacio tonelado, se sigue que E es B-completo. Por tanto E es B^*-completo ([1]).

2. COROLARIO.—*Existen e. l. c. s. E no finito dimensionales con la siguiente propiedad: toda aplicación lineal casi abierta de E sobre un e. l. c. s. es abierta.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $E = K^{(N)}$ con la topología $\tau(K^{(N)}, K^N)$ y tengamos en cuenta la proposición anterior y la caracterización de los B^*-completos ([1]).

3. PROPOSICIÓN.—*$E = K^{(N)}$ con la topología $\sigma(K^{(N)}, K^N)$ no es B^*-completo.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta tener en cuenta que $E'^* = E^{**} \underset{\neq}{\supset} E$ de donde se deduce que E no es completo para la topología $\sigma(E, E^*)$ y por tanto no es B-completo. Así pues no es B^*-completo ([1]).

Se ve en [1] que todo espacio Γ^* es Γ. Dicho contenido es estricto, pues basta considerar un espacio que sea Banach para dos topologías no equivalentes y tener en cuenta la caracterización de los espcaios Γ^* ([1]).

Evidentemente los espacios Γ cumplen iv) y éstos son Γ_r, pero veamos a continuación que la propiedad iv) también caracteriza los Γ.

4. PROPOSICIÓN.—*Si E cumple iv) y M es un subespacio cerrado de E, entonces E/M también cumple iv).*

DEMOSTRACIÓN.—Si dotamos a E de la topología l. c. más fina, la topología cociente módulo M será también la l. c. más fina sobre

E/M. Sea φ_1 la sobreyección canónica de E sobre E/M para estas topologías y φ la misma aplicación para las topologías originales.

Si H es un subespacio de $(E/M)^*$ tal que H^0 es $\sigma(E/M, (E/M)')$-cerrado se sigue de la igualdad

$$^t\varphi_1(H)^0 = \varphi_1^{-1}(H^0) = \varphi^{-1}(H^0)$$

y de la continuidad de φ que el conjunto $^t\varphi_1(H)^0$ es $\sigma(E, E')$-cerrado.

Los demás detalles de la demostración son análogos a los de los espacios Γ ([3]).

5. Proposición.—*Si E cumple iv) y* f *es una aplicación lineal de un subespacio E_0 de E sobre F cuya gráfica es cerrada en $E \times F$ siendo F tonelado separado, entonces* f *es abierta.*

Demostración.—La misma de los espacios Γ dada en [3], y teniendo en cuenta que, por la proposición anterior, el cociente de E por el subespacio cerrado $f^{-1}(0)$ es un espacio Γ_r.

6. Corolario.—*Si E cumple iv) entonces E es un espacio* Γ.

Demostración.—Por la proposición anterior y por la caracterización de los Γ ([3]).

Bibliografía

[1] Giráldez, G. (1974). «Teoremas de gráfico cerrado, núcleo cerrado y aplicación abierta». Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, Madrid.

[2] Horváth, J. (1966). «Topological vector spaces and distributions», I. Addison-Wesley.

[3] Valdivia, M. (1971). «Sobre el teorema de la gráfica cerrada». *Collectanea Mathematica*, **22** (1.°), 50-71.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid