ESTRUCTURAS LIPSCHITZIANAS

Miguel del Río Vázquez

Departamento de Teoría de Funciones, Universidad de Santiago

Recibido: 7 noviembre 1979

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. ALBERTO DOU MASDEXEXÁS

Introducción

Así como el estudio de los espacios métricos conduce a los conceptos de topología y uniformidad como estructuras correspondientes, respectivamente, a las aplicaciones continuas y a las aplicaciones uniformemente continuas, de forma análoga parece también natural preguntarse por la estructura cuyos morfismos son las aplicaciones lipschitzianas. En el presente trabajo se define y estudia esta estructura «lipschitziana» sobre un conjunto, considerando en particular el caso en que dicho conjunto está dotado de una estructura vectorial-topológica.

1. Definición y ejemplos

Denotaremos con $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales mayores que cero.

DEFINICIÓN 1.1.—Llamaremos estructura lipschitziana sobre un conjunto X a cualquier colección, $\mathcal{L}$, de partes de $X \times X \times \mathbb{R}^+$ que verifique:

L 1) $W \in \mathcal{L} \Longrightarrow W \supset \Delta \times \mathbb{R}^+ \quad (\Delta = \{(x, x) : x \in X\})$.

L 2) $V \in \mathcal{L},\ W \supset V \Longrightarrow W \in \mathcal{L}$.

L 3) $V, W \in \mathcal{L} \Longrightarrow V \cap W \in \mathcal{L}$.

L 4) $\forall\, W \in \mathcal{L}$, $\exists\, V \in \mathcal{L}$, $V \subset W$, tal que

$$r, s \in \mathbb{R}^+,\ r \leqslant s \Longrightarrow V[r] \subset V[s],$$

donde, para $t \in \mathbb{R}^+$,

$$V[t] = \{(x, y) \in X \times X : (x, y, t) \in V\}.$$

L 5) $\forall\, W \in \mathcal{L}$, $\exists\, V \in \mathcal{L}$, tal que, para todo $r \in \mathbb{R}^+$,

$$V[r] \circ V[r] \subset W[r].$$

L 6) $W \in \mathcal{L},\ k \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow W^k = \{(x, y, k\, r) : (x, y, r) \in W\} \in \mathcal{L}$.

L 7) $W \in \mathcal{L} \Longrightarrow \overset{-1}{W} = \{(y, x, r) : (x, y, r) \in W\} \in \mathcal{L}$.

Del par $(X, \mathcal{L})$ diremos que es un espacio de Lipschitz.

Como consecuencia inmediata de la definición, $\mathcal{L}$ es un filtro en $X \times X \times \mathbb{R}^+$ y se verifican los siguientes resultados:

Teorema 1.1.—Toda estructura lipschitziana admite una base cuyos elementos, V, verifican las dos condiciones siguientes:

1) $r, s \in \mathbb{R}^+,\ r \leqslant s \Longrightarrow V[r] \subset V[s]$.

2) $V = \overset{-1}{V}$ (V es simétrico).

Teorema 1.2.—Una colección, $\mathcal{B}$, de partes de $X \times X \times \mathbb{R}^+$ es base de alguna estructura lipschitziana en X y si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

B 1) $V \in \mathcal{B} \Longrightarrow V \supset \Delta \times \mathbb{R}^+$.

B 2) $\forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, $\exists\, V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset V_1 \cap V_2$.

B 3) $\forall\, V_1 \in \mathcal{B}$, $\exists\, V_2 \in \mathcal{B}$, $\exists\, W \in \mathcal{P}(X \times X \times \mathbb{R}^+)$ tales que:

a) $r, s \in \mathbb{R}^+,\ r \leqslant s \Longrightarrow W[r] \subset W[s]$.

b) $V_2 \subset W \subset V_1$.

B 4) $\forall\, V_1 \in \mathcal{B}$, $\exists\, V_2 \in \mathcal{B}$ tal que

$$\forall\, r \in \mathbb{R}^+,\ V_2[r] \circ V_2[r] \subset V_1[r].$$

B 5) $\forall\, V_1 \in \mathcal{B}$, $\forall\, k \in \mathbb{R}^+$, $\exists\, V_2 \in \mathcal{B}$ tal que $V_2 \subset V_1^k$.

B 6) $\forall\, V_1 \in \mathcal{B}$, $\exists\, V_2 \in \mathcal{B}$ tal que $V_2 \subset \overset{-1}{V_1}$.

EJEMPLOS:

I) Las partes de $X \times X \times \mathbb{R}^+$ que contienen a $\Delta \times \mathbb{R}^+$ constituyen una estructura lipschitziana en X. Se trata de la estructura lipschitziana más fina sobre X.

II) $\{X \times X \times \mathbb{R}^+\}$ es la estructura lipschitziana menos fina en X.

III) Dada una estructura uniforme, $\mathcal{U}$, en X, resulta que $\mathcal{B} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\}$, donde

$$V_U = \{(x, y, r) : (x, y) \in U,\ r \in \mathbb{R}^+\},$$

es base de una estructura lipschitziana en X.

IV. Si $\{d_i\}_{i \in I}$ es una familia filtrante de semimétricas en X, se puede probar que

$$\mathcal{B} = \{V_{i, \lambda} : i \in I,\ \lambda \in \mathbb{R}^+\},$$

donde

$$V_{i, \lambda} = \{(x, y, r) : \lambda\, d_i(x, y) < r\},$$

es base de una estructura lipschitziana en X. Además, resulta que dos familias de semimétricas inducen, en el sentido anterior, la misma estructura lipschitziana si y sólo si son lipschitzianamente equivalentes.

2. Metrizabilidad de estructuras lipschitzianas

Aunque no toda estructura lipschitziana viene inducida por una familia de semimétricas, sí puede obtenerse de forma análoga a partir de un cierto tipo más general de funciones, tal como indica el siguiente teorema:

TEOREMA 2.1.—Si $\{\delta_i\}_{i \in I}$ es una familia filtrante de funciones

$$\delta_i : X \times X \longrightarrow [0, +\infty]$$

verificando:

1) $\delta_i(x, x) = 0,\ \forall x \in X,\ \forall i \in I.$

2) $\delta_i(x, y) = \delta_i(y, x), \quad \forall\, x, y \in X, \quad \forall\, i \in I.$
3) $\forall\, i \in I, \quad \exists\, j \in I$ tal que

$$\delta_i(x, z) \leqslant \delta_j(x, y) + \delta_j(y, z), \quad \forall\, x, y, z \in X,$$

entonces

$$\mathcal{B} = \{ V_{i,\lambda} : i \in I,\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \},$$

donde

$$V_{i,\lambda} = \{ (x, y, r) : \lambda\, \delta_i(x, y) < r \},$$

es base de una estructura lipschitziana en X.

Además, toda estructura lipschitziana en X puede obtenerse en esta forma a partir de una familia de tales funciones.

DEMOSTRACIÓN.—La primera parte es trivial. Veamos la segunda:

Sea $\mathcal{L}$ una estructura lipschitziana en X, $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{L}$ en las condiciones del teorema 1.1 y definamos, para cada $V \in \mathcal{B}$,

$$\delta_V(x, y) = \begin{cases} \inf\{ r \in \mathbb{R}^+ : (x, y, r) \in V \} & \text{si } \exists\, r \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } (x, y, r) \in V \\ +\infty & \text{si } \forall\, r \in \mathbb{R}^+\ (x, y, r) \notin V \end{cases}$$

Resulta evidente que $\{\delta_V\}_{V \in \mathcal{B}}$ verifica las propiedades 1, 2 y

$$3') \qquad \forall\, W \in \mathcal{B}, \quad \exists\, V \in \mathcal{B}$$

tal que

$$\left.\begin{array}{l} \delta_V(x, y) \leqslant r \\ \delta_V(y, z) \leqslant r \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_W(x, z) \leqslant r.$$

Además, de las relaciones

$$W_{\delta_V, 2} = \{ (x, y, r) : 2\, \delta_V(x, y) < r \} \subset V$$

y

$$V^{2\lambda} \subset \{ (x, y, r) : \lambda\, \delta_V(x, y) < r \} = W_{\delta_V, \lambda}$$

para todo $V \in \mathcal{B}$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$, se obtiene que $\{\delta_V\}_{V \in \mathcal{B}}$ induce la estructura lipschitziana de partida.

La prueba se concluye teniendo en cuenta que para la familia

$$\{\lambda\, \delta_V\}_{V \in \mathcal{B},\, \lambda \in \mathbb{R}^+},$$

que trivialmente induce la misma estructura lipschitziana que $\{\delta_V\}_{V \in \mathcal{B}}$ y hereda de ésta las propiedades 1, 2 y 3', la verificación de 3 equivale a la de 3'.

Un simple análisis de la demostración del teorema anterior conduce a los siguientes resultados:

Corolario 1.—Condición necesaria y suficiente para que una estructura lipschitziana sobre un conjunto X venga inducida por una familia de semimétricas, es que admita una base, $\mathcal{B}$, verificando

1) $\forall\, V \in \mathcal{B},\ \bigcup_{r \in \mathbb{R}^+} V[r] = X \times X$

2) $\forall\, V \in \mathcal{B},\ \forall\, r, s \in \mathbb{R}^+,\ V[r] \circ V[s] \subset V[r+s]$.

Corolario 2.—Condición necesaria y suficiente para que una estructura lipschitziana, $\mathcal{L}$, sobre un conjunto, X, venga inducida por una semimétrica, es que exista $V \in \mathcal{L}$ tal que

1) $\bigcup_{r \in \mathbb{R}^+} V[r] = X \times X$

2) $\forall\, r, s \in \mathbb{R}^+,\ V[r] \circ V[s] \subset V[r+s]$

3) $\forall\, W \in \mathcal{L},\ \exists\, k \in \mathbb{R}^+$ tal que $V^k \subset W$.

Además, esta semimétrica es una métrica si y sólo si

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}^+} V[r] = \Delta.$$

3. Bornología y uniformidad asociadas a una estructura lipschitziana

Sea $(X, \mathcal{L})$ un espacio de Lipschitz.

Definición 3.1.—Diremos que un subconjunto A de X es acotado en $(X, \mathcal{L})$, si para cada $W \in \mathcal{L}$ existe un recubrimiento finito de A, $\{A_1, \ldots, A_n\}$, y un número real positivo, r, tales que

$$\forall\, i = 1, \ldots, n, \quad A_i \times A_i \subset W[r].$$

Los acotados de $(X, \mathcal{L})$ constituyen una bornología en X y, según muestran los ejemplos de estructuras lipschitzianas considerados en el apartado 1, a distintas estructuras sobre un mismo conjunto puede corresponderles la misma bornología.

El siguiente teorema pone de manifiesto la consistencia de la anterior definición con la utilizada en espacios semimétricos.

TEOREMA 3.1.—Si para todo $W \in \mathcal{L}$ se verifica que

$$X \times X = \bigcup_{r \in \mathbb{R}^+} W[r],$$

entonces $A \subset X$ es acotado en $(X, \mathcal{L})$ si y sólo si

$$\forall\, W \in \mathcal{L},\ \exists\, r \in \mathbb{R}^+ \ \text{tal que} \quad A \times A \subset W[r].$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea A un conjunto acotado de $(X, \mathcal{L})$, y $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{L}$ en las condiciones del teorema 1.1.

Dado $W \in \mathcal{L}$, arbitrario, tomemos $V \in \mathcal{B}$ tal que, para todo $r \in \mathbb{R}^+$,

$$V[r] \circ V[r] \circ V[r] \subset W[r].$$

Por ser A acotado existen $s \in \mathbb{R}^+$ y $A_1, \ldots, A_n \subset X$ tales que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{y} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \quad A_i \times A_i \subset V[s].$$

Sean ahora, para $i = 1, \ldots, n$, $x_i \in A_i$ arbitrariamente fijados. Puesto que

$$\bigcup_{r \in \mathbb{R}^+} V[r] = X \times X,$$

existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que, para todos

$$i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad (x_i, x_j) \in V[t].$$

Entonces, si $r = \text{máx}\{s, t\}$, dado cualquier par de elementos x, y, de A, existen $i, j \in \{1, ..., n\}$ tales que

$$(x, x_i) \in V[r]$$
$$(x_i, x_j) \in V[r]$$
$$(x_j, y) \in V[r],$$

y por tanto $(x, y) \in W[r]$.

DEFINICIÓN 3.2.—Si $\mathcal{L}$ es una estructura lipschitziana en X, entonces

$$\mathcal{U}_{\mathcal{L}} = \{W[r] : W \in \mathcal{L}\}$$

es una uniformidad en X, independiente de $r \in \mathbb{R}^+$, que llamaremos uniformidad inducida por $\mathcal{L}$.

Cuando $\mathcal{L}$ está inducida por una familia de semimétricas, la estructura uniforme a que se refiere la anterior definición resulta ser la estructura uniforme que dicha familia de semimétricas induce.

Por otra parte, los ejemplos de estructuras lipschitzianas considerados ponen de manifiesto que toda estructura uniforme procede de alguna estructura lipschitziana, y que estructuras lipschitzianas distintas pueden dar lugar a la misma uniformidad.

DEFINICIÓN 3.3.—Diremos que dos estructuras lipschitzianas sobre un mismo conjunto son uniformemente equivalentes si ambas inducen la misma uniformidad.

Análogamente, diremos que dos estructuras lipschitzianas sobre un mismo conjunto son topológicamente equivalentes si así lo son las uniformidades inducidas por ellas.

El siguiente resultado, de trivial comprobación, relaciona las estructuras bornológica y uniforme asociadas a una estructura lipschitziana.

TEOREMA 3.2.—En un espacio de Lipschitz todo precompacto es acotado.

4. Aplicaciones lipschitzianas

Sean $(X, \mathcal{L})$ y $(X', \mathcal{L}')$ dos espacios de Lipschitz.

DEFINICIÓN 4.1.—Diremos que una aplicación, f, de X en X′ es lipschitziana si

$$\forall W' \in \mathcal{L}', \quad \exists W \in \mathcal{L} \quad \text{tal que} \quad \tilde{f}(W) \subset W',$$

donde

$$\tilde{f}(x, y, r) = (f(x), f(y), r).$$

Se puede comprobar fácilmente que la composición de aplicaciones lipschitzianas es lipschitziana, y que la anterior definición coincide con la usual cuando $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ están inducidas por familias de semimétricas.

Diremos que f es bilipschitziana si es biyectiva y tanto f como f^{-1} son lipschitzianas. En tal caso, es claro que $\tilde{f}$ transforma una en otra las estructuras $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$.

Como consecuencia inmediata de las definiciones se obtiene el siguiente resultado:

TEOREMA 4.1.—Toda aplicación lipschitziana es uniformemente continua y acotada.

5. Estructuras iniciales

TEOREMA 5.1.—Sea X un conjunto, $\{(X_i, \mathcal{L}_i)\}_{i \in I}$ una colección de espacios de Lipschitz, y f_i, $i \in I$, aplicaciones de X en X_i. Entonces, la familia, $\mathcal{B}$, de las partes de $X \times X \times \mathbb{R}^+$ de la forma

$$W(W_{i_1}, \ldots, W_{i_n}) = \tilde{f}_{i_1}^{-1}(W_{i_1}) \cap \cdots \cap \tilde{f}_{i_n}^{-1}(W_{i_n}),$$

con

$$n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I \quad \text{y} \quad W_{i_1} \in \mathcal{L}_{i_1}, \ldots, W_{i_n} \in \mathcal{L}_{i_n},$$

es base de una estructura lipschitziana en X. Se trata de la estructura lipschitziana menos fina que hace lipschitzianas a todas las f_i. Respecto a ella, una aplicación, f, de cualquier espacio de Lipschitz en X es lipschitziana si y sólo si lo son todas las $f_i \circ f$.

Demostración.—Bastará probar que $\mathcal{B}$ verifica las condiciones B1 a B6 del teorema 1.2.

B1. Trivial.

B2: Dados

$$W(W'_{i_1}, \ldots, W'_{i_n}) \quad \text{y} \quad W(W''_{j_1}, \ldots, W''_{j_m}),$$

consideremos, para cada $k \in \{i_1, \ldots, i_n\} \cup \{j_1, \ldots, j_m\}$,

$$W_k = \begin{cases} W'_k \cap W''_k & \text{si} \quad k \in \{i_1, \ldots, i_n\} \cap \{j_1, \ldots, j_m\} \\ W'_k & \text{si} \quad k \in \{i_1, \ldots, i_n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_m\} \\ W''_k & \text{si} \quad k \in \{j_1, \ldots, j_m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_n\} \end{cases}$$

Resulta entonces que

$$W(W_{i_1}, \ldots, W_{i_n}, W_{j_1}, \ldots, W_{j_m}) = W(W'_{i_1}, \ldots, W'_{i_n}) \cap W(W''_{j_1}, \ldots, W''_{j_m}).$$

B3: Dado $W(W_{i_1}, \ldots, W_{i_n})$, sean V_{i_j}, $j = 1, \ldots, n$, en las condiciones de L4 respecto a W_{i_j}, en $\mathcal{L}_{i_j}$. No es difícil comprobar que $W(V_{i_1}, \ldots, V_{i_n})$, que desde luego está contenido en

$$W(W_{i_1}, \ldots, W_{i_n}),$$

es tal que, $\forall\, r, s \in \mathbb{R}^+$, $r \leqslant s$,

$$W(V_{i_1}, \ldots, V_{i_n})[r] \subset W(V_{i_1}, \ldots, V_{i_n})[s].$$

B4: Basta considerar con cada $W(W_{i_1}, \ldots, W_{i_n}) \in \mathcal{B}$ el conjunto $W(V_{i_1}, \ldots, V_{i_n})$, donde $V_{i_j} \in \mathcal{L}_{i_j}$ es tal que, para todo $r \in \mathbb{R}^+$,

$$V_{i_j}[r] \circ V_{i_j}[r] \subset W_{i_j}[r].$$

B5: Es consecuencia de la relación

$$W(W^k_{i_1}, \ldots, W^k_{i_n}) \subset [W(W_{i_1}, \ldots, W_{i_n})]^k,$$

cuya comprobación es inmediata.

B6: Consecuencia trivial de la igualdad

$$W(\overset{-1}{W}_{i_1}, \ldots, \overset{-1}{W}_{i_n}) = \overset{-1}{W}(W_{i_1}, \ldots, W_{i_n}).$$

TEOREMA 5.2.—Sea X un conjunto, $\{(X_i, \mathcal{L}_i)\}_{i \in I}$ una colección de espacios de Lipschitz, y f_i, $i \in I$, aplicaciones de X en X_i. Entonces la estructura lipschitziana inicial de las $\mathcal{L}_i$ respecto a las aplicaciones f_i, es decir, la estructura lipschitziana sobre X determinada en el teorema anterior, induce la estructura uniforme inicial de las inducidas por las $\mathcal{L}_i$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta tener presente que, si

$$W_{i_1} \in \mathcal{L}_{i_1}, \ldots, W_{i_n} \in \mathcal{L}_{i_n}, \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$$

se verifica

$$W(W_{i_1}, \ldots, W_{i_n})[r] = \left[\bigcap_{j=1}^{n} \hat{f}_{i_j}^{-1}(W_{i_j}) \right][r] =$$

$$= \bigcap_{j=1}^{n} ([\hat{f}_{i_j}^{-1}(W_{i_j})][r]) = \cap \hat{f}_{i_j}^{-1}(W_{i_j}[r]),$$

donde $\hat{f}(x, y) = (f(x), f(y))$.

Utilizando la misma notación que en los teoremas precedentes, se tiene:

TEOREMA 5.3.—La bornología asociada a la estructura lipschitziana inicial de las $\mathcal{L}_i$, es la bornología inicial de las asociadas a las $\mathcal{L}_i$.

DEMOSTRACIÓN.—Denotemos con $\mathcal{L}$ la estructura lipschitziana inicial de las $\mathcal{L}_i$.

Si A es acotado en $(X, \mathcal{L})$, entonces $f_i(A)$ es acotado en $(X_i, \mathcal{L}_i)$ como consecuencia inmediata del carácter lipschitziano de las aplicaciones f_i.

Recíprocamente, supongamos que $A \subset X$ es tal que, para cada $i \in I$, $f_i(A)$ es acotado en $(X_i, \mathcal{L}_i)$, y probemos que A es acotado en $(X, \mathcal{L})$:

Dada la naturaleza de $\mathcal{L}$, bastará comprobar la condición de acotación de A para los $W \in \mathcal{L}$ de la forma

$$W = W(W_i) = \tilde{f}_i^{-1}(W_i),$$

con $i \in I$ y $W_i \in \mathcal{L}_i$.

Sea entonces $W = W(W_i)$, arbitrariamente fijado. Puesto que $f_i(A)$ es acotado en $(X_i, \mathcal{L}_i)$, existirán

$$A^i_1, \ldots, A^i_{n_i} \subset X_i \quad \text{y} \quad r_i \in \mathbb{R}^+$$

tales que:

$$f_i(A) = \bigcup_{k=1}^{n_i} A^i_k$$

y

$$A^i_k \times A^i_k \times \{r_i\} \subset W_i, \quad \forall\, k = 1, \ldots, n_i,$$

y que, por tanto, verificarán las relaciones

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n_i} f_i^{-1}(A^i_k)$$

y

$$f_i^{-1}(A^i_k) \times f_i^{-1}(A^i_k) \times \{r_i\} \subset W(W_i), \quad \forall\, k = 1, \ldots, n_i,$$

con las que se concluye la demostración.

Definición 5.1.—Sea $\{(X_i, \mathcal{L}_i)\}_{i \in I}$ una colección de espacios de Lipschitz y $X = \prod_{i \in I} X_i$. Llamaremos estructura lipschitziana producto de las $\mathcal{L}_i$, y la denotaremos por $\prod_{i \in I} \mathcal{L}_i$, a la estructura lipschitziana, en X, inicial para las proyecciones

$$p_i : X \longrightarrow X_i, \quad i \in I.$$

El siguiente teorema, cuya demostración omitimos por no presentar especial dificultad, muestra la consistencia de la anterior definición con la análoga para espacios semimétricos.

TEOREMA 5.4.—Si cada $\mathcal{L}_i$, $i \in$ I, viene inducida por la familia de semimétricas $\{d^i{}_j\}_{j \in J_i}$, entonces la estructura lipschitziana producto, $\prod_{i \in I} \mathcal{L}_i$, está inducida por la familia de simétricas de la forma

$$((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) \longrightarrow \max_{i \in K} \{ d^i{}_{j_i} (x_i, y_i) \},$$

donde K es una parte finita de I y $j_i \in J_i$.

Aunque debido a su sencillez no lo hagamos, cabría considerar ahora las otras situaciones particulares de estructuras iniciales que, en forma standard, conducen a los conceptos de estructura lipschitziana supremo, imagen inversa de una estructura lipschitziana, estructura lipschitziana inducida, etc.

6. Estructuras lipschitzianas en un espacio vectorial topológico

Los espacios vectoriales a los que se haga referencia se sobreentenderán siempre reales o complejos.

TEOREMA 6.1.—Sea E un espacio vectorial y $\mathcal{L}$ una estructura lipschitziana en E. Entonces la suma en E es lipschitziana si y sólo si $\mathcal{L}$ admite una base, $\mathcal{B}$, cuyos elementos, V, verifiquen

$$\left.\begin{array}{r} (x, y, r) \in V \\ z \in E \end{array}\right\} \Longrightarrow (x + z, y + z, r) \in V$$

DEMOSTRACIÓN.

a) Supongamos que $\mathcal{L}$ admite una base, $\mathcal{B}$, en las condiciones anteriores, y dado $W \in \mathcal{L}$, arbitrario, consideremos $V \in \mathcal{B}$ tal que, para todo $r \in \mathbb{R}^+$,

$$V[r] \circ V[r] \subset W[r].$$

Entonces, para cada

$$((x, u) ; (y, v) ; r) \in \tilde{p}_1^{-1} (V) \cap \tilde{p}_2^{-1} (V).$$

se tiene, dada la «invariancia en traslaciones» de V,

$$(x + u, y + v, r) \in V$$
$$(u + y, v + y, r) \in V$$

y por tanto

$$(x + u, y + v, r) \in W,$$

lo que expresa el carácter lipschitziano de la suma

b) Por ser la suma lipschitziana en E, dado W $\in \mathcal{L}$ existe V $\in \mathcal{L}$ tal que

$$\left.\begin{array}{l}(x, y, r) \in V \\ (u, v, r) \in V\end{array}\right\} \Longrightarrow (x + u, y + v, r) \in W$$

Entonces, es muy sencillo comprobar que $V^* \subset E \times E \times \mathbb{R}^+$, definido por

$$V^* [r] = \bigcup_{x \in E} ((x, x) + V [r]), \quad r \in \mathbb{R}^+,$$

es tal que:

— contiene a V y, por tanto, pertenece a $\mathcal{L}$
— es invariante en traslaciones
— está contenido en W,

con lo que se completa la demostración.

Teorema 6.2.—Si E es un espacio vectorial topológico, existe una única estructura lipschitziana en E que, induciendo la topología de E, admita una base, $\mathcal{B}$, verificando

$$1) \quad \left.\begin{array}{l}V \in \mathcal{B} \\ (x, y, r) \in V \\ z \in E\end{array}\right\} \Longrightarrow (x + z, y + z, r) \in V$$

$$2) \quad \left.\begin{array}{l}V \in \mathcal{B} \\ (x, y, r) \in V \\ \lambda \in \mathbb{R}^+\end{array}\right\} \Longrightarrow (\lambda x, \lambda y, \lambda r) \in V.$$

DEMOSTRACIÓN.

a) *Unicidad.*—Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ estructuras lipschitzianas en E en las condiciones del teorema respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Puesto que ambas inducen estructuras uniformes invariantes en traslaciones, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son uniformemente equivalentes.

Entonces, ya que $\mathcal{U}_{\mathcal{L}_2}$ es más fina que $\mathcal{U}_{\mathcal{L}_1}$,

$$\forall V_1 \in \mathcal{B}_1, \exists V_2 \in \mathcal{B}_2 \quad \text{tal que} \quad V_2 [1] \subset V_1 [1]$$

de donde, para todo $r \in \mathbb{R}^+$,

$$V_2 [r] = r V_2 [1] \subset r V_1 [1] = V_1 [r].$$

Es decir, V_2 está contenido en V_1 y, por tanto $\mathcal{L}_2$ es más fina que $\mathcal{L}_1$.

Análogamente se puede obtener que $\mathcal{L}_1$ es más fina que $\mathcal{L}_2$.

b) *Existencia.*—Basta considerar la estructura lipschitziana definida por las funciones

$$\delta_N (x, y) = p_N (x - y),$$

cuando N recorre un sistema fundamental de entornos equilibrados del origen, y donde p_N denota el funcional de Minkowski de N.

A la estructura lipschitziana caracterizada en el anterior teorema, que llamaremos estructura canónica de un espacio vectorial topológico, se refieren los siguientes resultados:

TEOREMA 6.3.—Sean E y F espacios vectoriales topológicos sobre el mismo cuerpo. Una aplicación lineal de E en F es continua si y sólo si es lipschitziana.

DEMOSTRACIÓN.—Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de E y F, respectivamente, en las condiciones del teorema anterior, y f una aplicación lineal y continua de E en F. Por ser f uniformemente continua, dado $V' \in \mathcal{B}'$ existe $V \in \mathcal{B}$ tal que

$$(x, y) \in V [1] \Rightarrow (f (x), f (y)) \in V' [1]$$

de donde, dada la linealidad de f,

$$(x, y) \in V[r] = r\,V[1] \Rightarrow (f(x), f(y)) \in r\,V'[1] = V'[r],$$

es decir, $\tilde{f}(V) \subset V'$.

Teorema 6.4.—Sean $(X, \mathcal{L})$ un espacio de Lipschitz y E un espacio vectorial topológico. Cualesquiera que sean f y g, aplicaciones lipschitzianas de X en E, y cualesquiera que sean λ y μ, escalares, la aplicación $\lambda f + \mu g$ es lipschitziana.

Teorema 6.5.—Sea E un espacio vectorial topológico y $\mathcal{L}$ su estructura canónica. Entonces, $A \subset E$ es acotado en $(E, \mathcal{L})$ si y sólo si es acotado canónico de E.

Demostración.

a) Si A es acotado canónico de E también lo es $A - A$ y, en consecuencia, para todo entorno equilibrado del origen, N, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $A - A \subset r\,N$. Se tiene, entonces,

$$\delta_N(x, y) = p_N(x - y) \leqslant r, \quad \forall\, x, y \in A$$

y, por tanto, A es acotado en $(E, \mathcal{L})$.

b) Si A es acotado en $(E, \mathcal{L})$ se verifica, de acuerdo con el teorema 3.1, que

$$\forall\, W \in \mathcal{L},\ \exists\, r \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tal que} \quad A \times A \subset W[r].$$

Condición que para los elementos de la base de $\mathcal{L}$ obtenida a partir de las funciones δ_N, según el procedimiento señalado en el teorema 2.1, puede escribirse en la forma

$$\forall\, N,\ \exists\, r \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tal que} \quad \forall\, x, y \in A,\ p_N(x - y) = \delta_N(x, y) < r,$$

de donde resulta que, para cualquier y de A, $A - y$ es acotado canónico de E, y por tanto también lo es A.

Teorema 6.6.—En un espacio vectorial topológico, E, sobre $\mathbb{K}$, el producto por escalares es lipschitziano en las partes acotadas de $\mathbb{K} \times E$.

DEMOSTRACIÓN.—Bastará probar que el producto por escalares es lipschitziano en los conjuntos de la forma $B(0, s) \times A$, donde A es un acotado de E. Para probarlo, sea $\mathcal{B}$ una base de la estructura lipschitziana canónica de E verificando las condiciones del teorema 6.2.

Puesto que $B(0, s) \cdot A$ es acotado de E, dado $V' \in \mathcal{B}$ existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$B(0, s) \cdot A \times B(0, s) \cdot A \subset V'[t]. \tag{1}$$

Por otra parte, al ser el producto por escalares uniformemente continuo en $B(0, s) \times A$, dado $V' \in \mathcal{B}$ existe $V \in \mathcal{B}$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in A \\ (x, y) \in V[1] \\ \lambda, \mu \in B(0, s) \\ |\lambda - \mu| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow (\lambda x, \mu y) \in V'[1]. \tag{2}$$

Sean, ahora, $x, y \in A$, $\lambda, \mu \in B(0, s)$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$(x, y, r) \in V \quad \text{y} \quad \frac{t}{\delta} |\lambda - \mu| < r.$$

Entonces:

— Si $r \geqslant t$ se verifica $(\lambda x, \mu y, r) \in V'$, como consecuencia trivial de (1).

— Si $r < t$, se tiene

$$\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) \in V[1]$$

$$|\lambda - \mu| < \frac{r\delta}{t} < \delta$$

y, por tanto, de acuerdo con (2), también se verifica $(\lambda x, \mu y, r) \in V'$.

Agradecimiento

Quiero dejar constancia de mi agradecimiento al profesor C. Benítez, quien me propuso, como tema de estudio, la búsqueda de una estructura —la estructura lipschitziana definida y estudiada en el

presente trabajo— que, siendo menos restrictiva que la estructura métrica, permitiese una formulación natural del concepto de aplicación lipschitziana y tuviese a estas aplicaciones por morfismos.

Bibliografía

[1] BOURBAKI, N. Topologie générale: Cap. 1-4 (1971), Cap. 9 (1958); Hermann, Paris.

[2] HOGBE-NLEND, H. (1971). Théorie des Bornologies et Applications. *Lecture Notes in Math.*, n.º 213, Springer.

[3] SCHAEFER, H. H. (1971). Espacios vectoriales topológicos. Teide, Barcelona.

[4] SCHWARTZ, L. (1970). Analyse: Topologie générale et analyse foctionnelle. Hermann, Paris.