INESTABILIDAD ELASTICA EN RELACION CON EL VALOR CRITICO DE UNA FORMA CUADRATICA, EN EL ESPACIO DE HILBERT

Emilio Garbayo Martínez

Recibido: **9** mayo **1979**

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. ALBERTO DOU MASDEXEXÁS

In this article a cuadratic functional is exhibited with linear dependence on a positive parameter q This functional is defined on a subspace of the whole Hilbert space.

Such a functional arises related to the study of the statical buckling of a circular arch under its own weight. In analizing the functional, three theorems are proved. Theorem 1 shows the existence of a number q, finite and positive, at which the functional changes from strongly positive to sign indefinite.

Theorem 2 shows that for such a number q, noted q_{cr}, the functional is semidefinite, with an element in the domain of definition at which the functional takes exactly the zero value. Theorem 3 establishes an infinite sequence of finite dimensional eigenvalue problems, in such a manner that the sequence of positive eigenvalues, of least absolute value, converges to the number q_{cr}. This would allow, at least in principle, to dessign easily a numerical method to compute q_{cr} by means of an approximating sequence.

Presentación y referencia

En un resumen de resultados publicado con anterioridad [1] se presentaba el funcional cuadrático $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T} = \int_{-a}^{+a} ((1 - c)(g(\varphi) - h'(\varphi))^2 + c(g(\varphi) + g''(\varphi))^2)\, d\varphi + \\ + q \int_{-a}^{+a} F(\varphi)(h(\varphi) + g'(\varphi))(h'(\varphi) - g(\varphi))\, d\varphi \tag{1}$$

que surge al estudiar el pandeo estático de un arco circular sometido a su propio peso [2]. Aquí c es una constante real $0 < c < 1$, y $[-a, +a]$ es el intervalo real, cerrado y acotado, al que pertenecen los valores de la variable independiente φ. Por otra parte, $F(\varphi)$ es una función conocida, de valores reales, de clase $C^1[-a, a]$, cuya expresión explícita puede verse en la referencia (2), mientras que $g(\varphi)$, $h(\varphi)$ son funciones que varían, respectivamente, en cada uno de los subespacios

$$\mathcal{D}_1 = \{ g \in C^2 [-a, a] \mid g(a) = g(-a) = 0 \}$$
$$\mathcal{D}_2 = \{ h \in C^1 [-a, a] \mid h(a) = h(-a) = 0 \} \tag{2}$$

La letra q representa un parámetro real positivo, cuyo valor llamado crítico q_{cr} se trata de hallar y del que damos la siguiente:

Definición 1.1.—Llamamos crítico, q_{cr}, al valor numérico de q con las siguientes propiedades: a) Para todo q, $0 \leqslant q < q_{cr}$ existe un número γ estrictamente positivo, de modo que para toda pareja de funciones $g \in \mathcal{D}_1$, $h \in \mathcal{D}_2$ se verifica

$$\mathfrak{T} \geqslant \gamma \int_{-a}^{+a} (g^2(\varphi) + h^2(\varphi))\, d\varphi \tag{3}$$

y, además: b) Para todo $q > q_{cr}$ existe al menos una pareja de funciones $g \in \mathcal{D}_1$, $h \in \mathcal{D}_2$ para las cuales es $\mathfrak{T} < 0$. Con la anterior definición es inmediato, que si existiese tal valor q_{cr} debería ser único.

Teorema 1.—Existe un valor real positivo q_{cr} que satisface las condiciones a), b) de la anterior definición.

Para demostrar este teorema, organizamos una serie de lemas y definiciones previos.

Lema 1.2.—Si consideramos el espacio producto de Hilbert $L_2(-a, a) \times L_2(-a, a)$ con el producto escalar típico

$$\forall\, e_1, e_2 \in L_2(-a, a)\ \forall\, f_1, f_2 \in L_2(-a, a),\ \langle (e_1, f_1) ; (e_2, f_2) \rangle =$$
$$= \int_{-a}^{+a} (e_1(\varphi)\, e_2(\varphi) + f_1(\varphi)\, f_2(\varphi))\, d\varphi \tag{4}$$

el operador lineal T, de dominio de definición $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, dado por

$$\forall g(\varphi) \in \mathcal{D}_1, \ \forall h(\varphi) \in \mathcal{D}_2, \quad (e(\varphi), f(\varphi)) \equiv T(g(\varphi), h(\varphi)) = \\ = (\sqrt{1-c}\,(h'(\varphi) - g(\varphi)), \quad \sqrt{c}\,(g(\varphi) + g''(\varphi)) \tag{5}$$

es inyectivo, y su imagen es un hiperplano de $C[-a, a] \times C[-a, a]$ (su clausura es, por tanto, un hiperplano del espacio producto de Hilbert).

En efecto, la inyectividad equivale a que el problema lineal de contorno homogéneo

$$h'(\varphi) - g(\varphi) = 0, \quad g(\varphi) + g''(\varphi) = 0, \quad g(\pm a) = h(\pm a) = 0 \tag{6}$$

sólo tenga la solución trivial. Lo que es cierto y comprobable con los métodos elementales de resolución de sistemas diferenciales lineales de coeficientes constantes.

En cuanto a la imagen, que notaremos Imag T, recordemos que según nos enseña la teoría, el problema de contorno

$$T(g, h) = (e, f) \quad g \in \mathcal{D}_1 \quad h \in \mathcal{D}_2 \tag{7}$$

tiene solución si y sólo si (e, f) es ortogonal al subespacio de las soluciones (g_1, h_1) del problema homogéneo llamado adjunto:

$$T^*(g_1, h_1) = (0, 0) \quad g_1 \in \mathcal{D}_1^* \quad h_1 \in \mathcal{D}_2^*. \tag{8}$$

Los métodos habituales nos permiten hallar [3] $\mathcal{D}_1^*$, $\mathcal{D}_2^*$, T^* en la forma:

$$\mathcal{D}_1^* = C^1[-a, a] \quad \mathcal{D}_2^* = \{ h_1 \in C^2[-a, a] \mid h_1(+a) = h_1(-a) = 0 \} \\ \forall g_1(\varphi) \in \mathcal{D}_1^* \ \forall h_1(\varphi) \in \mathcal{D}_2^*, \quad T^*(g_1, h_1) = (-\sqrt{1-c}\, g_1 + \\ + \sqrt{c}\,(h_1'' + h_1), \quad -\sqrt{1-c}\, g'_1) \tag{9}$$

comprobándose con sólo recursos calculísticos elementales que las soluciones del problema homogéneo adjunto forman un subespacio de dimensión uno, que se. explicita fácilmente como generado por el vector

$$\text{si} \quad a = \pi/2\,(g_1 = 0, h_1 = \cos\varphi) \quad \text{si} \quad \pi/2 \neq a < \pi \left(g_1 = \frac{\cos a}{\sqrt{1-c}}, h_1 = \right. \\ \left. = \frac{1}{\sqrt{c}} (\cos a - \cos\varphi) \right) \tag{10}$$

es decir, el conjunto de elementos (e, f) de la imagen constituye el subespacio de $C[-a, a] \times C[-a, a]$ que es ortogonal a un vector determinado y es, por tanto, un hiperplano Imag T

$$\forall\,(e(\varphi), f(\varphi)) \in \text{ImagT}, \quad \int_{-a}^{+a} (g_1(\varphi)\, e(\varphi) + h_1(\varphi)\, f(\varphi))\, d\varphi = 0 \qquad (11)$$

LEMA 1.3.—La transformación $T^{-1} : \text{Imag T} \longrightarrow \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ es acotada y puede extenderse a todo el espacio $L_2(-a, a) \times L_2(-a, a)$ de modo que resulte un operador compacto.

En efecto, al poseer el problema homogéneo

$$T(g, h) = (0, 0) \quad g \in \mathcal{D}_1 \quad h \in \mathcal{D}_2 \qquad (12)$$

únicamente la solución trivial (lema 1.1) la teoría afirma la existencia de una «matriz de Green» [4] de modo que $\forall\,(e(\varphi), f(\varphi)) \in$ Imag T

$$(g(\varphi), h(\varphi)) = T^{-1}(e(\varphi), f(\varphi)) = \int_{-a}^{+a} (e(t), f(t)) \begin{pmatrix} G_{11}(\varphi, t) & G_{12}(\varphi, t) \\ G_{21}(\varphi, t) & G_{22}(\varphi, t) \end{pmatrix} dt \qquad (13)$$

Para las $G_{ij}(\varphi, t)$ $i = 1, 2$ puede asegurarse, según los resultados clásicos de la teoría, que se verifica:

I) Las $G_{i1}(\varphi, t)$ $i = 1, 2$ que son las que expresan la componente $g(\varphi)$, son continuas en el cuadrado cerrado $-a \leqslant \varphi,\ t \leqslant a$.

II) Las $G_{ij}(\varphi, t)$ $i, j = 1, 2$ admiten derivadas parciales continuas y acotadas de cualquier orden $\geqslant 0$, en cada uno de los triángulos semiabiertos

$$-a \leqslant \varphi, t \leqslant a \quad -a \leqslant t, \varphi \leqslant a \qquad (14)$$

(la condición de que el orden de derivación pueda ser cualquiera se debe a que el operador diferencial T es de coeficientes constantes).

En virtud de los I y II recién enunciados, podemos asegurar que se verifica la condición de «Hilbert-Schmidt» [5]

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \sum_{i,j=1}^{2} |G_{ij}(\varphi, t)|^2\, d\varphi\, dt < +\infty \qquad (15)$$

para que el operador dado por (13) esté definido en todo $L_2(-a, a) \times L_2(-a, a)$ y sea compacto.

DEFINICIÓN 1.4.—El funcional cuadrático $\mathcal{C}_1$ se define en el subespacio $\operatorname{Imag} T \subset C[-a, a] \times C[-a, a]$ en la forma:

$$\forall\, (e(\varphi), f(\varphi)) \in \operatorname{Imag}T \quad \mathcal{C}_1(e, f) = \mathcal{C}(T^{-1}(e, f)). \tag{16}$$

LEMA 1.5.—La transformación compuesta $M \circ T^{-1}$ según el diagrama

$$\operatorname{Imag}T \xrightarrow[T^{-1}]{} \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \xrightarrow[M]{} C[-a, a] \times C[-a, a] \tag{17}$$

y definida por las fórmulas

$$\forall\, g \in \mathcal{D}_1 \quad \forall\, h \in \mathcal{D}_2, \quad M(g, h) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-c}} F(\varphi)(h(\varphi) + g'(\varphi)), \quad 0\right) \tag{18}$$

es no nula, acotada y puede extenderse a todo el espacio producto de Hilbert como operador compacto.

En efecto, escribiendo $A = M \circ T^{-1}$ busquemos expresar A en la forma de operador integral:

$$\forall\, (e, f) \in \operatorname{Imag}T, \quad A(e(\varphi), f(\varphi)) =$$

$$= \int_{-a}^{+a} (e(t), f(t)) \begin{pmatrix} M_{11}(\varphi, t) & M_{12}(\varphi, t) \\ M_{21}(\varphi, t) & M_{22}(\varphi, t) \end{pmatrix} d\,t. \tag{19}$$

La (18) indica por simple inspección que deben ser nulos los elementos $M_{i2}(\varphi, t) = 0$ con $i = 1, 2$ mientras que, por otra parte,

$$g'(\varphi) = \frac{d}{\partial \varphi} \int_{-a}^{a} G_{11}(\varphi, t)\, e(t)\, d\,t + G_{21}(\varphi, t)\, f(t)\, d\,t =$$

$$= \frac{d}{d\varphi} \left[\int_{-a}^{\varphi} + \int_{\varphi}^{a}\right] (G_{11}(\varphi, t)\, e(t) + G_{21}(\varphi, t)\, f(t))\, d\,t =$$

(según las clásicas fórmulas de derivación paramétrica [6] de integrales)

$$= \left(\int_{-a}^{\varphi} + \int_{\varphi}^{a}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} G_{11}(\varphi, t)\, e(t) + \frac{\partial}{\partial \varphi} G_{21}(\varphi, t)\, f(t)\right) d\,t +$$

$$+ (G_{11}(\varphi, \varphi - 0) - G_{11}(\varphi, \varphi + 0))\, e(\varphi) + (G_{21}(\varphi, \varphi - 0) - G_{21}(\varphi, \varphi + 0))\, f(\varphi) \tag{20}$$

de donde se concluye, teniendo en cuenta las I-(14) y (18)

$$M_{i1}(\varphi, t) = (G_{i2}(\varphi, t) + \frac{\partial}{\partial \varphi} G_{i1}(\varphi, t)) F(\varphi) (\sqrt{1-c})^{-1} \tag{21}$$

con lo que las (14)-I-II aseguran la condición

$$\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \sum_{i,j=1}^{2} | M_{ij}(\varphi, t) |^2 \, d\varphi \, dt < +\infty \tag{22}$$

que es suficiente para suponer el operador A dado por (19) definido en todo el espacio $L_2(-a, a) \times L_2(-a, a)$ y de carácter compacto.

Lema 1.6.—Si $\| A \|$ denota la norma del operador A dado por (19), podemos asegurar que se verifica:

$$\begin{gathered} \forall q \in (0, \| A \|^{-1}), \quad \exists \gamma(q) > 0, \quad \forall g(\varphi) \in \mathcal{D}_1 \quad \forall h(\varphi) \in \mathcal{D}_2, \\ \mathcal{C}(q; g(\varphi), h(\varphi)) \geqslant \gamma \int_{-a}^{a} (g^2(\varphi) + h^2(\varphi)) \, d\varphi \end{gathered} \tag{23}$$

donde $\mathcal{C}$ viene dado por la expresión (1).

En efecto, con la notación $u = (e(\varphi), f(\varphi)) \in \operatorname{Imag} T$ y las fórmulas (16), (18) y (19) se puede escribir

$$\mathcal{C}_1(e, f) = \| u \|^2 + q \langle A u ; u \rangle \tag{24}$$

y si ponemos $(g, h) = T^{-1}(e, f)$ las propiedades elementales de la norma conllevan la validez de la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(q; g(\varphi), h(\varphi)) = \mathcal{C}_1(u) = \| u \|^2 + q \langle A u ; u \rangle \geqslant \| u \|^2 - q \,| \langle A u ; u \rangle | \geqslant \\ \geqslant \| u \|^2 - q \| A u \| \, \| u \| \geqslant \| u \|^2 (1 - q \| A \|) \end{aligned} \tag{25}$$

que es un número estrictamente positivo si u no se supone el elemento cero de Imag T y si, además, $q < \| A \|^{-1}$. Por otra parte, al ser el operador T^{-1} no nulo y compacto, resulta

$$\| (g, h) \| = \| T^{-1} u \| \leqslant \| T^{-1} \| \, \| u \| \tag{26}$$

lo que se combina con la anterior (25) y nos proporciona:

$$\begin{aligned}&\forall\, q \in [0, \| A \|^{-1})\ \forall\, g(\varphi) \in \mathcal{D}_1\ \forall\, h(\varphi) \in \mathcal{D}_2\\ &\mathcal{T}(q\,;\, g, h) \geqslant \| u \|^2 (1 - q \| A \|) \geqslant \| T^{-1} \|^{-2} (1 - q \| A \|)\ \| (g, h) \|^2\end{aligned} \tag{27}$$

lo que demuestra la (23) con $\gamma(q) = \| T^{-1} \|^{-2} (1 - q \| A \|)$.

LEMA 1.7.—El conjunto W de números reales positivos q, para los que se verifica la condición (23), es decir

$$\begin{aligned}&\forall\, q \in W \subset R^+,\quad \exists\, \gamma(q) > 0,\quad \forall\, g(\varphi) \in \mathcal{D}_1\quad \forall\, h(\varphi) \in \mathcal{D}_2,\\ &\mathcal{T}(q\,;\, g(\varphi), h(\varphi)) \geqslant \gamma(q) \int_{-a}^{a} (g^2(\varphi) + h^2(\varphi))\, d\varphi\end{aligned} \tag{28}$$

es un intervalo no vacío.

En efecto, la no vacuidad resulta del anterior lema 1.6, por lo que sólo nos resta probar que W es conexo y, en consecuencia, un intervalo. Si $q \in W$ y si $q' < q$ con la notación del lema anterior

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(q'\,;\, g(\varphi), h(\varphi)) &= \| u \|^2 + q' \langle A\, u\,;\, u \rangle \geqslant \| u \|^2 + q'\, q^{-1} (\gamma(q)\, \| (g, h) \|^2 - \| u \|^2) =\\ &= (1 - q'\, q^{-1})\, \| u \|^2 + q'\, q^{-1}\, \gamma(q)\, \| (g, h) \|^2 \geqslant q'\, q^{-1}\, \gamma(q)\, \| (g, h) \|^2\end{aligned} \tag{29}$$

lo que prueba que $q' \in W$.

LEMA 1.8.—El extremo superior q_{cr} del subconjunto $W \subset R^+$ según notación del lema 1.7 es finito.

La demostración se basa en encontrar una pareja de funciones $(e_0(\varphi), f_0(\varphi)) \in \operatorname{Imag} T$ que con la notación $u_0 = (e_0(\varphi), f_0(\varphi))$ verifiquen estrictamente $\langle A\, u_0\,;\, u_0 \rangle < 0$, pues en ese caso la fórmula (25) nos dice

$$q_{cr} \leqslant \| u_0 \|^2\, | \langle A\, u_0\,;\, u_0 \rangle |^{-1}. \tag{30}$$

Para la existencia de tales funciones recordemos que con la notación $(g, h) = T^{-1} u$ resulta

$$\langle A\, u\,;\, u \rangle = \int_{-a}^{a} F(\varphi)\, (h(\varphi) + g'(\varphi))\, (h'(\varphi) - g(\varphi))\, d\varphi \tag{31}$$

y recordando también que $F(\varphi) \in C^1[-a, a]$ supongamos que exista un número φ_* tal que $F'(\varphi_*) > 0$; tomando entonces $g_0(\varphi) = 0$ (si, por el contrario, $F'(\varphi_*) < 0$ habríamos tomado la función $h_0(\varphi)$ como idénticamente nula) elejimos $h_0(\varphi) \in \mathcal{D}_2$ tal que se anule fuera de un entorno $(\varphi_* - d, \varphi_* + d)$ en el que F' conserve su signo estrictamente positivo, con lo cual

$$\langle A u_0 ; u_0 \rangle = \int_{-a}^{a} F(\varphi)(h_0 + g'_0)(h'_0 - g_0)\, d\varphi = \int_{-a}^{a} F(\varphi)\, h_0(\varphi)\, h'_0(\varphi)\, d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2} F'(\varphi)\, h^2_0(\varphi) \Big|_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} \frac{1}{2} h^2_0(\varphi)\, F'(\varphi)\, d\varphi = -\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} h^2_0(\varphi)\, F'(\varphi)\, d\varphi =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\varphi_*-d}^{\varphi_*+d} h^2_0(\varphi)\, F'(\varphi)\, d\varphi < 0 \tag{32}$$

LEMA 1.9.—Si tenemos un número real positivo q estrictamente mayor que el valor q_{cr} del lema 1.8, podemos asegurar la existencia de al menos dos funciones $g(\varphi) \in \mathcal{D}_1$, $h(\varphi) \in \mathcal{D}_2$ tales que

$$\mathcal{C}(q ; g(\varphi), h(\varphi)) < 0. \tag{33}$$

En efecto, usemos las notaciones

$$q - q_{cr} = d > 0, \quad p = q_{cr} + (d/2) = d(4p + 2d)^{-1} \| T^{-1} \|^{-2} \tag{34}$$

y con la notación $T^{-1} u = (g, h)$ sea $u \in \operatorname{Imag} T$ de tal modo que

$$\| u \|^2 + p \langle A u ; u \rangle < \gamma \| (g, h) \|^2. \tag{35}$$

Es claro que al menos un tal u tiene que existir, puesto que $p > q_{cr}$, con lo cual podemos utilizar las relaciones (34) y (35) para mayorar sucesivamente la expresión dada por (33)

$$\mathcal{C}(q ; g, h) = \| u \|^2 + q \langle A u ; u \rangle = \| u \|^2 + p \langle A u ; u \rangle + (q - p) \langle A u ; u \rangle =$$
$$= \| u \|^2 + p \langle A u ; u \rangle + (d/2) \langle A u ; u \rangle < \| u \|^2 + p \langle A u ; u \rangle +$$
$$+ (d/2p)(\gamma \| (g, h) \|^2 - \| u \|^2) < \gamma \| (g, h) \|^2 + (d/2p)(\gamma \| (g, h) \|^2 -$$
$$- \| u \|^2) = \gamma(1 + (d/2p)) \| (g, h) \|^2 - (d/2p) \| u \|^2 < \gamma(1 +$$
$$+ (d/2p)) \| T^{-1} \|^2 \| u \|^2 - (d/2p) \| u \|^2 = \| u \|^2 (\gamma \| T^{-1} \|^2 (1 + (d/2p)) -$$
$$- (d/2p)) = \| u \|^2 ((d/4p + 2d)(1 + (d/2p)) - (d/2p)) = -(d/4p) \| u \|^2 < 0$$

con lo que queda demostrado este lema 1.9.

De la conjunción de este último lema con todos los anteriores resulta la prueba del que llamábamos teorema 1 al principio de este artículo. Como resumen podría decirse que hemos establecido la existencia de un número positivo q_{cr} finito y no nulo, con la propiedad de que todo valor positivo q estrictamente inferior a él hace el funcional estrictamente positivo en el sentido 'fuerte' de la desigualdad (28), mientras que para todo valor estrictamente superior al q_{cr} el funcional $\mathcal{T}$ se hace negativo para alguna pareja de funciones $(g, h) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$.

En los párrafos que seguirán se estudia el funcional $\mathcal{T}$ para el valor q precisamente igual al q_{cr}, y en tal sentido enunciamos el

TEOREMA 2.—Si q_{cr} es el número definido por el teorema 1, podemos asegurar que se verifican las dos proposiciones siguientes:

a) $$\forall\, g(\varphi) \in \mathcal{D}_1, \quad \forall\, h(\varphi) \in \mathcal{D}_2, \quad \mathcal{T}(q_{cr};\, g(\varphi), h(\varphi)) \geqslant 0. \tag{36}$$

b) Hay al menos una pareja de funciones $g_0(\varphi) \in \mathcal{D}_1$, $h_0(\varphi) \in \mathcal{D}_2$ para las cuales se verifica $\mathcal{T}(q_{cr};\, g_0(\varphi), h_0(\varphi)) = 0$. Además, podemos asegurar que tales funciones admiten derivadas continuas de orden cualquiera en el intervalo $(-a, a)$.

La demostración de a) es casi trivial, pues para cualquier pareja de funciones $(g, h) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ se puede tomar límite en la fórmula (1) si $q \longrightarrow q_{cr} - 0$, es decir un límite a la izquierda que, si tenemos en cuenta la positividad dada por la fórmula (3), nos permite concluir la (36).

La prueba de la parte b) la abordaremos en otra serie de lemas y definiciones. Nos detendremos, sin embargo, en comentar brevemente el significado 'intuitivo' del teorema 2 en comparación con el teorema 1. Tal significado podría entenderse en concebir el valor crítico q_{cr} como aquél para el cual el funcional cuadrático $\mathcal{T}$ cambia de ser fuertemente positivo a ser indefinido (lo que, en términos físicos, se puede entender como que el equilibrio cambia de estable a inestable). Para el propio valor crítico, el funcional $\mathcal{T}$ resulta ser semidefinido, pudiendo 'alcanzarse' efectivamente una configuración, al menos, para la cual $\mathcal{T}$ es nulo. Este último punto es importante, pues del teorema 1 lo único que puede concluirse es que, en el 'estado' crítico, hay configuraciones para las cuales $\mathcal{T}$ toma un valor tan próximo a cero como se quiera, pero no exactamente nulo.

DEFINICIÓN 2.1.—El símbolo S denotará el operador lineal definido en todo el espacio producto $L_2(-a, a) \times L_2(-a, a)$ en la forma

$$\forall\, (e(\varphi), f(\varphi)) \in L_2(-a, a) \times L_2(-a, a)$$

$$S(e(\varphi), f(\varphi)) = \int_{a-}^{a} (e(t), f(t)) \begin{pmatrix} s_{11}(\varphi, t) & s_{12}(\varphi, t) \\ s_{21}(\varphi, t) & s_{22}(\varphi, t) \end{pmatrix} d\,t \qquad (37)$$

donde

$$s_{ij}(\varphi, t) = (1/2)\,(M_{ij}(\varphi, t) + M_{ji}(t, \varphi)) \quad i, j = 1, 2 \qquad (38)$$

y los M_{ij} corresponden a las fórmulas (19) y (21) que definen el operador A en Imag T y, también, en todo el espacio.

LEMA 2.2.—El operador S dado por (37) es autoadjunto y compacto, siendo

$$\forall\, u \in \text{ImagT} \quad \| u \|^2 + q \langle A\, u\, ;\, u \rangle = \| u \|^2 + q \langle S\, u\, ;\, u \rangle. \qquad (39)$$

En efecto, si usamos la propia fórmula (19) para suponer A extendido a todo el espacio $L_2 \times L_2$, la propia simetría de las s_{ij} demuestra que S es la semisuma de A y A*, donde A* es la habitual notación para el llamado [7] operador adjunto, por lo cual S es autoadjunto y se verifica:

$$\begin{aligned} \forall\, u \in L_2(-a, a) \times L_2(-a, a), \quad \langle 2\,A\, u\, ;\, u \rangle &= \langle A\, u\, ;\, u \rangle + \langle A\, u\, ;\, u \rangle = \\ &= \langle A\, u\, ;\, u \rangle + \langle u\, ;\, A^*\, u \rangle = \langle (A + A^*)\, u\, ;\, u \rangle = \langle 2\,S\, u\, ;\, u \rangle \end{aligned} \qquad (40)$$

lo que da cuenta de la igualdad (39).

DEFINICIÓN 2.3.—El símbolo P denotará el operador de proyección ortogonal sobre la clausura $\overline{\text{Imag T}}$ del subespacio Imag T. Como es bien conocido [7] P es de norma unidad y autoadjunto y, por otra parte, al ser el subespacio Imag T un hiperplano de $C[-a, a] \times C[-a, a]$, su clausura $\overline{\text{Imag T}}$ es un hiperplano cerrado de $L_2(-a, a) \times L_2(-a, a)$, puesto que la teoría nos indica [7] que $C[-a, a]$ es denso en $L_2(-a, a)$. Resulta así que $\overline{\text{Imag T}}$ se puede considerar, y ello lo recordamos como otro resultado teórico que se usará sin especial mención, un espacio de Hilbert en sí mismo, es decir métricamente completo. Finalmente recordamos que al operador P se le asocia unívocamente otro proyector Q complementario de tal modo que

$$\forall\, u \in L_2 \times L_2, \quad \forall\, v \in \overline{\mathrm{Imag T}}, \quad u = \mathrm{P}\, u + \mathrm{Q}\, u, \quad \langle v, \mathrm{Q}\, u \rangle = 0. \tag{41}$$

Lema 2.4.—Para todo $u \in \overline{\mathrm{Imag\ T}}$ puede escribirse

$$\forall\, u \in \overline{\mathrm{Imag T}}, \quad \langle \mathrm{S}\, u\, ;\, u \rangle = \langle \mathrm{P} \circ \mathrm{S}\, u\, ;\, u \rangle \tag{42}$$

donde $\mathrm{P} \circ \mathrm{S}$ denota el producto de composición de ambos operadores. En efecto, por ser P autoadjunto y si $u \in \overline{\mathrm{Imag\ T}}$ ser $\mathrm{P}\, u = u$ se deduce

$$\langle \mathrm{P} \circ \mathrm{S}\, u\, ;\, u \rangle = \langle \mathrm{S}\, u\, ;\, \mathrm{P}\, u \rangle = \langle \mathrm{S}\, u\, ;\, u \rangle. \tag{43}$$

Lema 2.5.—Con los símbolos de la definición 1.4 puede asegurarse:

$$\exists\, u_0 = (e_0(\varphi), f_0(\varphi)) \in \overline{\mathrm{Imag T}}, \quad \mathcal{C}_1 (q_{cr}\, ;\, u_0) = 0. \tag{44}$$

En efecto, por las fórmulas (24), (39) y (42) podemos escribir en el subespacio de Hilbert $\overline{\mathrm{Imag\ T}}$

$$\forall\, u \in \overline{\mathrm{Imag T}}, \quad \|\, u\, \|^2 + q\, \langle \mathrm{P} \circ \mathrm{S}\, u\, ;\, u \rangle = \mathcal{C}_1 (q\, ;\, u) \tag{45}$$

siendo $\mathrm{P} \circ \mathrm{S}$ un operador compacto (por ser composición de uno acotado y otro compacto) y cuya restricción a $\overline{\mathrm{Imag\ T}}$ es autoadjunto, ya que

$$\begin{aligned} \forall\, u, v \in \overline{\mathrm{Imag T}}, \quad \langle \mathrm{P} \circ \mathrm{S}\, u\, ;\, v \rangle &= \langle \mathrm{S}\, u\, ;\, \mathrm{P}\, v \rangle = \langle \mathrm{S}\, u\, ;\, v \rangle = \langle u\, ;\, \mathrm{S}\, v \rangle = \\ &= \langle \mathrm{P}\, u\, ;\, \mathrm{S}\, v \rangle = \langle u\, ;\, \mathrm{P} \circ \mathrm{S}\, v \rangle. \end{aligned} \tag{46}$$

De aquí, que el clásico teorema espectral [8] permita determinar una base de vectores propios de $\mathrm{P} \circ \mathrm{S}$, incluyendo los asociados al eventual autovalor nulo, que sea una base ortonormal del subespacio cerrado $\overline{\mathrm{Imag\ T}}$. Si denotamos por $(\bar{v}_k)_{k \in \mathrm{N}}$ esa base, podremos escribir:

$$\forall\, u \in \overline{\mathrm{Imag T}} \quad \exists\, (a_k)_{k \in \mathrm{N}}, \quad u = \sum_0^{\infty} a_k\, \bar{v}_k\,, \quad \|\, u\, \|^2 = \sum_0^{\infty} a^2{}_k \tag{47}$$

y por otra parte si $(\mu_k)_{k \in N}$ denota la sucesión de autovalores asociada a los vectores propios, podemos también escribir:

$$\forall u \in \overline{\mathrm{ImagT}}, \quad \langle \mathrm{P} \circ \mathrm{S}\, u \,;\, u \rangle = \left\langle \sum_0^\infty a_k\, p \circ \mathrm{S}\, \bar{v}_k \,;\, \sum_0^\infty a_k\, \bar{v}_k \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_0^\infty a_k\, \mu_k\, \bar{v}_k \,;\, \sum_0^\infty a_k\, \bar{v}_k \right\rangle = \sum_0^\infty \mu_k\, a^2{}_k \tag{48}$$

con lo que la sustitución de (47) y (48) en la (45) nos proporciona para cualquier valor de q incluso aunque no sea el q_{cr}:

$$\forall u \in \overline{\mathrm{ImagT}}, \quad \mathcal{C}_1 (q \,;\, u) = \sum_0^\infty (1 + q\, \mu_k)\, a^2{}_k. \tag{49}$$

De esta importante fórmula (49) podemos obtener varias consecuencias sencillas e inmediatas:

I) Que al tener los μ_k valor real y como punto de acumulación, a lo sumo el 0 [8], ninguna subsucesión de los coeficientes $(1 + q\, \mu_k)$ de la fórmula (49) puede tener límite cero, por lo cual o bien sucede

$$\exists\, \gamma > 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 1 + q\, \mu_k \geqslant \gamma > 0 \tag{50}$$

de lo que se seguiría necesariamente

$$\mathcal{C}_1 (q \,;\, u) = \sum_0^\infty (1 + q\, \mu_k)\, a^2{}_k \geqslant \gamma \sum_0^\infty a^2{}_k = \gamma \,\|\, u \,\|^2 \tag{51}$$

lo que significaría, según (3), que $q < q_{cr}$; o bien, alternativamente, puede suceder que

$$\exists\, l \in \mathrm{N}, \quad 1 + \mu_l\, q < 0 \tag{52}$$

en cuyo caso, si tomáramos $u = v_l$ resultaría

$$\mathcal{C}_1 (q \,;\, u) = (1 + q\, \mu_l)\, a^2{}_l = (1 + q\, \mu_l) \cdot 1 < 0 \tag{53}$$

lo que significaría según (3), que $q > q_{cr}$.

II) Que no puede darse la situación de que para todo q positivo y todo k natural sea $1 + q\, \mu_k > 0$, pues entonces se verificaría la fórmula (51) con cualquier q positivo, lo que contradiría la existencia de un q_{cr} finito, asegurada en el lema 1.8. En consecuencia, puede asegurarse que

$$\exists\, l \in \mathrm{N}, \quad \mu_l < 0. \tag{54}$$

III) Que si μ_* denota el autovalor negativo de mayor módulo, la fórmula (51) nos indica

$$q_{cr} = |\,\mu_*\,|^{-1}, \tag{55}$$

con lo que este lema 2.5 se termina de probar tomando

$$u_0 = \bar{v}_* \in \mathrm{ImagT} \tag{56}$$

siendo el vector $\bar{v}_*$ aquel característico del operador $\mathrm{P} \circ \mathrm{S}$ que corresponde al autovalor μ_*. negativo de mayor módulo.

LEMA 2.6.—El vector $u_0 \in \overline{\mathrm{Imag}\,\mathrm{T}}$ dado por el lema anterior está formado por una pareja de funciones $(e_0(\varphi), f_0(\varphi)) \in \mathrm{L}_2(-a, a) \times \times \mathrm{L}_2(-a, a)$ que satisfacen una ecuación integral lineal de autovalores, con núcleo seccionalmente de clase C en cada uno de los triángulos semiabiertos $-a \leqslant \varphi < t \leqslant +a$, $-a \leqslant t < \varphi \leqslant +a$ en los cuales se verifica que las funciones componentes de la matriz del núcleo son acotadas, así como sus derivadas de cualquier orden.

En efecto, según la (56) se verifica

$$\mu_*\, u_0 = \mathrm{P} \circ \mathrm{S}\, u_0. \tag{57}$$

Sea, por otra parte, $(g_1(\varphi), h_1(\varphi))$ el vector dado por (10) al cual es perpendicular el hiperplano $\overline{\mathrm{Imag}\,\mathrm{T}}$. Si ahora escribimos

$$\mathrm{S}\, u_0 = (\mathrm{E}_1(\varphi), \mathrm{E}_2(\varphi)) \in \mathrm{L}_2 \times \mathrm{L}_2$$

es fácil concluir que

$$\mathrm{P} \circ \mathrm{S}\, u_0 = (\mathrm{E}_1(\varphi), \mathrm{E}_2(\varphi)) - (\mathrm{G}_1(\varphi), \mathrm{H}_1(\varphi)) \int_{-a}^{a} (\mathrm{E}_1(t)\, \mathrm{G}_1(t) + \mathrm{E}_2(t)\, \mathrm{G}_2(t))\, d\,t \tag{58}$$

donde $(\mathrm{G}_1, \mathrm{H}_1)$ resulta de normalizar a unitario el vector (g_1, h_1)

dividiéndolo por su norma. Si tenemos en cuenta que el vector (E_1, E_2) se obtiene por la (37), entonces la (58) nos proporciona tras unos cálculos rutinarios y elementales:

$$P \circ S u_0 = \int_{-a}^{+a} (e_0(\tau), f_0(\tau)) \begin{pmatrix} N_{11}(\varphi, \tau) & N_{12}(\varphi, \tau) \\ N_{21}(\varphi, \tau) & N_{22}(\varphi, \tau) \end{pmatrix} d\tau \tag{59}$$

donde para $i, j = 1, 2$

$$N_{ij}(\varphi, \tau) = s_{ij}(\varphi, \tau) - \int_{-a}^{a} \sum_{k=1}^{2} s_{ik}(t, \tau) P_k(t) P_j(\varphi) \, dt \tag{60}$$

donde los s_{ij} son los mismos que en la fórmula (37) y los (P_1, P_2) se adoptan, para comodidad de notación, como idénticos a los (G_1, H_1) esto es, como 'componentes' del vector normal al hiperplano sobre el que proyecta el operador que llamábamos P. Si llamamos (s) y (N) a las respectivas matrices que aparecen en las fórmulas (37) y (59) y llamamos (p) a la matriz cuyo elemento de fila k y columna j es $P_k(t)\, P_j(\varphi)$ podemos expresar la (60) en forma matricial más sintética

$$N(\varphi, \tau) = s(\varphi, \tau) - \int_{-a}^{a} s(t, \tau)\, p(t, \varphi)\, dt. \tag{61}$$

En resumen, la (57) se puede escribir en la forma

$$\mu_*(e_0(\varphi), f_0(\varphi)) = \int_{-a}^{a} (e_0(\tau), f_0(\tau)) \begin{pmatrix} N_{11}(\varphi, \tau) & N_{12}(\varphi, \tau) \\ N_{21}(\varphi, \tau) & N_{22}(\varphi, \tau) \end{pmatrix} d\tau \tag{62}$$

donde las expresiones explícitas (10), (14), (21), (38) y (60) permiten asegurar que las funciones $N_{ij}(\varphi, t)$ son acotadas y con derivadas parciales de cualquier orden continuas y acotadas, en cada uno de los triángulos semiabiertos $-a \leqslant t < \varphi \leqslant a$, $-a \leqslant \varphi < t \leqslant a$.

LEMA 2.7.—Las funciones $e_0(\varphi, f_0(\varphi)$ de la fórmula (62) son continuas en el intervalo cerrado $[-a, a]$ de variación de la variable φ.

En efecto, las funciones e_0, f_0 pertenecen a $L_2(-a, a)$ y, según una conocida consecuencia [9] de la desigualdad de Schwarz, también pertenecen a $L_1(-a, a)$ por ser el intervalo $(-a, a)$ finito. Si ahora nos remitimos a la (62) observamos que sería suficiente, para probar la continuidad de e_0 y la de f_0 el establecer la continuidad respecto a la variable φ de integrales del tipo

$$I(\varphi) = \int_{-a}^{a} b(t)\, N(\varphi, t)\, dt \tag{63}$$

donde la $b(t)$ es integrable en $(-a, a)$ y la $N(\varphi, t)$ es continua y acotada en cada uno de los triángulos $-a \leqslant t < \varphi \leqslant a$, $-a \leqslant \leqslant \varphi < t \leqslant a$. En efecto, si φ_* es un punto determinado de $[-a, a]$ y $\varphi_* + \Delta\varphi \in [-a, a]$ con $\Delta\varphi \longrightarrow 0$

$$I(\varphi_* + \Delta\varphi) - I(\varphi_*) = \int_{-a}^{a} b(t)\,(N(\varphi_* + \Delta\varphi, t) - N(\varphi_*, t))\, dt \tag{64}$$

pudiendo asegurar que la diferencia del primer miembro tiende a cero, en virtud del teorema de la convergencia dominada [9] puesto que el integrando tiende a cero, salvo quizá en $t = \varphi$, y la función integrable $2K\,|\,b(t)\,|$ donde K es una cota de $|\,N(\varphi, t)\,|$ en el cuadrado $-a \leqslant \varphi,\ t \leqslant a$, es un función que domina el integrando para cualquier valor de $\Delta\varphi$ en el entorno de cero.

Demostrado así el lema 2.7, la conclusión b) del teorema 2 resulta ya muy fácilmente, con la restricción de suponer $g_0(\varphi) \in \mathcal{D}_1$, $h_0(\varphi) \in \mathcal{D}_2$ pues al ser e_0, f_0 continuas resulta que el u_0 del lema 2.5 pertenece a Imag T y no meramente a $\overline{\text{Imag T}}$, con lo que si escribimos

$$(g_0(\varphi), h_0(\varphi)) = T^{-1} u_0 = T^{-1}(e_0(\varphi), f_0(\varphi)) \tag{65}$$

los lemas 1.2 y 1.3 nos indican $g_0(\varphi) \in \mathcal{D}_1$ y $h_0(\varphi) \in \mathcal{D}_2$, por lo cual

$$0 = \mathcal{C}_1(q_{cr}; u_0) = \mathcal{C}(q_{cr}; g_0(\varphi), h_0(\varphi)). \tag{66}$$

La demostración previa del teorema 2 en su forma restrictiva es totalmente suficiente, para los desarrollos y resultados que aquí se presentan. Sin embargo, y en aras de una mayor complitud, resulta interesante probar que las funciones g_0, h_0 antes descritas son indefinidamente derivables con continuidad en el intervalo cerrado $[-a, a]$. Para ello es suficiente probar que tal situación también se da con las funciones e_0 y f_0, lo cual se establecerá por inducción. Enunciamos así el

LEMA 2.8.—Las funciones $(e_0(\varphi), f_0(\varphi))$ que satisfacen la ecuación integral (62) poseen derivadas continuas y acotadas de cualquier orden en el intervalo cerrado $[-a, a]$.

En efecto, si n denota el orden de derivación, el caso $n = 1$ resulta de derivar la (62) escrita en la forma

$$\mu_* (e_0(\varphi), f_0(\varphi)) = \left(\int_{-a}^{\varphi} + \int_{\varphi}^{a}\right) (e_0(t), f_0(t)) \begin{pmatrix} N_{11}(\varphi, t) & N_{12}(\varphi, t) \\ N_{21}(\varphi, t) & N_{22}(\varphi, t) \end{pmatrix} dt \tag{67}$$

pues al ser las e_0, f_0 continuas por el lema 2.7, se dan las condiciones para poder aplicar a cada una de las dos integrales del segundo miembro, la clásica fórmula [6] de derivación paramétrica de integrales con límites variables. Resulta así, después de simples cálculos:

$$\mu_* \frac{d}{d\varphi} (e_0(\varphi), f_0(\varphi)) = \int_{-a}^{a} (e_0(t), f_0(t)) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\varphi} N_{11}(\varphi, t) & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} N_{12}(\varphi, t) \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi} N_{21}(\varphi, t) & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} N_{22}(\varphi, t) \end{pmatrix} dt +$$

$$+ (e_0(\varphi)(N_{11}(\varphi, \varphi - 0) - N_{11}(\varphi, \varphi + 0)) + f_0(\varphi)(N_{22}(\varphi, \varphi - 0) - N_{21}(\varphi, \varphi + 0)) ,$$

$$(e_0(\varphi)(N_{12}(\varphi, \varphi - 0) - N_{12}(\varphi, \varphi + 0)) + f_0(\varphi)(N_{21}(\varphi, \varphi - 0) - N_{22}(\varphi, \varphi + 0)) \tag{68}$$

lo que prueba el lema en el caso $n = 1$ habida cuenta de que las derivadas parciales de las N_{ij} son acotadas y continuas (lema 2.6), por lo que se puede repetir el razonamiento del lema 2.7 para establecer la continuidad de las derivadas primeras de $e_0(\varphi)$ y $f_0(\varphi)$.

Establezcamos ahora la siguiente hipótesis de inducción: para los naturales $k = 1, 2, \dots (n - 1)$ las funciones $e_0(\varphi)$, $f_0(\varphi)$ admiten derivadas de orden k dadas por una expresión de la forma

$$\int_{-a}^{a} (e_0(t), f_0(t)) \begin{pmatrix} \frac{\partial^k}{\partial \varphi^k} N_{11}(\varphi, t) & \frac{\partial^k}{\partial \varphi^k} N_{12}(\varphi, t) \\ \frac{\partial^k}{\partial \varphi^k} N_{21}(\varphi, t) & \frac{\partial^k}{\partial \varphi^k} N_{22}(\varphi, t) \end{pmatrix} dt +$$

$$+ \sum_{j=0}^{j=k-1} W_j(\varphi) \left(\frac{d^j}{d\varphi^j} e_0(\varphi) + X_j(\varphi) \frac{d^j}{d\varphi^j} f_0(\varphi) \,, \quad Y_j(\varphi) \frac{d^j}{d\varphi^j} e_0(\varphi) + \right.$$

$$\left. + Z_j(\varphi) \frac{d^j}{d\varphi^j} f_0(\varphi) \right) = \mu_* \frac{d^k}{d\varphi^k} (e_0(\varphi), f_0(\varphi)) \qquad (69)$$

donde las W_j, X_j, Y_j, Z_j son funciones indefinidamente derivables con continuidad, respecto a la variable φ, en el intervalo cerrado $[-a, a]$.

Si derivamos la expresión (69) cuando $k = n - 1$ y tenemos en cuenta las condiciones sobre las N_{ij} que siguen a la (62), concluimos que tal derivación puede hacerse con la ya utilizada fórmula de las integrales paramétricas de límites variables, obteniéndose sin dificultad una fórmula del tipo (69) pero en el supuesto de ser $k = n$, lo que completa la demostración por inducción, habida cuenta de que la hipótesis de inducción (69) se estableció como válida si $k = 1$ cuando se hizo la derivación de la (67) para obtener la (68).

A continuación se enuncia y prueba un teorema que establece un método de aproximaciones sucesivas para calcular el valor q_{cr}. Resultará claro que tales aproximaciones son accesibles al cálculo numérico, por poderse reducir a un problema finito dimensional de autovalores.

TEOREMA 3.—Existen ciertas bases hilbertianas (no necesariamente ortogonales) de $L_2(-a, a) \times L_2(-a, a)$, que las notaremos $(g_k(\varphi), h_k(\varphi))_{k \in Z^+}$, con las tres propiedades siguientes:

a) $\forall\, k = 1, 2, \dots \quad (g_k(\varphi), h_k(\varphi)) \in \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$.

b) Hay dos sucesiones dobles, simétricas reales, que las notaremos $(A_{ij})_{i,j \in Z^+}$, $(B_{ij})_{i,j \in Z^+}$ de modo que la expresión

$$\mathfrak{T}\left(q_{cr} ;\ \sum_{k=1}^{n} x_k (g_k(\varphi), h_k(\varphi)) \right)$$

es una forma cuadrática en las n variables reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de matriz $(A_{ij} + q\, B_{ij})_{i,\, j = 1, \ldots, n}$.

c) Si escribimos

$$q_{cr}^{(n} = \text{mínima raíz positiva de det.} \mid A_{ij} + q\, B_{ij} \mid = 0 \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

se verifica

$$q_{cr}^{(n} \longrightarrow q_{cr} \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty.$$

La demostración del teorema se desglosa en cuatro lemas:

LEMA 3.1.—Para cada sucesión $(g_k(\varphi), h_k(\varphi))_{k \in Z^+}$ de funciones $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$ (con independencia de que la sucesión constituya una base, o no) existen dos sucesiones dobles A_{ij}, B_{ij} $i, j = 1, 2, 3, \ldots$ de modo que

$$\forall\, n \in Z^+ \quad \forall\, q \in R^+ \quad \forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n, \quad \mathcal{T}\left(q\, ;\, \sum_{k=1}^{n} x_k (g_k, h_k)\right) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij} + q\, B_{ij})\, x_i\, x_j. \tag{70}$$

Además, ambas sucesiones dobles (matrices infinitas) verifican la condición de simetría

$$\forall\, i, j = 1, 2, 3, \ldots, \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad B_{ij} = B_{ji} \tag{71}$$

y la sucesión doble (A) es definida positiva, es decir

$$\forall\, n \in Z^+ \quad \forall\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n - \{0\}, \quad \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i\, x_j > 0. \tag{72}$$

Para la demostración escribimos, con $n \in Z^+$, $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ fijos

$$(g, h) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, (g_i(\varphi), h_i(\varphi)) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, (g_j(\varphi), h_j(\varphi)) \tag{73}$$

y por simple sustitución obtenemos

$$\mathcal{T}(q\,;\,g(\varphi),h(\varphi))=\mathcal{T}\left(q\,;\,\sum_{k=1}^{n}x_k(g_k,h_k)\right)=\int_{-a}^{a}\left((1-c)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(h'_i-g_i)\right)\cdot\right.$$
$$\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}x_j(h'_j-g_j)\right)+c\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(g_i+g_i'')\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_j(g_j+g_j'')\right)+$$
$$\left.+\,q\,F(\varphi)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(h_i+g_i')\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_j(h'_j-g_j)\right)\right)d\varphi \tag{74}$$

lo que indica claramente para todo $i, j = 1, 2, 3, \ldots$

$$A_{ij}=\int_{-a}^{a}(1-c)(h'_i(\varphi)-g_i(\varphi))(h'_j(\varphi)-g_j(\varphi))+c\,(g_i(\varphi)+$$
$$+\,g_i''(\varphi))(g_j(\varphi)+g_j''(\varphi))\,d\varphi. \tag{75}$$

$$B_{ij}=\int_{-a}^{a}F(\varphi)\left(\frac{1}{2}(h_i(\varphi)+g'_i(\varphi))(h'_j(\varphi)-g_j(\varphi))+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(h_j(\varphi)+g'_j(\varphi))(h'_i(\varphi)-g_i(\varphi))\right)d\varphi. \tag{76}$$

Las condiciones (71) de simetría quedan explícitas en estas últimas fórmulas y en cuanto a la (72), es evidente que la (74) nos indica

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\,x_i\,x_j=\int_{-a}^{a}((1-c)(h'-g)^2+c\,(g''+g)^2)\,d\varphi>0 \tag{77}$$

pues, según el lema 1.2, en el caso de ser $(g, h)\in\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2$, el in-integrando de (77) nunca es nulo, a menos que fuese $g = 0$, $h = 0$, es decir $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ como muestra la notación (73).

Lema 3.2.—Si elegida la sucesión $(g_k(\varphi), h_k(\varphi))_{k\in Z^+}\subset\mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2$ y con las notaciones del lema anterior, escribimos

$$q_{cr}^{(n}=\text{mínima raíz positiva de } \det.\,|\,A_{ij}+q\,B_{ij}\,|=0,\quad i,j=1,\ldots,n \tag{78}$$

se verifica que:

$$\text{I)}\quad \forall\, q < q_{cr}^{n}\ \forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n - \{0\},\quad \mathcal{T}\left(q;\ \sum_{k=1}^{n} x_k\,(g_k, h_k)\right) > 0. \tag{79}$$

$$\text{II)}\quad \forall\, q > q_{cr}^{(n}\ \exists\,(x^0_1, \ldots, x^0_n) \in \mathrm{R}^n - \{0\},\quad \mathcal{T}\left(q;\ \sum_{k=1}^{n} x^0_k\,(g_k, h_k)\right) < 0. \tag{80}$$

En efecto, según un resultado clásico del álgebra de formas cuadráticas [10] finito dimensionales, al ser la matriz (A_{ij}) definida positiva (lema 3.1) existe una transformación lineal del espacio R^n, que es no singular, y que expresada en la forma

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,(\mathrm{Q}) \tag{81}$$

permite transformar, respectivamente, las dos formas cuadráticas

$$\mathcal{A} = \sum_{i,j=i}^{n} \mathrm{A}_{ij}\, x_i\, x_j \qquad \mathcal{B} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{B}_{ij}\, x_i\, x_j \tag{82}$$

cuando se expresan en las nuevas variables $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ del modo

$$\mathcal{A} = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \qquad \mathcal{B} = \mu_1^{(n}\, y_1^2 + \mu_2^{(n}\, y_2^2 + \ldots + \mu_n^{(n}\, y_n^2. \tag{83}$$

La misma teoría de formas cuadráticas finito dimensionales nos enseña que la ecuación algebraica en q (78) conserva sus raíces por cualquier transformación no singular del tipo (81), es decir ambos polinomios en la variable q:

$$\det|\,\mathrm{A}_{ij} + q\,\mathrm{B}_{ij}\,|,\qquad (1 + q\,\mu_1^{(n)})\,(1 + q\,\mu_2^{(n)}) \ldots (1 + q\,\mu_n^{(n)}) \tag{84}$$

difieren únicamente en un factor numérico. De aquí se sigue que si es $q < q_{cr}^{(n}$ todos los coeficientes $1 + q\,\mu$ son positivos; lo que, por su parte, nos permite escribir

$$\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n,\quad \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{A}_{ij}\, x_i\, x_j + q \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{B}_{ij}\, x_i\, x_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (1 + q\,\mu_k^{(n)})\, y_k^2 \quad \text{donde} \quad (y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n)\,(\mathrm{Q}) \tag{85}$$

lo que demuestra la (79), pues una suma de cuadrados por coeficientes todos positivos es claramente mayor que cero.

Si, por el contrario, suponemos $q > q_{cr}^{(n}$, la proposición (84) nos indica que al menos para un índice k es $1 + \mu_k^{n} < 0$, con lo que podemos elegir $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ invirtiendo la (81) en la forma

$$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = (0, \ldots, y_k = 1, \ldots, 0)\,(Q^{-1}) \tag{86}$$

lo que justifica inmediatamente la (80), al ser

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i^0\, x_j^0 + q \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}\, x_i^0\, x_j^0 = (1 + q\, \mu_k^{(n)}) \cdot 1^2 < 0. \tag{87}$$

Observación.—De la (84) se sigue inmediatamente, que los $\mu_k^{(n}$ igualan a los recíprocos cambiados de signo de las raíces de la ecuación (78), y en consecuencia $q_{cr}^{(n}$ es igual al recíproco $(\mu_k^{(n})^{-1}$ de aquel de entre los $\mu_k^{(n}$ negativos, que tiene mayor módulo y con un cambio final de signo. Por otra parte, podría suceder que la ecuación (78) no tenga ninguna raíz positiva, lo que equivaldría a que todos los $\mu_k^{(n}$ fueran positivos. En tal caso sería plausible convenir en que $q_{cr}^{(n}$ fuese $+\infty$ pues la forma cuadrática (85) sería definida positiva para todo $q \in R^+$.

Lema 3.3.—Con las notaciones anteriores y las del teorema 1:

$$\text{a)}\quad \forall\, n \in Z^+,\quad q_{cr} \leqslant q_{cr}^{(n} \tag{88}$$

$$\text{b)}\quad \forall\, n \in Z^+,\quad q_{cr}^{(n+1} \leqslant q_{cr}^{(n} \tag{89}$$

$$\text{c)}\quad \exists \lim q_{cr}^{(n} = q'_{cr} \geqslant q_{cr} \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty. \tag{90}$$

En efecto, la a) resulta razonando por contradicción y comparando las fórmulas (80) y (3). La b) también resulta inmediatamente contradicción comparando los dos casos que resultan de la (79) para n y $n + 1$. La proposición c) es consecuencia combinada e inmediata de las a), b).

Lema 3.4.—Existe una sucesión de la forma $(g_k(\varphi), h_k(\varphi))_{k \in Z^+} \subset \subset \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ de modo que en la (90) se verifica igualdad, es decir

$$\lim q_{cr}^{n} = q_{cr} \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty. \tag{91}$$

Además, la mencionada sucesión es una base hilbertiana de $L_1(-a, a) \times L_2(-a, a)$ (que no tiene por qué ser ortogonal).

En efecto, sea $(u_k)_{k \in Z^+} \subset \text{Imag}\,T$ (según notación del lema 1.2) una base hilbertiana cualquiera del subespacio cerrado $\overline{\text{Imag}\,T}$. Entonces es fácil ver que la sucesión en $k \in Z^+$

$$(T^{-1} u_k)_{k \in Z^+} = ((g_k, h_k))_{k \in Z^+} \subset \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 \tag{92}$$

es una base hilbertiana de $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2$, puesto que

$$\forall (g, h) \in \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2, \quad \exists u \in \text{Imag}T, \quad (g, h) = T^{-1} = T^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k\right) =$$

$$= (\text{por ser } T^{-1} \text{ acotado}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k T^{-1} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (g_k, h_k). \tag{93}$$

Tratemos ahora de probar la (91) por contradicción, suponiendo

$$\lim q_{cr}^n = q'_{cr} > q_{cr} \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty \tag{94}$$

con lo que eligiendo q en la forma $q_{cr} < q < q'_{cr}$ tendríamos según el lema 1.9

$$\exists (g, h) \in \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2, \quad \mathfrak{T}(q\,;\, g, h) = \|u\|^2 + \langle A u\,;\, u\rangle < 0 \tag{95}$$

mientras que, por otra parte, las (79) y (93) nos indican

$$\forall n \in Z^+, \quad 0 < \mathfrak{T}\left(q\,;\, \sum_{k=1}^{n} a_k (g_k, h_k)\right) = \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k u_k\right\|^2 +$$

$$+ q \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k u_k\,;\, \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \right\rangle =$$

y si pasamos al límite, cuenta habida de que A es acotado y el producto escalar es continuo, tenemos para $n \longrightarrow \infty$

$$0 \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k\right\|^2 + q \left\langle A \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k\,;\, \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k \right\rangle$$

lo que contradice la (95) cuando se adopta

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k.$$

Queda así demostrado el lema 3.4 y, como consecuencia, el teorema 3.

Referencias aludidas en el texto

[1] GARBAYO, E. (1973). Ciertos resultados matemáticos en la inestabilidad elástica de arcos. *Rev. Real Acad. de Ciencias*, set., Madrid.
[2] GARBAYO, E. (1972). Un método energético para estudiar el pandeo de arcos. *Rev. de Obras Públicas*, jun., Madrid.
[3] REID, W. T. (1971). Ordinary differential equations, pp. 132 a 137. John Wiley, New York.
[4] REID, W. T. Op. cit., pp. 138 a 141.
[5] STAKGOLD, I. (1967). Boundary value problems of Mathematical Physics, vol. 1, pp. 193 a 195. Macmillan Co., Toronto.
[6] ERWE, F. (1968). Cálculo diferencial e integral, pp. 427, 428. *Selecciones Científicas*, Madrid.
[7] AKHIEZER, N. I. & GLAZMAN, I. M. (1966). Theory of linear operators in Hilbert space, pp. 24 a 26, 43, 63, 64, 79, vol. 1. Ungar Publ. Co., New York.
[8] AKHIEZER & GLAZMAN. Op. cit., pp. 88 a 91, 124 a 128.
[9] KOLMOGOROV, A. N. & FOMÍN, S. V. (1972). Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional, pp. 343, 425. Ed. Mir, Moscú.
[10] GOLDSTEIN, H. (1965). Classical Mechanics, pp. 321 a 328. Addison-Wesley Publ. Co., Reading Mass.