SOBRE EL TEOREMA DE LA GRAFICA CERRADA. TEOREMA DE BANACH-SCHAUDER

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 4 junio 1980

In this work we will extend some known theorems about the closed-graph and the open mapping, given for locally convex Baire spaces, Pták spaces and Γ spaces (oi (s)-spaces), for barrelled spaces of classes σ and τ (respectively α) and $\Gamma_r^{(\sigma)}$ (respectively $\Gamma_r^{(\alpha)}$). The theorems improved here can be fond in Köthe [4] § 34, 8 and 10. Some of these results complet anothers result obtained by the author in [5] and [6] for the space $l_0^\infty(\Sigma)$.

En este trabajo nos proponemos extender algunos teoremas conocidos sobre la gráfica cerrada y sobre la aplicación abierta, dados para espacios localmente convexos de Baire y para espacios de Pták y espacios Γ (o espacios (s)), para espacios tonelados de clases σ y τ (resp. α) y espacios $\Gamma_r^{(\sigma)}$ (resp. $\Gamma_r^{(\alpha)}$). Los teoremas que vamos a mejorar se encuentran en Köthe [4], § 34,8 y 10. Algunos de estos resultados completan otros obtenidos por el autor en [5] y [6] para el espacio $l_0^\infty(\Sigma)$.

Los espacios vectoriales que consideramos están definidos sobre el cuerpo **K** de los números reales o de los números complejos.

De manera general, E y F serán espacios vectoriales topológicos localmente convexos de Hausdorff, en abreviatura, e. l. c. s.

1. Definición. (Por inducción transfinita).—Todo espacio tonelado se dice de *clase* 0. Si α es un número transfinito de primera especie (e. d., con precedente), el espacio tonelado E se dice de clase α si, para toda sucesión no decreciente $(E_n)_1^\infty$ de subespacios, que cubre a E, existe un n tal que E_n es un subespacio tonelado de clase $\alpha - 1$ denso en E. Si α es un número transfinito de segunda especie, E se dice tonelado de *clase* α si E es tonelado de clase α'

para todo $\alpha' < \alpha$. E se dice tonelado de clase σ si, para toda sucesión $(E_n)_1^\infty$ de subespacios, que cubre a E, existe un n tal que E_n es un subespacio tonelado cuya clausura $\bar{E}_n$ es de codimensión finita. E se dice tonelado de clase τ si, para toda sucesión $(E_n)_1^\infty$ de subespacios, que cubre a E, existe un n tal que E_n es un subespacio tonelado y denso de E.

Sean Σ una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y $l_0^\infty(\Sigma)$ el espacio vectorial de las funciones Σ-simples con valores en **K**, dotado de la topología de la convergencia uniforme. Entonces tenemos razones para conjeturar que $l_0^\infty(\Sigma)$ *es un espacio tonelado de clase* σ.

2. TEOREMA.—*Todo espacio localmente convexo de Baire es un espacio tonelado de clase* τ. *Todo espacio tonelado de clase* τ *es un espacio tonelado de clase* σ. *Todo espacio tonelado de clase* σ *es un espacio tonelado de clase* α, *cualquiera que sea el número transfinito* α.

DEMOSTRACIÓN.—En efecto, si E es un espacio localmente convexo de Baire y $(E_n)_1^\infty$ es una sucesión de subespacios que cubre a E, existe un n tal que E_n es un espacio de segunda categoría (o no magro) en E. Entonces E_n es un subespacio tonelado denso de E (véase Köthe [4], § 34,1 (2)).

La segunda parte es inmediata.

Para demostrar la tercera parte será suficiente probar, por inducción transfinita, que si E es un e. l. c. s. que no es un espacio tonelado de clase α, existe una sucesión $(E_n)_1^\infty$ de subespacios, que cubren a E, y que no son tonelados o cuyas clausuras $\bar{E}_n$ son de codimensión infinita. Para $\alpha = 0$ esta proposición es evidente. Supongamos que es cierta para $\alpha = \alpha_0$, siendo α_0 un número transfinito de primera especie. Si E no es un espacio tonelado de clase α_0, existe una sucesión no decreciente $(E_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de subespacios, que cubren a E, y que no son tonelados de clase $\alpha_0 - 1$ o cuyas clausuras son de codimensión infinita. Entonces, para cada i, existe una sucesión $(E_{ij})_{j \in \mathbf{N}}$ de subespacios, que cubren a E_i, y que no son tonelados o cuyas clausuras son de codimensión infinita. Por tanto, $(E_{ij})_{i,\, j \in \mathbf{N}}$ es una sucesión de subespacios de E que no son tonelados o cuyas clausuras son de codimensión infinita. Supongamos ahora que la proposición es cierta para $\alpha < \alpha_0$, siendo α_0 un número transfinito de segunda especie. Si E no es un espacio tonelado de clase α_0, existe un $\alpha < \alpha_0$ tal que E no es un espacio tonelado de clase α y, por consiguiente, E es unión de una sucesión $(E_n)_1^\infty$ de subespacios, que no son tonelados o cuyas clausuras son de codimensión infinita.

3. PROPOSICIÓN.—*Si E es un espacio tonelado de clase τ o σ (resp. α) y F es un subespacio de la compleción $\hat{E}$ de E, que contiene a E, F es un espacio tonelado de clase τ o σ (resp. α), respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN.—El caso α está probado en la proposición 8 de [5]. Sea E un espacio tonelado de clase τ. Si $(F_n)_1^\infty$ es una sucesión de subespacios que cubre a F, existe un n tal que $E_n = F_n \cap E$ es un espacio tonelado denso de E. Entonces, F_n es un subespacio tonelado denso de F. De igual forma se prueba el caso σ.

4. DEFINICIÓN.—Un *espacio* $\Gamma_r^{(0)}$ (o un *espacio* Γ_r) es un e. l. c. s. F tal que, para cada espacio tonelado E, toda aplicación lineal T: E $\longrightarrow$ F con gráfica cerrada es continua. Si α es un número transfinito de primera especie, un *espacio* $\Gamma_r^{(\alpha)}$ es un e. l. c. s. F que es unión de una sucesión no decreciente $(F_n)_1^\infty$ de espacios $\Gamma_r^{(\alpha-1)}$. Si α es un número transfinito de segunda especie, un *espacio* $\Gamma_r^{(\alpha)}$ es un espacio $\Gamma_r^{(\alpha')}$ para algún $\alpha' < \alpha$:

$$\Gamma_r^{(\alpha)} = \mathrm{U}\,\{\Gamma_r^{(\alpha')} : \alpha' < \alpha\},$$

donde también se denota por $\Gamma_r^{(\alpha)}$ la clase de los espacios $\Gamma_r^{(\alpha)}$. Un *espacio* $\Gamma_r^{(\sigma)}$ es un e. l. c. s. F que es unión de una sucesión $(F_n)_1^\infty$ de espacios Γ_r. Es fácil probar que todo espacio $\Gamma_r^{(\alpha)}$ es un espacio $\Gamma_r^{(\sigma)}$, cualquiera que sea el número transfinito α:

$$\Gamma_r^{(\alpha)} \subset \Gamma_r^{(\sigma)}$$

5. TEOREMA.—*Sean E un espacio tonelado de clase σ (resp. α) y F un espacio $\Gamma_r^{(\sigma)}$ (resp. $\Gamma_r^{(\alpha)}$). Si E_0 es un subespacio tonelado de clase σ (resp. α) denso de E y T_0: $E_0 \longrightarrow F$ es una aplicación lineal continua, existe una extensión continua T: E $\longrightarrow$ F de T_0. Además se puede asegurar que la imagen T (E) está contenida en un Γ_r-espacio $F_0 \subset F$.*

DEMOSTRACIÓN.—El caso α está probado en el teorema 10 de [5].

Sea $(F_n)_1^\infty$ una sucesión de subespacios Γ_r que cubre a F. Sea T_0: $E_0 \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua y $E_n = T_0^{-1}(F_n)$. Entonces, por ser E_0 un espacio tonelado de clase σ, existe un n tal que E_n es un subespacio tonelado cuya clausura $\bar{E}_n$ (en E_0) es de codimensión finita en E_0. Por tanto, según el teorema 14 de Valdivia [7], existe una extensión continua $\bar{T}_n$: $\bar{E}_n \longrightarrow F_n$ de la restricción T_n de T_0 a E_n. Como $T_0(x) = T_n(x)$ para $x \in E_n$, se tiene $T_0(x_0) = \bar{T}_n(x)$ para $x \in \bar{E}_n$. Entonces $T_0(E_0)$ está contenido en la suma F_0 de F_n y de un espacio de dimensión finita. Como F_n es un espacio Γ_r, por el teorema 8 de Valdivia [7], F_0 es un espacio Γ_r. Entonces, por el teorema 14 de Valdivia [7], T_0: $E_0 \longrightarrow F_0$ tiene una extensión continua T: $E \longrightarrow F_0$.

6. TEOREMA.—*Sean E un espacio tonelado de clase* σ (*resp.* α) *y F un espacio* $\Gamma_r^{(\sigma)}$ (*resp.* $\Gamma_r^{(\alpha)}$). *Si T: E* $\longrightarrow$ *F es una aplicación lineal con gráfica cerrada, entonces T es continua. Además se puede asegurar que la imagen T (E) está contenida en un* Γ_r-*espacio* $F_0 \subset F$.

DEMOSTRACIÓN.—El caso α está probado en el teorema 11 de [5]. Sean E un espacio tonelado de clase σ y F un espacio $\Gamma_r^{(\sigma)}$. Entonces, F es unión de una sucesión $(F_n)_1^\infty$ de espacios Γ_r. Es claro que $(T^{-1}(F_n))_1^\infty$ es una sucesión de espacios que cubre a E. Por tanto, existe un n tal que $E_n = T^{-1}(F_n)$ es un subespacio tonelado de E cuya clausura $\bar{E}_n$ es de codimensión finita en E. Sea T_n: $E_n \longrightarrow F_n$ la restricción de T a E_n. Entonces, por tener T_n la gráfica cerrada y ser F_n un espacio Γ_r, T_n es continua. Por el teorema 5, T_n tiene una extensión continua $\bar{T}_n$: $\bar{E}_n \longrightarrow F_n$. Por consiguiente, como T: $E \longrightarrow F$ tiene la gráfica cerrada y es igual a $\bar{T}_n$ sobre E_n, resulta $T = \bar{T}_n$ sobre $\bar{E}_n$. Por tanto, T es continua y la imagen T (E) está contenida en un Γ_r-espacio F_0 suma de F_n y de un espacio de dimensión finita.

7. PROPOSICIÓN.—*Si E es un espacio* $\Gamma_r^{(\sigma)}$ (*resp.* $\Gamma_r^{(\alpha)}$) *y T: E* $\longrightarrow$ *F es una aplicación lineal continua inyectiva, entonces T (E) es un espacio* $\Gamma_r^{(\sigma)}$ (*resp.* $\Gamma^{(\alpha)}$).

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\alpha = 0$ y S: $E_0 \longrightarrow T(E)$ una aplicación lineal con gráfica cerrada de un espacio tonelado E_0 en T (E). Entonces, $T^{-1}S$: $E_0 \longrightarrow E$ es una aplicación lineal con gráfica cerrada y, por tanto, continua, puesto que E_0 es un espacio tonelado y E un espacio Γ_r. De aquí se deduce que $S = T(T^{-1} S)$ es continua y que T (E) es un espacio Γ_r. Ahora, la parte restante de la proposición es inmediata.

8. Corolario. — *Sean E la envoltura localmente convexa $\sum_i A_i(E_i)$ de espacios tonelados E_i de clase* σ, *y F la envoltura localmente convexa $\bigcup_1^\infty B_n(F_n)$ de una sucesión de $\Gamma_r^{(\sigma)}$-espacios F_n, con las B_n inyectivas. Entonces toda aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ con gráfica cerrada es continua.*

Demostración.—Por la proposición 7, F es un espacio $\Gamma_r^{(\sigma)}$. Entonces, como cada aplicación $T A_i : E_i \longrightarrow F$ tiene la gráfica cerrada, las aplicaciones $T A_i$ son continuas, e. d., T es continua.

El corolario 8 contiene como caso particular el teorema 16 de Valdivia [7] cuando los E_i son espacios infra-Baire. E es un espacio infra-Baire si existe un espacio de Baire F, tal que E es un subespacio de F de codimensión finita (o contable). El siguiente teorema prueba la afirmación anterior.

9. Teorema.—*Si F es un espacio tonelado de clase σ (resp. α) y E es un subespacio de codimensión contable de F, entonces E es un espacio tonelado de clase σ (resp. α).*

Demostración.—El caso $\alpha = 0$ ha sido probado por Dieudonné y Valdivia (véase [7]). Sean F un espacio tonelado de clase σ y G un subespacio de dimensión contable de F tal que $F = E \oplus G$. Sea $(E_n)_1^\infty$ una sucesión de subespacios de E que cubre a E, entonces $(E_n + G)_1^\infty$ es una sucesión de subespacios de F que cubre a F. Por tanto, existe un n tal que $E_n + G$ es un subespacio tonelado cuya clausura $\overline{E_n + G}$ es de codimensión finita en F. Entonces por los teoremas citados de Dieudonné y Valdivia, E_n es un espacio tonelado. Además, como

$$\overline{E_n + G_0} = \overline{E}_n + G_0$$

para todo subespacio G_0 de dimensión finita de F y F es un espacio tonelado de clase 1, se deduce que $\overline{E}_n$ es de codimensión finita en F y $\overline{E}_n^E = \overline{E}_n \cap E$ de codimensión finita en E. Luego E es un espacio tonelado de clase σ. Para probar el caso α basta proceder de manera análoga, por inducción transfinita.

10. DEFINICIÓN.—Un *espacio* $\Gamma^{(0)}$ (o un *espacio* Γ) es un e. l. c. s. F tal que todo espacio cociente separado F/H es un espacio Γ_r. Si α es un número transfinito de primera especie, un *espacio* $\Gamma^{(\alpha)}$ es un e. l. c. s. F que es unión de una sucesión no decreciente $(F_n)_1^\infty$ de espacios $\Gamma^{(\alpha-1)}$. Si α es un número transfinito de segunda especie, un *espacio* $\Gamma^{(\alpha)}$ es un espacio $\Gamma^{(\alpha')}$ para algún $\alpha' < \alpha$:

$$\Gamma^{(\alpha)} = \bigcup \{\Gamma^{(\alpha')} : \alpha' < \alpha\},$$

donde también se denota por $\Gamma^{(\alpha)}$ la clase de los espacios $\Gamma^{(\alpha)}$. Un *espacio* $\Gamma^{(\sigma)}$ es un e. l. c. s. que es unión de una sucesión $(F_n)_1^\infty$ de subespacios Γ. Es fácil probar que todo espacio $\Gamma^{(\alpha)}$ es un espacio $\Gamma^{(\sigma)}$.

11. PROPOSICIÓN.—*Si F es un espacio* $\Gamma^{(\sigma)}$ *(resp.* $\Gamma^{(\alpha)}$*), todo espacio cociente separado F/H es un espacio* $\Gamma^{(\sigma)}$ *(resp.* $\Gamma^{(\alpha)}$*).*

DEMOSTRACIÓN.—En efecto, si F es unión de una sucesión $(F_n)_1^\infty$ de espacios Γ y H es un subespacio cerrado de F, entonces

$$(F_n + H)/H = F_n/H \cap F_n$$

es una sucesión de espacios Γ y, por tanto, F/H es un espacio $\Gamma^{(\sigma)}$. En el caso α se puede proceder de manera análoga, por inducción transfinita.

12. PROPOSICIÓN.—*Si E es un espacio* $\Gamma^{(\sigma)}$ *(resp.* $\Gamma^{(\alpha)}$*) y* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal continua, entonces* $T(E)$ *es un espacio* $\Gamma^{(\sigma)}$ *(resp.* $\Gamma^{(\alpha)}$*).*

DEMOSTRACIÓN.—Resulta inmediatamente de las proposiciones 7 y 11.

13. TEOREMA.—*Sea E un subespacio de codimensión contable del e. l. c. s. F. Si E es un espacio* $\Gamma^{(\sigma)}$ *(resp.* $\Gamma^{(\alpha)}$*), F es un espacio* $\Gamma^{(\sigma)}$ *(resp.* $\Gamma^{(\alpha)}$*).*

DEMOSTRACIÓN.—El caso $\alpha = 0$ ha sido probado por Valdivia en los teoremas 7 y 9 de [7]. Teniendo esto en cuenta, los demás casos son inmediatos.

Este teorema se puede extender para los espacios $\Gamma_r^{(\sigma)}$ y $\Gamma_r^{(\alpha)}$ de igual forma que los teoremas 8 y 10 de [7].

14. Teorema. — *Sean E la envoltura localmente convexa* $\sum_i A_i(E_i)$ *de espacios tonelados* E_i *de clase* σ, *y F la envoltura localmente convexa* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(F_n)$ *de una sucesión* $(F_n)_1^\infty$ *de espacios* $\Gamma^{(\sigma)}$. *Entonces toda aplicación lineal* $T: E \longrightarrow F$ *con gráfica cerrada es continua.*

Demostración.—Por la proposición 12, F es un espacio $\Gamma^{(\sigma)}$. Entonces como cada aplicación $T A_i: E_i \longrightarrow F$ tiene la gráfica cerrada, por el teorema 6 las aplicaciones $T A_i$ son continuas, e. d., T es continua.

Del teorema 14 se obtienen, en particular, los teoremas § 34.8 (1) y 10 (4) de [4].

El siguiente teorema se corresponde con el teorema de Banach-Schauder.

15. Teorema. — *Sean E la envoltura localmente convexa* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(E_n)$ *de una sucesión* $(E_n)_1^\infty$ *de espacios* $\Gamma^{(\sigma)}$, *y F la envoltura localmente convexa* $\sum_i B_i(F_i)$ *de espacios tonelados* F_i *de clase* σ. *Entonces toda aplicación lineal sobreyectiva* $T: E \longrightarrow F$ *con la gráfica cerrada es abierta.*

Demostración.—Basta aplicar el teorema 14 a la aplicación lineal $S: F \longrightarrow E/H$ con $H = T^{-1}(0)$, que se deduce de T de forma que $S \circ T$ sea la aplicación canónica $\varphi: E \longrightarrow E/H$. Se debe tener en cuenta la proposición 11.

Bibliografía

[1] Adasch, N. (1970). Tonnelierte Räume und zwei Satze von Banach. *Math. Ann.*, **186**, 209-214.

[2] Horváth, J. (1973). Locally convex spaces. *Lect. Notes in Math.*, n.° 331. Springer, Berlin.

[3] Kómura, Y. (1962). On linear topological spaces. *Kumamoto J. Sci.*, Series A, **5**, 148-157.
[4] Köthe, G. (1979). Topological Vector Spaces. II. Springer, New York.
[5] Rodríguez-Salinas, B. (1980). Sobre el teorema de la gráfica cerrada. Aplicaciones lineales subcontinuas. *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, **74**, 811-826.
[6] Rodríguez-Salinas, B. (1980). Sobre la clase del espacio tonelado $l_0^\infty(\Sigma)$. *Rev. R. Acad. Ci Madrid*, **74**, 827-830.
[7] Valdivia, M. (1971). Sobre el teorema de la gráfica cerrada. *Collect. Math.*, **22**, 51-72.
[8] Valdivia, M. (1979). Absolutely convex sets in barrelled spaces. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), **21**.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid