COMUNICACIONES A LA ACADEMIA
presentadas en las Sesiones Científicas celebradas en las fechas que se indican

ESPACIOS DE FUNCIONES ULTRADIFERENCIABLES (*)

Manuel Valdivia

In this paper we give simple representations of

$$\mathcal{E}^{(M_n)}(\Omega),\ \mathcal{E}^{\{M_n\}}(\Omega),\ \mathcal{D}^{(M_n)}(\Omega) \quad \text{and} \quad \mathcal{D}^{\{M_n\}}(\Omega).$$

Si A es un subconjunto de un espacio topológico, $\mathring{A}$ es su interior. Los espacios vectoriales utilizados en este artículo están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Si E y F son dos espacios vectoriales topológicos isomorfos, escribimos $E \simeq F$.

$(M_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de números estrictamente positivos que cumple las siguientes condiciones:

a. $M_0 = 1$; b. $M_n^2 \leq M_{n-1} M_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$; c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_{n-1}}{M_n} < \infty$.

Si Ω y K son dos conjuntos no vacíos del espacio euclídeo m-dimensional $\mathbb{R}^m$, Ω abierto y K compacto, entonces

$$\mathcal{E}^{(M_n)}(\Omega),\ \mathcal{E}^{\{M_n\}}(\Omega), \mathcal{D}^{(M_n)}(\Omega),\ \mathcal{D}^{\{M_n\}}(\Omega),\ \mathcal{E}^{(M_n)}(K),\ \mathcal{E}^{\{M_n\}}(K),\ \mathcal{D}^{(M_n)}(K) \text{ y } \mathcal{D}^{\{M_n\}}(K)$$

se definen igual que en [1].

Ponemos

$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \quad : 0 \leq x_j \leq 1, \ \ j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Tomamos en Ω una sucesión de cubos no degenerados (K_p) tal que

$$\{\mathring{K}_p : p = 1, 2, \ldots\}$$

(*) Presentada en la sesión celebrada el 3 de diciembre de 1980.

sea un recubrimiento localmente finito de Ω. Tomamos también

$$\varphi_p \in \mathcal{D}^{(M_n)}(K_p),\ p = 1, 2, \ldots$$

con

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(x) = 1,\ x \in \Omega.$$

Sea (H_p) una sucesión de cubos no degenerados de Ω, disjuntos dos a dos, tal que dado un compacto cualquiera K de Ω, existe un entero q, que depende de K, de manera que

$$H_p \cap K = \emptyset,\quad p \geq q.$$

L_p es un cubo no degenerado concéntrico a H_p y contenido en $\mathring{H}_p$.

Si E es un espacio localmente convexo, ponemos E^N y $E^{(N)}$ para el producto topológico y la suma directa topológica de una infinidad numerable de espacios iguales a E.

Las tres proposiciones siguientes las hemos demostrado en [4].

PROPOSICIÓN 1.—*Sea F un subespacio complementado de E^N y sea G un subespacio complementado de F. Si $G \simeq E^N$, entonces $F \simeq E^N$.*

PROPOSICIÓN 2.—*Sea F un subespacio complementado de $E^{(N)}$ y sea G un subespacio complementado de F. Si $G \simeq E^{(N)}$, entonces $F \simeq E^{(N)}$.*

PROPOSICIÓN 3.—*Sea H un subespacio complementado de E y sea L un subespacio complementado de H. Si $L \simeq E$, entonces $H^N \simeq E^N$ y $H^{(N)} \simeq E^{(N)}$.*

PROPOSICIÓN 4.

$$\mathcal{D}^{(M_n)}(I)^N \simeq \mathcal{E}^{(M_n)}(I)^N \quad \text{y} \quad \mathcal{D}^{(M_n)}(I)^{(N)} \simeq \mathcal{E}^{(M_n)}(I)^{(N)}$$

DEMOSTRACIÓN.—Ponemos

$$D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : \frac{1}{3} \leq x_j \leq \frac{2}{3},\ j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Sea T un operador lineal continuo de $\mathcal{E}^{(M_n)}$ (D) en $\mathcal{D}^{(M_n)}$ (I) tal que si $f \in \mathcal{E}^{(M_n)}$ (D), la restricción de T f a D coincide con f (la construcción de T puede hacerse de una forma análoga a los operadores de extensión obtenidos en [2] y [3]). Entonces $\mathcal{D}^{(M_n)}$ (I) es la suma directa topológica de T ($\mathcal{E}^{(M_n)}$ (D)) y el subespacio de $\mathcal{D}^{(M_n)}$ (I) cuyas funciones se anulan en D. Por tanto, $\mathcal{E}^{(M_n)}$ (D), que es obviamente isomorfo a $\mathcal{E}^{(M_n)}$ (I), es isomorfo al subespacio complementado T ($\mathcal{E}^{(M_n)}$ (D)) de $\mathcal{D}^{(M_n)}$ (I).

Sea S un operador lineal continuo de $\mathcal{E}^{(M_n)}$ $(I \sim \overset{\circ}{D})$ en $\mathcal{E}^{(M_n)}$ (I) tal que si $g \in \mathcal{E}^{(M_n)}$ $(I \sim \overset{\circ}{D})$, la restricción de S g a $I \sim \overset{\circ}{D}$ coincide con g. Entonces $\mathcal{E}^{(M_n)}$ (I) es la suma directa topológica de S ($\mathcal{E}^{(M_n)}$ $(I \sim \overset{\circ}{D})$) y el subespacio de $\mathcal{E}^{(M_n)}$ (I) formado por aquellas funciones que se anulan en $I \sim \overset{\circ}{D}$ (que es isomorfo a $\mathcal{D}^{(M_n)}$ (D)). De aquí se deduce que $\mathcal{D}^{(M_n)}$ (I) es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{E}^{(M_n)}$ (I).

Usamos ahora la proposición anterior y obtenemos que

$$\mathcal{D}^{(M_n)}(I)^N \simeq \mathcal{E}^{(M_n)}(I)^N \quad \text{y} \quad \mathcal{D}^{(M_n)}(I)^{(N)} \simeq \mathcal{E}^{(M_n)}(I)^{(N)}.$$

Proposición 5.—$\mathcal{E}^{(M_n)}$ (Ω) *es isomorfo a un subespacio complementado de*

$$\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^{(M_n)}(K_p).$$

Demostración.—Si X es la aplicación de

$$\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^{(M_n)}(K_p) \quad \text{en} \quad \mathcal{E}^{(M_n)}(\Omega)$$

tal que

$$X : (f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots) \rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} f_p,$$

y si Y es la aplicación de

$$\mathcal{E}^{(M_n)}(\Omega) \quad \text{en} \quad \prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^{(M_n)}(K_p)$$

definida por

$$\mathrm{Y}: f \rightarrow (f\varphi_1, f\varphi_2, \ldots, f\varphi_p, \ldots)$$

entonces $\mathrm{Y} \circ \mathrm{X}$ es una proyección continua en

$$\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^{(\mathrm{M}_n)}(\mathrm{K}_p)$$

cuya imagen es isomorfa a $\mathcal{E}^{(\mathrm{M}\ )}(\Omega)$, c. q. d.

PROPOSICIÓN 6.

$$\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{E}^{(\mathrm{M}_n)}(\mathrm{K}_p),$$

es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{E}^{(\mathrm{M}_n)}(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN.—Si W_p es un operador de extensión de

$$\mathcal{E}^{(\mathrm{M}_n)}(\mathrm{L}_p) \quad \text{en} \quad \mathcal{D}^{(\mathrm{M}_n)}(\mathrm{H}_p), \quad p = 1, 2, \ldots,$$

sea Z la aplicación de

$$\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{E}^{(\mathrm{M}_n)}(\mathrm{I}_p) \quad \text{en} \quad \mathcal{E}^{(\mathrm{M}_n)}(\Omega)$$

definida por

$$\mathrm{Z}: (f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots) \rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{W}_p f_p.$$

Es obvio que

$$\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{E}^{(\mathrm{M}_n)}(\mathrm{L}_p)$$

es isomorfo a

$$\mathrm{Z}\left(\prod_{p=1}^{\infty} \mathcal{E}^{(\mathrm{M}_n)}(\mathrm{L}_p)\right)$$

y este espacio tiene el subespacio de $\mathcal{E}^{(M_n)}(\Omega)$ cuyas funciones se anulan en $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_p \cup \ldots$ como complemento topológico, c. q. d.

TEOREMA 1.

$$\mathcal{E}^{(M_n)}(\Omega) \simeq \mathcal{E}^{(M_n)}(I)^N \simeq \mathcal{D}^{(M_n)}(I)^N .$$

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que $\mathcal{D}^{(M_n)}(K_p)$ es isomorfo a $\mathcal{D}^{(M_n)}(I)$, basta aplicar las proposiciones 1, 4, 5 y 6 para tener la conclusión, c. q. d.

Las dos proposiciones siguientes se prueban de una forma análoga a las proposiciones 5 y 6, respectivamente.

PROPOSICIÓN 7.—$\mathcal{D}^{(M_n)}(\Omega)$ *es isomorfo a un subespacio complementado de*

$$\bigoplus_{p=1}^{\infty} \mathcal{D}^{(M_n)}(K_p).$$

PROPOSICIÓN 8.

$$\bigoplus_{p=1}^{\infty} \mathcal{E}^{(M_n)}(L_p)$$

es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{D}^{(M_n)}(\Omega)$.

TEOREMA 2.

$$\mathcal{D}^{(M_n)}(\Omega) \simeq \mathcal{E}^{(M_n)}(I)^{(N)} \simeq \mathcal{D}^{(M_n)}(I)^{(N)} .$$

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que $\mathcal{D}^{(M_n)}(K_p)$ es isomorfo a $\mathcal{D}^{(M_n)}(I)$ basta aplicar las proposiciones 2, 4, 7 y 8 para tener la conclusión, c. q. d.

Si en todos los resultados anteriores cambiamos $(M\, n)$ por $\{M\, n\}$ se tienen los dos siguientes teoremas:

TEOREMA 3.

$$\mathcal{E}^{\{M_n\}}(\Omega) \simeq \mathcal{E}^{\{M_n\}}(I)^N \simeq \mathcal{D}^{\{M_n\}}(I)^N$$

TEOREMA 4.

$$\mathcal{D}^{\{M_n\}}(\Omega) \simeq \mathcal{E}^{\{M_n\}}(I)^{(N)} \simeq \mathcal{D}^{\{M_n\}}(I)^{(N)}.$$

Bibliografía

[1] KOMATSU, H.: *Ultradistributions I, Structure Theorems and a Characterization.* «J. Fac. Sc. Univ. Tokyo», Sec. IA, 20, n.º 1 (1973), 25-105.

[2] OGRODZKA, Z.: *On simultaneous extension of infinitely differentiable functions.* «Studia Math.», **28**, 193-207 (1967).

[3] VALDIVIA, M.: *Representaciones de los espacios* $\mathcal{D}(\Omega)$ *y* $\mathcal{D}'(\Omega)$. «Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», Madrid, **72**, 385-414 (1978).

[4] VALDIVIA, M.: *Representaciones de los espacios* $\mathcal{C}^m(V)$ *y* $\mathcal{D}^m(V)$. «Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales», Madrid (pendiente de publicación).

UNA NOTA EN CODIMENSION DE SUBESPACIOS DE CIERTOS ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS (*)

Pedro Pérez Carreras y José Bonet

Departamento de Matemáticas. E. S. I. Industriales de la Universidad Politécnica de Valencia. C. de Vera, s/n, Valencia-10

Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Matemáticas. Burjasot, Valencia

Some results in codimension are given: Let E be a space and let F be a subspace of E of codimension less than $2^{\aleph_0}$. If $E'[\mu(E', E)]$ is complete, then F is countably barreled (*w*-barreled) if E is countably barreled (*w*-barreled).

Los espacios vectoriales que usaremos están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o complejos. Dado un par dual (F, G) denotamos mediante $\sigma(F, G)$, $\mu(F, G)$ y $\beta(F, G)$ las topologías débil, de Mackey y fuerte, respectivamente. La palabra espacio quiere significar espacio vectorial topológico separado localmen-

(*) Presentada en la sesión celebrada el 3 de diciembre de 1980.