ALGUNOS TEOREMAS DE APLICACION ABIERTA Y DE NUCLEO CERRADO

Germán Giráldez Tiebo

Recibido: 7 febrero 1979

Presentado por el académico numerario D. Baltasar Rodríguez-Salinas

This works is a part of the author's doctoral thesis, which has been submited in the Faculty of Mathematics of the University Complutense of Madrid in june of 1974.

Here it is introduced the transpose of a linear mapping in a general form, resulting that many open mapping theorems, for functions definied in sub-spaces of a fixed class, can be deduced, like particular cases, from theorem 4 (see note 5). This general form of the thanspose of a function let also to study the maximal classes in the domain or in the image, which make open or continous to the linear mapping with closed kernel, to which is principally dedicated the present summary.

Este trabajo es una parte de la memoria presentada por el autor para optar al grado de doctor en Ciencias Matemáticas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid en junio de 1974 y dirigida por el profesor D. Baltasar Rodríguez-Salinas Palero.

En él se introduce la transpuesta de una aplicación lineal de forma general, resultando que muchos teoremas de aplicación abierta para funciones definidas en subespacios de los de alguna clase determinada se pueden interpretar como casos particulares del teorema 4 (véase nota 5). Esta forma general de la transpuesta permite también estudiar clases maximales en el dominio o en la imagen que hacen abiertas o continuas aplicaciones lineales con núcleo cerrado, a lo cual está dedicado, básicamente, este resumen.

1. DEFINICIÓN.—Sean E y F dos e. v. t., E_0 un subespacio de E y f una aplicación lineal de E_0 en F. Sean

$$H = \{y' \in F' : y' \circ f \in E_0'\},$$
$$f'(y') = \{x' \in E' : \langle f(x), y' \rangle = \langle x, x' \rangle \ \forall x \in E_0\}$$

para cada $y' \in H$, y

$$M = \bigcup \{f'(y') : y' \in H\}.$$

Definimos formalmente $H = \operatorname{Dom} f'$ y $M = \operatorname{Im} f'$, y escribiremos

$$\langle f(x), y' \rangle = \langle x, f'(y') \rangle \qquad \forall x \in E_0$$

para expresar que

$$\langle f(x), y' \rangle = \langle x, x' \rangle \qquad \forall x \in E_0, \quad \forall x' \in f'(y').$$

Esta aplicación $f' : H \longrightarrow \mathcal{P}(E')$ la llamaremos *transpuesta de* f *para* (F′, E′).

La transpuesta de f para (F^*, E^*) la denotaremos por f^*, siendo

$$\operatorname{Dom} f^* = H = \{y' \in F^* : y' \circ f \in E_0'\}.$$

Es claro que si $\bar{E}_0 = E$ (en particular si $E_0 = E$), entonces $f'(y')$ (resp. $f^*(y')$) consta de un solo punto $x' \in E'$ y utilizaremos $f'(y')$ (resp. $f^*(y')$) para denotar x'. Es obvio que en este caso la f' anterior coincide con la definición usual de ${}^t f$ (transpuesta de f).

Además, si E es un espacio de Hahn-Banach (en el sentido de que toda forma lineal continua definida sobre un subespacio cerrado se puede extender a una forma lineal continua sobre el total) se tiene que $f'(y') \neq \emptyset$ (resp. $f^*(y') \neq \emptyset$) para todo $y' \in H$, aunque $\bar{E}_0 \neq E$.

2. TEOREMA.—*Sean E y F e. v. t. tales que E es de Hahn-Banach. Sea* f *una aplicación lineal de un subespacio E_0 de E en F. Entonces son equivalentes:*

2.1. *El núcleo de* f *es cerrado en E_0.*

2.2. *El dominio H de* f* *es denso en F^*_σ.*

2.3. *Existe una topología* τ *l. c. s. sobre* F, *tal que* f : $E_0 \longrightarrow$ $\longrightarrow F(\tau)$ *es continua.*

DEMOSTRACIÓN.—2.1. $\Longrightarrow$ 2.2. Supongamos $N = f^{-1}(0)$ cerrado en E_0. Si H no es denso en F^*_σ, existe $y_0 \neq 0$ tal que $\langle y_0, H\rangle = 0$:

a) Si $y_0 \notin f(E_0)$, entonces existe $y' \in F^*$ tal que

$$\langle f(E_0), y'\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle y_0, y'\rangle \neq 0.$$

Como $y' \circ f = 0$ sobre E_0, resulta que $y' \in H$ y por tanto

$$\langle y_0, y'\rangle = 0,$$

que es absurdo.

b) Si $y_0 \in f(E_0)$, entonces existe

$$x_0 \in E_0 \quad \text{tal que} \quad f(x_0) = y_0 \neq 0,$$

por tanto $x_0 \notin N$. Por ser N cerrado en E_0, $x_0 \in E_0$ no pertenece a la clausura de N en E y, puesto que E es de Hahn-Banach, existe un $x' \in E'$ que cumple

$$\langle N, x'\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle x_0, x'\rangle \neq 0.$$

La forma lineal de $f(E_0)$ en $\mathbb{K}$ definida por $f(x) \longrightarrow \langle x, x'\rangle$, que evidentemente está bien definida, tiene una extensión $y' \in F^*$, es decir,

$$\langle f(x), y'\rangle = \langle x, x'\rangle$$

para todo $x \in E_0$ y, por tanto, $y' \circ f \in E'_0$, de donde $y' \in H$.

Como por otra parte

$$\langle y_0, y'\rangle = \langle f(x_0), y'\rangle = \langle x_0, x'\rangle \neq 0$$

resulta una contradicción con $\langle y_0, H\rangle = 0$.

2.2. $\Longrightarrow$ 2.3. Si Dom f^* es denso en F^*_σ, la topología l. c. $\tau = \sigma(F, \text{Dom } f^*)$ es separada. Además, si

$$W = \{y \in F : |\langle y, y_i'\rangle| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad y_i' \in \text{Dom } f^*, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

es un entorno de 0 para σ (F, Dom f^*), el conjunto

$$V = \{x \in E_0 : | \langle x, y_i' \circ f \rangle | \leq \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

es un entorno de 0 en E_0 puesto que

$$y_i' \circ f \in E_0' (1 \leq i \leq n), \quad y \quad f(V) \subset W$$

que expresa la continuidad de $f : E_0 \longrightarrow F(\tau)$.

2.3. $\Longrightarrow$ 2.1. Es inmediata, pues $\{0\}$ es cerrado en τ y $N = f^{-1}(0)$ es cerrado en E_0 por la continuidad de f.

3. Nota.—El papel del teorema 2 se intuye del hecho que si la gráfica es cerrada en $E \times F$ (resp. $E_0 \times F$) el núcleo es cerrado en E (resp. E_0) y de la propiedad:

«Sea E un e. l. c. y F otro e. l. c. s. Si f es una aplicación lineal de un subespacio E_0 de E en F, entonces son equivalentes:

i) La gráfica G_f de f es cerrada en $E_0 \times F$.

ii) $H = \mathrm{Dom}\, f'$ es denso en F'_σ.

iii) Existe sobre F una topología τ l. c. s. menos fina que la de F y tal que $f : E_0 \longrightarrow F(\tau)$ es continua.»

4. Teorema.—*Sean E y F dos espacios l. c. y* f *una aplicación lineal casi abierta de un subespacio E_0 de E sobre F. Entonces, si la gráfica G_f de* f *es cerrada en $E \times F$ y $M = \mathrm{Im}\, f'$ es cerrado en E'_σ,* f *es abierta.*

Demostración.—Sea $g : E_0/N \longrightarrow F$ la biyección asociada a la f y G_g su gráfica. De G_f cerrado en $E \times F$ se sigue que G_g es cerrado en $(E/N) \times F$.

Si φ es la sobreyección canónica de E sobre E/N se tiene

$$\overline{g(W \cap E_0/N)} = \overline{f(\varphi^{-1}(W) \cap E_0)}$$

para todo W entorno de 0 en E/N, y, puesto que f es casi abierta, se sigue que g es casi abierta.

Por hipótesis $\mathrm{Im}\, f'$ es cerrado en E'_σ y además

$$\mathrm{Im}\, g' = ({}^t\varphi)^{-1})(\mathrm{Im}\, f')$$

(siendo g' la transpuesta de g para $(F', (E/N)'))$, por tanto, Im g' es cerrado en $(E/N)'_\sigma$.

Sea h la aplicación lineal g^{-1} de F en E/N. Puesto que G_g es cerrado en $(E/N) \times F$, G_h es cerrado en $F \times (E/N)$ y por la nota 3 Dom h' es denso en $(E/N)'_\sigma$. Por otra parte es inmediato que Dom h' = Im g' es un conjunto cerrado de $(E/N)'_\sigma$. Por consiguiente Dom $h' = (E/N)'$.

Como ser g casi abierta equivale a ser h casi continua, se sigue de esto y de Dom $h' = (E/N)'$ que h es continua, lo cual implica que g es abierta y, por tanto, f también lo es.

5. Nota.—El teorema anterior pone de manifiesto que la f' introducida es adecuada para el estudio de teoremas de aplicación abierta, pues como es sabido esta propiedad de la imagen de ${}^tf$ cuando la f está definida en E (o $\bar{E}_0 = E$) es básica en dichos teoremas. Con ello pueden hacerse demostraciones «directamente» tanto si la función está definida en todo E o en un subespacio E_0 como se pone de manifiesto en la memoria que es una forma distinta de la clásica: suponer que $\bar{E}_0 = E$, una vez conocido que los subespacios cerrados pertenecen a la misma clase que el total. Por el contrario, esta última propiedad resulta aquí inmediata.

6. Definición.—Sea E un e. v. t. y E'_σ su dual dotado de la topología débil. Un subespacio H de E^* se dice *casi cerrado en* E'_σ si, para cada entorno V de 0 en E, $H \cap V^0$ es cerrado en E'_σ.

Evidentemente si H es un subespacio de E', entonces casi cerrado es lo mismo que $\nu(E', E)$-cerrado.

7. Definición.—Un e. l. c. s. F se dice B_r^*-*completo*, si todo subespacio de F^* denso en F^*_σ y casi cerrado en F'_σ contiene a F'.

8. Teorema.—*Un e. l. c. s. F es B^*_r-completo si y sólo si $F' = F^*$ y F es B_r-completo, es decir, si F'_σ es completo y F es B_r-completo.*

Demostración.—Evidentemente, si $F' = F^*$ y F es B_r-completo, F es B^*_r-completo.

Es obvio que si F es B^*_r-completo, F es B_r-completo. Entonces, para demostrar totalmente el teorema, basta probar que F no es B^*_r-completo si $F' \neq F^*$. Para ello, sea $x_0 \in F$, $x_0 \neq 0$ y H_0 el hiperplano cerrado de F'_σ definido por el núcleo de x_0 como forma lineal continua sobre F'_σ. Es claro que existe

$$x_0' \in F' \setminus H_0 \quad \text{tal que} \quad \langle x_0, x_0' \rangle = 1.$$

Por otra parte, de $F' \neq F^*$ se sigue que F no es de dimensión finita y, por tanto, $F \neq F^{**}$. De esto es inmediato que existe $x \in F^{**} \setminus F$ que cumple

$$x|_{F'} = x_0, \quad \text{es decir,} \quad x(H_0) = 0 \quad \text{y} \quad \langle x, x_0' \rangle = 1.$$

Si H es el núcleo de x como forma lineal sobre F^*, se deduce de $x \notin F$ que H no es cerrado en F^*_σ y, por consiguiente, es denso en F^*_σ. Como $H \cap F' = H_0$ es cerrado en F'_σ, se tiene que H es casi cerrado en F'_σ. Además H no contiene a F', así pues F no es B^*_r-completo.

9. Corolario —*Si F es un espacio B^*_r-completo y M un subespacio de F, M es B^*_r-completo.*

Demostración.—Por el teorema anterior $F' = F^*$ y, por tanto, todo subespacio de F es cerrado, de donde M es B_r-completo. Además es inmediato que $M' = M^*$.

10. Corolario.—*Todo espacio B^*_r-completo metrizable es de dimensión finita.*

Demostración.—Es inmediata del teorema 8 y de que todo espacio metrizable con dual débil completo es de dimensión finita.

11. Teorema.—*Sean E un espacio de Hahn-Banach, F un espacio B^*_r-completo y* f *una aplicación lineal de E en F. Entonces, si* f *es casi continua y su núcleo es cerrado,* f *es continua.*

Demostración.—Por el teorema 8, $F' = F^*$ y, por tanto,

$$H = \operatorname{Dom} f^* = \operatorname{Dom} f'.$$

Se sigue del teorema 2 que H es denso en F^*_σ y, de f casi continua, que $H = \operatorname{Dom} f'$ es $\nu(F', F)$-cerrado, luego $H = F'$ por el teorema 8. De $\operatorname{Dom} f' = F'$ y f casi continua se deduce que f es continua.

12. TEOREMA.—*Si F es un e. l. c. s. que no es B^*_r-completo, existen un espacio de Mackey separado E y una aplicación lineal, biyectiva y casi continua* f *de E sobre F (cuyo núcleo* $\{0\}$ *es cerrado), que no es continua.*

DEMOSTRACIÓN.—Si F no es B^*_r-completo, existirá un subespacio H denso en F^*_σ y casi cerrado en F'_σ tal que H no contiene a F'. Sea E el e. l. c. F_τ, donde τ es la topología de Mackey $\tau(F, H)$; puesto que H es denso en F^*_σ y $\sigma(F, F^*)$ es separada, $\tau(F, H)$ también lo es y, si consideramos como f la aplicación idéntica de E en F, su núcleo $\{0\}$ es cerrado en E.

Es claro que para cada entorno V de 0 en F, el conjunto $H \cap V^0$ es $\sigma(H, F)$-compacto, equilibrado y convexo y, por tanto, $(H \cap V^0)^\bullet$ es un entorno de 0 en $\tau(F, H)$.

Si V es un entorno de 0 en F, equilibrado y convexo, y si representamos con $\bullet$ la polaridad en el par (F, H), entonces la clausura de $f^{-1}(V)$ en $E = F_\tau$ es

$$f^{-1}(V)^{\bullet\bullet} = V^{\bullet\bullet} = [V^\circ \cap (F_\tau)']^\circ = (V^\circ \cap H)^\circ$$

y, por lo dicho antes, f es casi continua.

13. DEFINICIÓN.—Un e. l. c. s. se dice Γ_r^* si, para todo subespacio denso H de F^*_σ en el que cada parte cerrada y acotada es compacta (equivale a que H sea casi completo), se tiene que $H \supset F'$.

Evidentemente, todo espacio Γ_r^* es un espacio Γ_r (Valdivia [6]).

14. TEOREMA.—*Si F es un e. l. c. s. que posee una base de Hamel numerable, entonces F es un espacio* Γ_r^*.

DEMOSTRACIÓN.—Análoga a la de Γ_r (Valdivia [5]).

Existen espacios Γ_r^* que no son B_r^*-completos.

15. TEOREMA.—*Sean E un espacio tonelado y F un espacio* Γ_r^*. *Entonces, si* f *es una aplicación lineal de E en F, cuyo núcleo es cerrado,* f *es continua.*

DEMOSTRACIÓN.—Por el teorema 2, $H = \mathrm{Dom}\, f^*$ es denso en F^*_σ. Sea A una parte cerrada y acotada de H y sea $(y'_i)_{i \in I}$ una red en A convergente en F^*_σ a y'. Entonces, para cada $y \in F$, existe una constante $k = k(y) > 0$ tal que

$$|\langle y, y_i' \rangle| \leq k \qquad \forall\, i \in I.$$

Ahora bien, las formas lineales $x'_i = f^*(y'_i)$ constituyen una red $(x'_i)_{i \in I}$ contenida en E′ que converge a

$$x' : x \longrightarrow \langle f(x), y' \rangle \quad \text{en} \quad \sigma(E^*, E).$$

Además, por la acotación anterior, para cada $x \in E$, existe

$$k = k(f(x)) > 0$$

tal que

$$|\langle x, x_i' \rangle| \leq k \qquad \forall\, i \in I,$$

es decir, $(x'_i)_{i \in I}$ es $\sigma(E', E)$-acotado. Como E es tonelado, se tiene, por el teorema de Banach-Steinhauss, que $x' \in E'$; por tanto, $x' = f^*(y')$ e $y' \in H$. Obviamente, puesto que A es cerrado en H, $y' \in A$ y A será cerrado en F^*_σ. De esto y de la condición de ser A acotado en F^*_σ, se sigue que A es compacto en F^*_σ.

Por ser F un espacio Γ_r^*, $H \supset F'$ lo que es decir Dom $f' = F'$ que, puesto que f es casi continua, implica la continuidad.

16. Teorema.—*Si F es un e. l. c. s. que no es Γ_r^*, existe un espacio tonelado separado E y una aplicación lineal y biyectiva* f *de E (cuyo núcleo* $\{0\}$ *es cerrado) y que no es continua.*

Demostración.—Si F no es un espacio Γ_r^*, existe un subespacio H de F^*, denso en F^*_σ, tal que toda parte cerrada y acotada es compacta y que no contiene a F′.

Sea E el espacio F_β con la topología l. c. fuerte $\beta(F, H)$; puesto que H es denso en F^*_σ y $\sigma(F, F^*)$ es separada, $\beta(F, H)$ también lo es. Por las condiciones de H, todo conjunto equilibrado, convexo, $\sigma(H, F)$-cerrado y $\sigma(H, F)$-acotado es $\sigma(H, F)$-compacto y, por tanto, $\beta(F, H)$ es compatible con el par (F, H). Además es inmediato que E es tonelado.

Si consideramos como f la aplicación idéntica de E en F, su núcleo $\{0\}$ es cerrado en E y sin embargo no es continua, puesto que $E' = H$ no contiene a F′.

17. Corolario.—*Todo subespacio de un espacio Γ_r^* es Γ_r^*.*

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores.

18. TEOREMA.—*Sea F un e. l. c. s. Entonces son equivalentes:*

18.1. *Para todo espacio tonelado E y toda aplicación lineal* f *de E en F con núcleo cerrado,* f *es continua.*

18.2. *Para toda topología* τ *l. c. s. sobre F,* $\tau^t \supset \tau_F{}^t$, *es decir, la topología tonelada asociada a* τ_F *es el extremo inferior de todas las topologías toneladas separadas sobre F.*

18.3. *Para todo subespacio M de F*, denso en* F^*_σ, *se tiene que* $\overline{M}$ *(casi completado de M) contiene a F′.*

18.4. *Para todo subespacio M de F*, casi completado y denso en* F^*_σ, *se tiene* $M \supset F'$, *es decir, F es* $\Gamma_r{}^*$.

DEMOSTRACIÓN.—18.1 $\Longrightarrow$ 18.2. Sea τ una topología l. c. s. sobre F, entonces la aplicación $1_F : F(\tau^t) \longrightarrow F(\tau_F)$ tiene núcleo $\{0\}$ cerrado en τ^t y, por hipótesis, es continua; esto es $\tau^t \supset \tau_F$, de donde $\tau^t \supset \tau_F{}^t$.

18.2. $\Longrightarrow$ 18.3. Sea M un subespacio denso de F^*_σ, entonces la topología l. c. $\tau = \sigma(F, M)$ es separada. Por hipótesis $\tau^t \supset \tau_F{}^t$, es decir,

$$\tau(F, \overline{M}) = \tau^t \supset \tau_F{}^t = \tau(F, \overline{F'}),$$

por tanto, $\overline{M} \supset \overline{F'} \supset F'$.

18.3. $\Longrightarrow$ 18.1. Sea E tonelado y $f : E \longrightarrow F(\tau_F)$ una aplicación lineal con núcleo cerrado. Por el teorema 2, existe τ l. c. s. tal que $f : E \longrightarrow F(\tau)$ es continua y, por ser E tonelado, $f : E \longrightarrow F(\tau^t)$ también es continua.

Como τ es separada, $M = F(\tau)' \subset F^*$ es denso en F^*_σ. Por hipótesis $\overline{M} \supset F'$ y, obviamente, $\overline{M} \supset \overline{F'}$. De esto se sigue

$$\tau^t = \tau(F, \overline{M}) \supset \tau(F, \overline{F'}) = \tau_F{}^t.$$

Así pues, $f : E \longrightarrow F(\tau_F{}^t)$ es continua y, finalmente, $f : E \longrightarrow F(\tau_F)$ es continua.

18.3. $\Longleftrightarrow$ 18.4. Es inmediata.

19. PROPOSICIÓN.—*Si F es un e. l. c. s., son equivalentes:*

19.1. *Todo subespacio denso H de F'_σ coincide con F'.*

19.2. *$F = (F')^*$, es decir, F es débilmente completo.*

DEMOSTRACIÓN.—19.1. $\Longrightarrow$ 19.2. Si $F \neq (F')^*$, entonces existirá $x \in (F')^* \backslash F$ y, por tanto, el núcleo de x como forma lineal sobre F' es denso en F'_σ y no coincide con él.

19.2. $\Longrightarrow$ 19.1. Supongamos H un subespacio denso en F'_σ y distinto de F'. Entonces se puede encontrar $x \in (F')^*$ tal que $x(H) = 0$ y $x \neq 0$, es decir, $x \in (F')^* \backslash F$ en contra de $(F')^* = F$.

20. TEOREMA.—*Un e. l. c. s. F es finito dimensional si y sólo si todo subespacio denso H de F^*_σ contiene a F'.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea F de dimensión finita, entonces $F' = F^*$ y el único subespacio denso de F^*_σ es él mismo.

Para el recíproco veamos primero que $F' = F^*$, puesto que si $F' \neq F^*$ razonando como en el teorema 8 existe un subespacio denso H de F^*_σ que no contiene a F', en contra de la hipótesis de que todo subespacio denso H de F^*_σ contiene a F'.

Por otra parte, de $F' = F^*$ y de la hipótesis, se sigue por la proposición anterior que $F = (F')^* = F^{**}$, de donde resulta F de dimensión finita.

21. TEOREMA.—*Sean E un espacio de Hahn-Banach y F un e. v. t. s. de dimensión finita. Entonces, si* f *es una aplicación lineal de E en F, cuyo núcleo es cerrado,* f *es continua.*

DEMOSTRACIÓN.—Por el teorema 2 $H = \mathrm{Dom}\, f^*$ es denso en F^*_σ. Se sigue, por ser F de dimensión finita, que $H = F'$ de donde $\mathrm{Dom}\, f' = F'$ y, por tanto, f es continua para $\sigma(E, E')$ y $\sigma(F, F')$. Es inmediato ahora que f es continua.

22. TEOREMA.—*Si F es un e. l. c. s. que no es de dimensión finita, existe un espacio de Mackey separado E y una aplicación lineal y biyectiva de E sobre F (cuyo núcleo $\{0\}$ es cerrado) que no es continua.*

DEMOSTRACIÓN.—Si F no es de dimensión finita, se sigue del teorema 20 que existe un subespacio denso H de F^*_σ que no contiene a F'.

Sea $E = F_\tau$ donde τ es la topología de Mackey $\tau(F, H)$; puesto que H es denso en F^*_σ y $\sigma(F, F^*)$ es separada, F_τ también lo es. Si f es la aplicación idéntica de E en F, entonces su núcleo es cerrado y no es continua.

23. DEFINICIÓN.—Sea E un e. l. c. s. Diremos que E es B*-*completo* si todo subespacio H de E^*, casi cerrado en E'_σ, es cerrado en E^*_σ.

Evidentemente todo espacio B*-completo es B_r^*-completo y vale el corolario 10 para espacios B*-completos.

24. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. s., entonces E es B*-completo si y sólo si $E' = E^*$ y E es B-completo.*

DEMOSTRACIÓN.—Análoga a la del teorema 8.

25. TEOREMA.—*Sea E un espacio B*-completo y M un subespacio de E, entonces M y E/M son B*-completos.*

DEMOSTRACIÓN.—Por el teorema anterior $E' = E^*$ y, por tanto, todo subespacio de E es cerrado, de donde M y E/M son B-completos. Además es inmediato que

$$M' = M^* \quad \text{y} \quad (E/M)' = (E/M)^*.$$

26. TEOREMA.—*Sean E un espacio B*-completo y F un e. l. c. s. Entonces, si* f *es una aplicación lineal, casi abierta, de un subespacio E_0 de E sobre F,* f *es abierta.*

DEMOSTRACIÓN.—Si $N = f^{-1}(0)$, se tiene del teorema anterior que E/N es B*-completo. Sea

$$\bar{f} : E_0/N \longrightarrow F$$

la biyección asociada a la f y consideremos

$$h = (\bar{f})^{-1} : F \longrightarrow E/N.$$

Por ser h inyectiva, Ker $h = \{0\}$ es cerrado en F. De f casi abierta se sigue que $\bar{f}$ es casi abierta y, por tanto, h casi continua. Por el teorema 11, h es continua, entonces $\bar{f}$ y f son abiertas.

27. TEOREMA.—*Si E es un e. l. c. s. que no es B^*-completo, existe un espacio de Mackey separado F y una aplicación lineal casi abierta de E sobre F, cuyo núcleo es cerrado, y que no es abierta.*

DEMOSTRACIÓN.—Si $E' \neq E^*$, entonces E no es B_r^*-completo y, por el teorema 12, existe un espacio F de Mackey separado y una aplicación g de F sobre E lineal, biyectiva, casi continua y no continua; por consiguiente, $f = g^{-1}$ de E sobre F es lineal, biyectiva, casi abierta, con núcleo $\{0\}$ cerrado y no abierta.

Si $E' = E^*$ y E no B^*-completo por hipótesis, se sigue del teorema 24 que E no es B-completo. Así pues, existe un subespacio H de E' que es $\nu(E', E)$-cerrado y que no es cerrado. Si F es el espacio E/H° dotado de la topología de Mackey $\tau(E/H^\circ, H)$ que coincide con la cociente de $\tau(E, H)$ módulo H°, y f es la sobreyección canónica de E sobre F, resulta ser una aplicación lineal, casi abierta, con gráfica cerrada (por tanto, con núcleo cerrado) y no abierta.

28. DEFINICIÓN.—Un e. l. c. s. E se dice Γ^* si para todo subespacio H de E^*_σ tal que H° es cerrado en E y toda parte cerrada y acotada de H es compacta, se cumple que

$$H \cap E' = \overline{H} \cap E'.$$

Evidentemente, todo espacio Γ^* es Γ_r^*.

29. TEOREMA.—*Sean E un espacio Γ^* y M un subespacio cerrado de E. Entonces E/M es Γ^*.*

DEMOSTRACIÓN.—Es semejante a la de espacios Γ (Valdivia [6]).

Si dotamos a E de la topología l. c. más fina, la topología cociente módulo M será también la l. c. más fina sobre E/M. Sea φ_1 la sobreyección canónica de E sobre E/M para estas topologías y φ la misma aplicación para las topologías originales.

Es sabido que

$${}^t\varphi_1 : (E/M)^* \longrightarrow E^*$$

es un morfismo estricto inyectivo para las topologías

$$\sigma((E/M)^*, E/M) \quad \text{y} \quad \sigma(E^*, E)$$

y, análogamente,

$$\varphi' : (E/M)' \longrightarrow E'$$

también lo es para

$$\sigma((E/M)', E/M) \quad \text{y} \quad \sigma(E', E)$$

(Horváth [1]). Además, φ' es la restricción de ${}^t\varphi_1$ a $(E/M)'$.

Sea H un subespacio de $(E/M)^*_\sigma$ en el que toda parte cerrada y acotada es compacta y H° es $\sigma(E/M, (E/M)')$-cerrado. De la igualdad

$${}^t\varphi_1(H)^\circ = \varphi_1^{-1}(H^\circ) = \varphi^{-1}(H^\circ)$$

y de la continuidad de φ, el conjunto ${}^t\varphi_1(H)^\circ$ es $\sigma(E, E')$-cerrado.

Por otra parte, si A es un subconjunto cerrado y acotado de ${}^t\varphi_1(H)$, se tiene que $({}^t\varphi_1)^{-1}(A)$ es cerrado y acotado en H y, por lo dicho de H, compacto; de esto se deduce que A es compacto.

Puesto que E es Γ^*,

$${}^t\varphi_1(H) \cap E' = \overline{{}^t\varphi_1(H)} \cap E'.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} H \cap (E/M)' &= H \cap (\varphi')^{-1}(E') = H \cap ({}^t\varphi_1)^{-1}(E') = \\ &= ({}^t\varphi_1)^{-1}[{}^t\varphi_1(H) \cap E'] = ({}^t\varphi_1)^{-1}[\overline{{}^t\varphi_1(H)} \cap E'] = \\ &= ({}^t\varphi_1)^{-1}[\overline{{}^t\varphi_1(H)}] \cap (E/M)' = \overline{H} \cap (E/M)', \end{aligned}$$

que claramente prueba la tesis.

30. TEOREMA.—*Sean E un e. l. c. s. y M un subespacio cerrado de E. Entonces:*

30.1. *Si E tiene la propiedad que para cada subespacio H de* E^*_σ*, tal que toda parte cerrada y acotada es compacta, se cumple* $H \cap E' = \overline{H} \cap E'$*, E/M también la tiene y además E es* Γ^*.

30.2. *Si E tiene la propiedad que cada subespacio de* E^*_σ*, tal que toda parte cerrada y acotada es compacta, es cerrado en* E^*_σ*, E/M también la tiene y además E es* Γ^*.

30.3. *Si E tiene una base de Hamel numerable, E es* Γ^*.

DEMOSTRACIÓN.—30.1. La estabilidad por cociente se deduce análogamente como en la demostración del teorema 29. Es obvio que E es Γ^*.

30.2. La estabilidad por cociente se ve de forma análoga que en el teorema 29. Es evidente que la hipótesis de 30.2. implica la de 30.1. y, por consiguiente, E es Γ^*.

30.3. Con una demostración análoga a la del teorema 14.

31. TEOREMA.—*Sean E un espacio* Γ^* *y F un espacio tonelado separado. Entonces, si* f *es una aplicación lineal de un subespacio* E_0 *de E sobre F, cuyo núcleo es cerrado en E,* f *es abierta.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $N = f^{-1}(0)$ cerrado en E por hipótesis. Por el teorema 29, E/N es un espacio Γ^* y también Γ_r^*. Si

$$\bar{f}: E_0/N \longrightarrow F$$

es la biyección asociada a la f, consideremos

$$h = (\bar{f})^{-1}: F \longrightarrow E/N.$$

Por ser h inyectiva, Ker $h = \{0\}$ es cerrado en F que es separado. Por el teorema 15, h es continua y, por tanto $\bar{f}$ y f son abiertas.

32. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. s. que no es* Γ^*. *Entonces existe un espacio tonelado separado y una aplicación lineal* f *de E sobre F cuyo núcleo es cerrado y que no es abierta.*

DEMOSTRACIÓN.—Si E no es un espacio Γ^*, existe un subespacio H de E^*_σ tal que H° es cerrado en E, toda parte cerrada y acotada es compacta y que

$$H \cap E' \neq \bar{H} \cap E'.$$

Sea E_β el espacio E con la topología l. c. fuerte $\beta(E, H)$. Por las condiciones de H, todo conjunto equilibrado, convexo, $\sigma(H, E)$-cerrado y $\sigma(H, E)$ acotado es además $\sigma(H, E)$-compacto y, por tanto, $\beta(E, H)$ es compatible con el par (E, H).

Es inmediato que E es tonelado y, por ser H° un espacio $\beta(E, H)$-cerrado, $F = E_\beta/H°$ es un espacio tonelado separado.

Consideremos como f la sobreyección canónica de E sobre F, cuyo núcleo H° es cerrado en E por hipótesis.

Si f fuese abierta,

$$\bar{f}: E/H^{\circ} \longrightarrow E_{\beta}/H^{\circ}$$

también lo sería y, por consiguiente,

$$(E/H^{\circ})' \subset (E_{\beta}/H^{\circ})'.$$

Ahora bien, si representamos con $\bullet$ la polaridad en (E, E'),

$$(E/H^{\circ})' = (H^{\circ})^{\bullet} = H^{\circ\circ} \cap E' = \bar{H} \cap E'$$

y

$$(E_{\beta}/H^{\circ})' = (H^{\bullet})^{\circ} \cap H = H.$$

Se sigue de la inclusión anterior que $\bar{H} \cap E' \subset H$ y, por tanto,

$$\bar{H} \cap E' \subset H \cap E'$$

que está en contradicción con

$$\bar{H} \cap E' \neq H \cap E'.$$

33. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. s. Entonces son equivalentes:*

33.1. *E es un espacio Γ^*.*

33.2. *Si F es un espacio tonelado separado, toda aplicación lineal de un subespacio E_0 de E sobre F, cuyo núcleo es cerrado en E, es abierta.*

DEMOSTRACIÓN.—Inmediata de los dos teoremas anteriores.

34. COROLARIO.—*Todo espacio Γ^* es Γ.*

DEMOSTRACIÓN.—33.2. es más fuerte que la caracterización de los espacios Γ en la cual las aplicaciones son de gráfica cerrada en $E \times F$ (Valdivia [6]).

35. COROLARIO.—*Sea E un espacio Γ^* y M un subespacio cerrado de E, entonces M es Γ^*.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea F un espacio tonelado separado y f una aplicación lineal de un subespacio M_0 de M sobre F. Si Ker f es cerrado en M también lo será en E y la conclusión se sigue del teorema anterior.

36. Teorema.—*Sea E un e. l. c. s. Entonces son equivalentes:*

36.1. *E es de dimensión finita.*

36.2. *Si F es un e. v. t. s., toda aplicación lineal de E sobre F es abierta.*

36.3. *Si F es un espacio de Mackey separado, toda aplicación lineal biyectiva de E sobre F es abierta.*

Demostración.—36.1. $\Longrightarrow$ 36.2. Es elemental. También como consecuencia del teorema 21.

36.2. $\Longrightarrow$ 36.3. Trivial.

36.3. $\Longrightarrow$ 36.1. Es el teorema 22 con un paso a la aplicación inversa.

Bibliografía

[1] Horvath, J. 1969. *Topological vector spaces and distributions I*. Addison-Wesley.

[2] — — 1973. *Locally convex spaces*. «Lectures Notes in Mathematics», **331**, 41-83. Springer.

[3] Husain, T. 1965. *The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces*. Calderon Press, Oxford.

[4] Valdivia, M. 1968. *El teorema general de la gráfica cerrada en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos*. «Rev. Acad. Ci. Madrid», **62**, 545-551.

[5] — — 1968. *El teorema general de la aplicación abierta en los espacios vectoriales topológicos localmente convexos*. «Rev. Acad. Ci. Madrid», **62**, 553-562.

[6] — — 1971. *Sobre el teorema de la gráfica cerrada*. «Collectanea Mathematica», **22** (1.°), 50-71.

En [2] se encuentra una buena bibliografía.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid