β-INF-SEMIRRETICULOS Y TOPOLOGIAS ASOCIADAS

Ignacio Gracia Rivas

Recibido: 7 enero 1979

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Vamos a tratar en este trabajo de unas estructuras a las que damos el nombre de β-inf-semirretículos.

Un β-inf-semirretículo es un inf-semirretículo completo E dotado de una relación β a la derecha que cumple una serie de condiciones (Definición 1).

Se dan varios ejemplos de conjuntos y relaciones entre sus elementos que satisfacen esas condiciones.

Se estudian asimismo propiedades de los β-inf-semirretículos que se deducen de su definición.

En un β-inf-semirretículo E, se introducen dos topologías, una que llamaremos $\mathcal{T}_\beta$ y es T_0 y otra que llamaremos $\mathcal{T}_\alpha$ y es Hausdorff y más fina que la $\mathcal{T}_\beta$. E_β y E_α serán los espacios topológicos respectivos.

Se estudian propiedades del conjunto de los límites en E_β de una base de filtro en E (Teorema 17) y relaciones entre este conjunto de límites y el límite en E_α. Concretamente, se demuestra (Teorema 20) que el ínfimo del conjunto de los límites en E_β de un ultrafiltro es el límite en E_α. Varios teoremas tratan de la relación entre conjuntos cerrados y acotados y conjuntos compactos en E_α (Teoremas 21, 22, 23 y 25).

Dado un inf-semirretículo E, se define una función real β: $E \times E \longrightarrow R$ llamada semidesviación. A partir de una semidesviación se puede definir en E una relación β a la derecha y, por tanto, dotar a E de una estructura de β-inf-semirretículo. Se caracteriza un sistema fundamental de entornos del espacio E_β por la semidesviación β.

Por medio de la semidesviación se define una nueva función real $\alpha: E \times E \longrightarrow R$ llamada desviación.

α nos permite definir una métrica en E. El espacio métrico correspondiente lo denotamos por (E, α).

Se demuestra (Teorema 36) que los espacios E_α y (E, α) son topológicamente equivalentes.

El resto del trabajo investiga las relaciones entre las topologías $\mathcal{T}_\beta$, $\mathcal{T}_\alpha$ y el orden. Se estudian las relaciones entre los límites de una sucesión en la topología $\mathcal{T}_\beta$ y el límite en la topología $\mathcal{T}_\alpha$ (Teoremas 45, 46 y 47).

El presente trabajo es un resumen del capítulo I de la tesis doctoral [1] titulada «S-sistemas dinámicos abstractos». En dicha tesis se estudian S-sistemas dinámicos topológicos (E, S, Π), es decir, S-sistemas dinámicos donde E es un espacio topológico dotado de una relación de orden. Se obtienen los resultados clásicos de la teoría de sistemas dinámicos en condiciones más generales. En particular, se utilizan espacios E dotados de las topologías $\mathcal{T}_\beta$ y $\mathcal{T}_\alpha$ mencionadas arriba.

B. Rodríguez-Salinas y F. Bombal en [2] utilizan las estructuras estudiadas en este trabajo para obtener teoremas de representación de inf-semirretículos en las partes de un espacio topológico. Con estas técnicas logran teoremas de representación muy generales que comprenden en particular el teorema de compactificación de Wallman y el teorema de representación de Stone para álgebras de Boole.

β-inf-semirretículos

1. Definición.—Sea E un inf-semirretículo completo. Entonces una relación binaria definida en E se llama una *relación beta a la derecha* y se denota por β si satisface las condiciones:

1.1. Para todo $x \in E$, existe $y \in E$ tal que $x \beta y$.

1.2. $x \beta y$ implica $x \leqslant y$.

1.3. Si $x \leqslant y$ e $y \beta z$ se tiene $x \beta z$.

1.4. Si $x \beta y$ y $x \beta z$ se verifica $x \beta (y \wedge z)$.

1.5. Si $x \nleqslant y$ existe $z \in E$ tal que $y \beta z$ y $x \nleqslant z$.

1.6. Si $x = \wedge A$, donde A es una parte no vacía de E, y si $x \beta y$, existe una parte finita y no vacía A_0 de A tal que $(\wedge A_0) \beta y$.

A todo inf-semirretículo completo E, dotado de una relación beta a la derecha le llamaremos β-inf-semirretículo.

2. Definición.—Sea E un sup-semirretículo completo. Entonces una relación binaria definida en E se llama una *relación beta a la izquierda* y se denota por β si satisface las condiciones:

2.1. Para todo $x \in$ E, existe $y \in$ E tal que $y \, \beta \, x$.

2.2. $x \, \beta \, y$ implica $x \leqslant y$.

2.3. Si $x \, \beta \, y$ e $y \leqslant z$ se tiene $x \, \beta \, z$.

2.4. Si $y \, \beta \, x$ y $z \, \beta \, x$ se verifica $(y \vee z) \, \beta \, x$.

2.5. Si $x \not\geqslant y$ existe $z \in$ E tal que $z \, \beta \, y$ y $x \not\geqslant z$.

2.6. Si $x = \vee$ A donde A es una parte no vacía de E, y si $y \, \beta \, x$, existe una parte finita y no vacía A_0 de A tal que $y \, \beta \, (\vee A_0)$.

A todo sup-semirretículo completo E dotado de una relación beta a la izquierda lo llamaremos β-sup-semirretículo.

3. Observación.—Toda relación beta a la izquierda se convierte en una relación beta a la derecha, cambiando $\geqslant$ por $\leqslant$, $\vee$ por $\wedge$ e $y \, \beta \, x$ por $x \, \beta \, y$. Por tanto, nos limitaremos a tratar de los β-inf-semirretículos.

4. Ejemplo.—Sea E un intervalo de **R** abierto a la derecha (resp. a la izquierda); entonces $x < y$ es una relación beta a la derecha en E (resp. a la izquierda), que satisface la siguiente condición:

4.1. Si $x_1 \, \beta \, y_1$ y $x_2 \, \beta \, y_2$, se verifica:

$$(x_1 \wedge x_2) \, \beta \, (y_1 \wedge y_2) \quad \text{y} \quad (x_1 \vee x_2) \, \beta \, (y_1 \vee y_2).$$

5. Ejemplo.—Sea T un espacio localmente compacto separado y sea E = K (T) la colección de todos los subconjuntos compactos de T. Entonces, para la ordenación $\leqslant$ definida por:

$$«x \leqslant y \quad \text{si y sólo si} \quad x \subset y»,$$

E es un retículo completo, con primer elemento **0** (el conjunto vacío), para el que la relación:

$$«x \, \beta \, y \quad \text{si y sólo si } y \text{ es entorno de } x».$$

es una relación beta a la derecha.

Además, se verifican las condiciones 4.1 y 5.1 $\mathbf{0} \, \beta \, \mathbf{0}$.

6. Ejemplo.—Sea T un espacio localmente compacto separado y sea E $= \mathcal{G}$ (T) la colección de todos los subconjuntos abiertos de T. Entonces, para la ordenación $\leqslant$ definida por:

$$«x \leqslant y \quad \text{si y sólo si} \quad x \subset y»,$$

E es un retículo completo, con primer elemento 0 (el conjunto vacío), y último elemento e (el conjunto T), para el que la relación:

$$«x \,\beta\, y \quad \text{si y sólo si la clausura de } x, \bar{x} \text{ es un compacto contenido en } y»$$

es una relación beta a la izquierda. Además, se verifican las condiciones 4.1 y 5.1.

7. Ejemplo.—Sea T un espacio compacto separado, y sea E la colección de las funciones definidas sobre T, finitas, no negativas y semicontinuas superiormente. Entonces, para la ordenación usual «$\leqslant$», E es un retículo completo, con primer elemento 0 (la función nula), para el que, si denotamos por y^0 la mayor función semicontinua inferiormente menor o igual que y, la relación:

$$«x \,\beta\, y \quad \text{si y sólo si} \quad x(t) < y^0(t) \quad \text{para todo} \quad t \in \mathrm{T}»$$

es una relación beta a la derecha.

8. Ejemplo.—Sea T un espacio localmente compacto separado, y sea E $= \mathcal{I}_+$ (T) la colección de las funciones definidas sobre T, no negativas, finitas o infinitas, y semicontinuas inferiormente. Entonces, para la ordenación usual «$\leqslant$», E es un retículo completo, con primer elemento 0 (la función nula), para el que, si denotamos por $\bar{x}$ la menor función semicontinua superiormente mayor o igual que x, la relación:

$$«x \,\beta\, y \quad \text{si y sólo si } \bar{x} \text{ es de soporte } \operatorname{sop} \bar{x} = \{ t \in \mathrm{T} \colon \bar{x}(t) \neq 0 \}^-$$

$$\text{compacto, finita y tal que } \bar{x}(t) < y(t) \quad \text{para todo} \quad t \in \operatorname{sop} \bar{x} \; (= \operatorname{sop} x)»$$

es una relación beta a la izquierda.

9. TEOREMA.—*Si E es un β-inf-semirretículo se verifican las siguientes propiedades:*

9.1. $x = \wedge \{y : x \beta y\}$ *para todo* $x \in E$.

9.2. *Si* $x_i \beta y_i$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i\right) \beta \left(\bigwedge_{i=1}^{n} y_i\right)$$

9.3. *Si* $x \not\beta z$ *existe un* $y \in E$ *tal que* $x \beta y$ *e* $y \not\beta z$.

9.4. *Sea A un subconjunto no vacío de E. Si* $x \beta x$ *y* $x = \wedge A$, *existe una parte finita A_0 de A tal que* $x = \wedge A_0$.

9.5. *Si* $0 \beta 0$ *y* $x \wedge y = 0$, *existe* $x', y' \in E$ *tales que*

$$x \beta x', \quad y \beta y', \quad x' \wedge y' = 0.$$

Topología $\mathcal{T}_\beta$

10. DEFINICIÓN.—Si $x \beta y$, definimos

$$V_y(x) = \{ z : z \leq y \},$$

de forma que cuando se escriba $V_y(x)$ se verificará automáticamente $x \beta y$.

11. TEOREMA.—*Los $V_y(x)$ constituyen un sistema fundamental de entornos de cada $x \in E$ para una topología $\mathcal{T}_\beta$ que es T_0. Denotaremos por E_β el espacio topológico $(E, \mathcal{T}_\beta)$ y por $\mathcal{V}_x^\beta$ el conjunto de los entornos de x en E_β.*

12. TEOREMA.—*La colección de los conjuntos*

$$G_x = \{ y : y \beta x \}$$

es una base de la topología. Además todo

$$G''_x = \{ y : y \not\geq x \}$$

es abierto, y todo

$$F'_x = \{ y : y \geq x \}$$

es cerrado en $\mathcal{T}_\beta$.

Topología $\mathcal{T}_\alpha$

13. Definición.—De forma análoga que en la recta real **R**, definiremos los siguientes intervalos:

$$(x_1, x_2) = \{ x : x \nleqslant x_1 , x \,\beta\, x_2 \}$$
$$(x_1, x_2] = \{ x : x \nleqslant x_1 , x \leqq x_2 \}$$
$$[x_1, x_2) = \{ x : x \geqq x_1 , x \,\beta\, x_2 \}$$
$$[x_1, x_2] = \{ x : x \geqq x_1 , x \leqq x_2 \} .$$

14. Teorema.—*Los conjuntos de la forma:*

$$\mathcal{V}_x = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} (x_i', x_i'') : x \in (x_i, x_i'') \right\}$$

para $x \neq 0$, *y*

$$\mathcal{V}_x = \{ [0, x'') : 0 \,\beta\, x'' \}$$

para $x = 0$ *cuando E tenga primer elemento, constituyen un sistema fundamental de entornos para una topología* $\mathcal{T}_\alpha$, *que es de Hausdorff y más fina que la topología* $\mathcal{T}_\beta$. *Denotaremos por* E_α *el espacio topológico* $(E, \mathcal{T}_\alpha)$ *y por* $\mathcal{V}_x^\alpha$ *el conjunto de los entornos de* x *en* E_α.

15. Teorema.—*La colección de los conjuntos*

$$G_x = \{ y : y \,\beta\, x \} \qquad y \qquad G_x' = \{ y : y \nleqslant x \}$$

constituye una sub-base de la topología $\mathcal{T}_\alpha$.

16. Corolario.—*La topología* $\mathcal{T}_\alpha$ *es la menos fina de las topologías* $\mathcal{T} \succ \mathcal{T}_\beta$ *para las cuales los conjuntos*

$$G_x' = \{ y : y \nleqslant x \}$$

son abiertos y los

$$F_x'' = \{ y : y \leqq x \}$$

son cerrados.

En E_α *los intervalos* (x', x'') *son abiertos y los* $[x', x'']$ *cerrados.*

17. TEOREMA.—*Sea* $\mathcal{B}$ *una base de filtro en E. Entonces el conjunto de los límites de* $\mathcal{B}$ *en* E_β

$$L = L(\mathcal{B}) = \{ \lim \mathcal{B} \}$$

es no vacío si y sólo si existe algún $B \in \mathcal{B}$ *acotado superiormente. Además,* $L(\mathcal{B})$ *tiene un mínimo si y sólo si* $L(\mathcal{B})$ *es no vacío y acotado inferiormente.*

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que a es una cota superior de algún $B \in \mathcal{B}$. Entonces, para todo $V_y(a)$ se verifica que $B \subset V_y(a)$ porque si $b \leqslant a$ y $a \beta y$, por 1.3, se tiene $b \beta y$, y por 1.2, $b \leqslant y$. Luego

$$a = \lim \mathcal{B} \quad \text{y} \quad a \in L.$$

Recíprocamente, si $x = \lim \mathcal{B}$, para todo $V_y(x)$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V_y(x)$ y, por tanto, existe algún B acotado superiormente.

Finalmente, si $L(\mathcal{B})$ es no vacío y acotado inferiormente, existe $a = \wedge L$ y si

$$L_\beta = L_\beta(\mathcal{B}) = \{ y : \exists\, x \in L,\ x \beta y \}$$

por ser, según 9.1,

$$x = \wedge \{ y : x \beta y \}$$

resulta $a = \wedge L_\beta$.

Bastará probar ahora que $a = \lim \mathcal{B}$. En efecto, para todo $V_z(a)$ existe, por 1.6, una parte finita $(y_i)_1^n$ de L_β tal que

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} y_i \right) \beta z.$$

Ahora bien, como para cada $y_i \in L_\beta$ se puede encontrar un $x_i \in L$ que satisface $x_i \beta y_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$, existe un $B_i \in \mathcal{B}$ tal que

$$B_i \subset V_{y_i}(x_i).$$

Por ser $\mathcal{B}$ una base de filtro, hay un $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$B \subset \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}(x_i)$$

y, por tanto,

$$B \leq \bigwedge_{i=1}^{n} y_i \quad \text{y} \quad B \subset V_z(a).$$

El recíproco es evidente.

18. Observación.—Dada una base de filtro $\mathcal{B}$ en E, sea M ($\mathcal{B}$) el conjunto de todas las cotas superiores de los $B \in \mathcal{B}$. Entonces

$$L_\beta(\mathcal{B}) \subset M(\mathcal{B}) \subset L(\mathcal{B})$$

y, por tanto,

$$\bigwedge L_\beta(\mathcal{B}) = \bigwedge M(\mathcal{B}) = \bigwedge L(\mathcal{B})$$

en el sentido de que si existe uno de ellos existen los demás y se verifica la igualdad.

19. Definición.—Dada una base de filtro $\mathcal{B}$ en E, si existe $\bigwedge L(\mathcal{B})$, llamaremos *límite inferior* de $\mathcal{B}$ en E, y lo denotaremos por

$$\underline{\lim}\ \mathcal{B}$$

a $\bigwedge L(\mathcal{B})$.

El límite de $\mathcal{B}$ en E_α, si existe lo denotaremos por

$$\mathrm{Lim}\ \mathcal{B}$$

20. Teorema.—*Para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ en E se tiene*

$$\underline{\lim}\ \mathcal{U} = \mathrm{Lim}\ \mathcal{U}$$

siempre que exista uno de ellos.

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$x \neq 0 \quad \text{y} \quad x = \underline{\lim}\ \mathcal{U}.$$

Supongamos $x \in (x', x'')$. Entonces,

$$x \not\leq x' \quad \text{y} \quad x' \notin \mathrm{M}(\mathcal{U}),$$

porque si $x' \in \mathrm{M}(\mathcal{U})$, sería

$$x' = \lim \mathcal{U} \quad \text{y} \quad x \leq x'.$$

Por consiguiente

$$\{y : y \leq x'\} \notin \mathcal{U}$$

y como

$$\{y : y \leq x'\} \cup \{y : y \not\leq x'\} = \mathrm{E} \in \mathcal{U}$$

se tiene

$$\mathrm{G}'_{x'} = \{y : y \not\leq x'\} \in \mathcal{U}.$$

Por otra parte,

$$\mathrm{G}_{x''} = \{y : y\, \beta\, x''\} \in \mathcal{U}$$

por ser un entorno abierto de x en $\mathcal{T}_\beta$. Por tanto,

$$(x', x'') = \mathrm{G}'_{x'} \cap \mathrm{G}_{x''} \in \mathcal{U}$$

de donde se deduce que todo entorno de x en $\mathcal{T}_\alpha$ pertenece a $\mathcal{U}$ y

$$x = \mathrm{Lim}\ \mathcal{U}.$$

Recíprocamente, sea

$$x \neq 0 \quad \text{y} \quad x = \mathrm{Lim}\ \mathcal{U}.$$

Entonces, como $\mathcal{T}_\alpha$ es más fina que $\mathcal{T}_\beta$ se tiene

$$x = \lim \mathcal{U}.$$

Además

$$x = \underline{\lim} \mathcal{U}.$$

En efecto, si $y \not\geq x$, por 1.5, existe un $z \in$ E tal que $y \beta z$ y $z \not\geq x$, luego

$$x \in G'_z = \{ u : u \not\leq z \} .$$

Por ser G'_z un entorno abierto de x en $\mathcal{T}_\alpha$ pertenece a $\mathcal{U}$,

$$V_z(y) = \{ u : u \leq z \} \notin \mathcal{U}$$

y, por tanto,

$$y \notin L(\mathcal{U}).$$

Estudiemos ahora el caso $x = 0$.

Si

$$0 = \underline{\lim} \mathcal{U},$$

los conjuntos

$$G_{x''} = \{ y : y \beta x'' \}$$

para $0 \beta x''$, pertenecen a $\mathcal{U}$ por ser entornos de 0 en E_β. Entonces como los $G_{x''}$ forman una base de entornos de 0 en E_α,

$$0 = \text{Lim } \mathcal{U}.$$

Recíprocamente, si

$$0 = \text{Lim } \mathcal{U}$$

como $\mathcal{T}_\alpha$ es más fina que $\mathcal{T}_\beta$,

$$0 = \lim \mathcal{U}$$

y, evidentemente,

$$0 = \underline{\lim}\ \mathcal{U}.$$

21. TEOREMA.—*Los conjuntos cerrados y acotados en E_α son compactos.*

DEMOSTRACIÓN.—Será suficiente probar que, si A es un conjunto cerrado y acotado en E_α y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en A, es decir, $A \in \mathcal{U}$, entonces converge a un punto $x \in A$. Por ser A acotado superiormente, por el teorema 17 el conjunto $L(\mathcal{U})$ de los límites de $\mathcal{U}$ en E_β es no vacío. Si a es una cota inferior de A, como para todo $U \in \mathcal{U}$ hay algún $u \in A \cap U\ (\neq \varnothing)$ se tiene $a \leqslant u \leqslant x$ para cada cota superior x de U y, por tanto, a es una cota inferior de $M(\mathcal{U})$ y $L(\mathcal{U})$.

Por los teoremas 17 y 20 existen los límites $\underline{\lim}\ \mathcal{U}$ y $\mathrm{Lim}\ \mathcal{U}$, y $\mathrm{Lim}\ \mathcal{U} \in A$ por ser A cerrado en E_α.

22. TEOREMA.—*Si todo punto $x \in E$ posee un entorno $V \in \mathcal{V}_x^\alpha$ acotado inferiormente, entonces el espacio E_α es localmente compacto y todo conjunto compacto en E_α es cerrado y acotado inferiormente.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $x \in E$ y sea $V \in \mathcal{V}_x^\alpha$ acotado inferiormente por a. Por 1.1, existe un $b \in E$ tal que $x \beta b$, luego $x \in [a, b] \in \mathcal{V}_x^\alpha$ que por el teorema 21 es compacto, pues es acotado y, por el corolario 16, es cerrado. Por consiguiente, E_α es localmente compacto.

Por ser E_α de Hausdorff todo compacto K es cerrado. Veamos que además es acotado inferiormente. En efecto, como cada $x \in E_\alpha$ posee un entorno acotado inferiormente y K es compacto, existe un cubrimiento finito

$$\{ A_i : 1 \leq i \leq n \}$$

de K formado por conjuntos acotados inferiormente. Si a_i es una cota inferior de A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$,

$$a = \bigwedge_{i=1}^{n} a_i$$

es, evidentemente, una cota inferior de K.

23. Teorema.—*Si E es filtrante superiormente y todo* $x \in E$ *posee un entorno* $V \in \mathcal{V}_x^{\alpha}$ *acotado inferiormente, los conjuntos compactos en* E_α *son los cerrados y acotados.*

24. Observación.—Todo inf-semirretículo completo filtrante superiormente es un retículo completo.

25. Teorema.—*Si E es un retículo completo y* $a \in E$ *los subconjuntos compactos (en* E_α*) de*

$$F'_a = \{ x : x \geq a \}$$

son los cerrados y acotados. En particular, si E tiene primer elemento, para $a = 0$ *resulta que los conjuntos compactos de* E_α *son los cerrados y acotados.*

Espacios (E, β)

26. Definición.—Dado un inf-semirretículo E, se llama *semi-desviación* a una función real β definida sobre E × E con las propiedades:

26.1. $0 \leqslant \beta(x, y) \leqslant \infty$ para todo $(x, y) \in E \times E$.

26.2. $\beta(x, y) = 0$ si y sólo si $x \leqslant y$.

26.3. $\beta(x, z) \leqslant \beta(x, y) + \beta(y, z)$ cualesquiera que sean los elementos x, y, z de E.

26.4. Para todo $x \in E$ y todo $r > 0$, existe un elemento de E, que denotaremos siempre por x_r, tal que

$$\beta(y, x) \leqslant r \quad \text{si y sólo si} \quad y \leqslant x_r.$$

26.5. Si $x = \wedge A$, para toda $r > 0$ existe una parte finita A_0 de A que satisface

$$\beta(\wedge A_0, x) \leqq r$$

26.6. Para todo $x \in E$ y todo $r > 0$ existe un número finito n de elementos $x'_i \geqslant x$ de E ($1 \leqslant i \leqslant n$) tales que

$$\beta(x, y) \leq r \quad \text{y} \quad \beta(y, x) \leq r$$

cuando $y \nleqslant x'_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ e $y \leqslant x_r$.

El valor $\beta(x, y)$ se llama *semi-desviación de* x *respecto de* y.

Denotaremos por (E, β) al inf-semirretículo E dotado de la semi-desviación β.

27. EJEMPLO.—Sea E la recta real R o la semirrecta R_+. Entonces

$$\beta(x, y) = (x - y)^+$$

es una semi-desviación sobre E.

28. EJEMPLO.—Sea T un espacio con la distancia δ y con la propiedad de que los subconjuntos cerrados y acotados son compactos y, por tanto, localmente compacto. Sea E = K (T) la colección de los subconjuntos compactos de T. Entonces, la función real β definida sobre E × E por:

1. $\beta(0, y) = 0$ para todo $y \in E$ ($0 = \varnothing$).
2. $\beta(x, 0) = \infty$ para todo $x \neq 0$.
3. Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$,

$$\beta(x, y) = \sup_{p \in x} \inf_{q \in y} \delta(p, q) = \sup_{p \in x} \delta(p, y) = \max_{p \in x} \delta(p, y)$$

es una semi-desviación sobre E.

29. *Sea E un inf-semirretículo y sea β una semi-desviación definida sobre E. Si* x, y $\in$ *E y* x $\leqslant$ y *se verifica:*

$$\beta(x, z) \leq \beta(y, z) \quad y \quad \beta(z, x) \geq \beta(z, y).$$

30. TEOREMA.—*Sea E un inf-semirretículo y sea β una semi-desviación definida sobre E. Si* x, y $\in$ *E se verifica:*

30.1. $x \leqslant x_r$ *para todo* $r \geqslant 0$.

30.2. $x \leqslant y$ *implica* $x_r \leqslant y_r$ *para todo* $r \geqslant 0$.

30.3. $(x_r)_s \leqslant x_{r+s}$ *para todo* $r, s \geqslant 0$.

31. Teorema.—*Sea E un inf-semirretículo y* β *una semi-desviación sobre E. Entonces, si se define:*

$$«x \,\beta\, y \quad \text{si y sólo si existe un} \quad r > 0 \quad \text{tal que} \quad x_r \leqslant y»,$$

E es un β*-inf-semirretículo para el que los conjuntos*

$$V_r(x) = \{ y \in E : \beta(y, x) \leq r \} \qquad (r > 0)$$

constituyen un sistema fundamental de entornos de x *en* E_β.

32. Observación.—Para el espacio E = K (T) del ejemplo 28 la relación β definida en el teorema 31 coincide con la relación β del ejemplo 5.

Espacios (E, α)

33. Definición.—En (E, β) llamaremos *desviación* a la función real α definida sobre E × E por

$$\alpha(x, y) = \max \{ \beta(x, y), \beta(y, x) \} .$$

El valor $\alpha(x, y)$ se llama *desviación de* x *e* y.

34. Teorema.—*Si* α *es una desviación sobre E y* x, y, z $\in$ *E se verifica:*

34.1. $0 \leqslant \alpha(x, y) \leqslant \infty$.

34.2. $\alpha(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

34.3. $\alpha(x, y) = \alpha(y, x)$.

34.4. $\alpha(x, z) \leqslant \alpha(x, y) + \alpha(y, z)$.

35. Corolario.—*E es un espacio métrico para la distancia* ρ *definida por:*

$$\rho(x, y) = \frac{\alpha(x, y)}{1 + \alpha(x, y)} \quad \textit{cuando} \quad \alpha(x, y) \neq \infty$$

y

$$\rho(x, y) = 1 \quad \textit{cuando} \quad \alpha(x, y) = \infty$$

En este espacio métrico que denotaremos por (E, α) *las «bolas»*

$$B_r^{\alpha}(x) = \{ y : \alpha(x, y) \leq r \} \qquad (r > 0)$$

constituyen un sistema fundamental de entornos de cada $x \in E$.

36. TEOREMA.—*Los espacios* E_α *y* (E, α) *son topológicamente equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN.—Por 26.6, para todo $x \in E$ y todo $r > 0$ existe un número finito n de elementos $x'_i \ngtr x$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tales que

$$\alpha(x, y) = \max \{ \beta(x, y), \beta(y, x) \} \leqq r$$

cuando $y \nless x'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ e $y \leqslant x_r$, es decir, toda bola $B_r^{\alpha}(x)$ contiene una intersección finita

$$\bigcap_{i=1}^{n} (x'_i, x_r)$$

puesto que

$$y \nless x'_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad \text{e} \quad y \leq x_r \quad \text{si} \quad y \in \bigcap_{i=1}^{n} (x'_i, x_r).$$

Recíprocamente, dado un entorno (x', x'') de x, existe una bola $B_r^{\alpha}(x)$ contenida en (x', x'').

En efecto, por ser $x \,\beta\, x$ existe un $s > 0$ tal que $x_s \leqslant x''$. Sea r un número real que verifique

$$0 < r < s \quad \text{y} \quad 0 < r < \beta(x, x').$$

Entonces

$$B_r^{\alpha}(x) \subset (x', x'')$$

porque si $y \in B_r^{\alpha}(x)$ se tiene $\beta(y, x) \leqslant r$, luego por 26.4, $y \leqslant x_r$ y, si $t = s - r\,(> 0)$, por 30.2 y 30.3 resulta

$$y_t \leq (x_r)_t \leq x_s \leq x''$$

y, por tanto, $y \,\beta\, x''$.

Además $y \nleq x'$ ya que si fuese $y \leq x'$, como $\beta(x, y) \leq r$, se tendría

$$\beta(x, x') \leq \beta(x, y) + \beta(y, x') = \beta(x, y) \leq r$$

lo que contradice la elección de r.

Relaciones entre las topologías $\mathcal{T}_\beta$, $\mathcal{T}_\alpha$ y el orden

37. TEOREMA.—*Si E tiene primer elemento, todo conjunto A cerrado y acotado para el orden de (E, α) o para la desviación α: $\alpha(x_0, x) \leq r$ para algún $x_0 \in E$ y $r > 0$ y para todo $x \in A$ es compacto. Recíprocamente, si además E es un retículo completo los compactos de (E, α) son los cerrados y acotados para la desviación α.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta tener en cuenta los teoremas 36, 21 y 25.

38. COROLARIO.—*Si E tiene primer elemento el espacio (E, α) es localmente compacto y completo.*

39. TEOREMA.—*Sea E un β-inf-semirretículo y sean (x_n), (y_n) dos sucesiones de elementos de E. Si*

$$\operatorname*{Lim}_n x_n = x \quad y \quad \operatorname*{Lim}_n y_n = y \quad (en\ \mathcal{T}_\alpha) \quad y \quad x_n \leq y_n,$$

se tiene $x \leq y$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$V_z(y) \in \mathcal{V}_y^\alpha .$$

Como $\operatorname*{Lim}_n y_n = y$, existe un $n_0 \in N$ tal que $y_n \in V_z(y)$ para todo $n \geq n_0$, luego

$$x_n \leq y_n \leq z$$

para todo $n \geq n_0$ y

$$x = \operatorname{Lim} x_n \leq z$$

para todo z tal que $y \beta z$, y, por tanto,

$$x \leq \inf \{ z : y \beta z \} = y$$

40. TEOREMA.—*Sea E un* β*-inf-semirretículo. Si* $\lim x_n = x$ *(en* $\mathcal{T}_\beta$*) y* $x \leqslant y$, $\lim x_n = y$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $V_z(y)$. Por 1.3, $x \beta z$, luego existe un n_0 tal que $x_n \in V_z(x)$ para todo $n \geqslant n_0$. Pero $V_z(x) = V_z(y)$ y, por tanto, $\lim x_n = y$.

41. COROLARIO.—*Sea F un cerrado en* E_β. *Si* $x \in F$ *y* $x \leqslant y$, *entonces* $y \in F$.

42. COROLARIO.—*Sea G un abierto en* E_β. *Si* $x \in G$ *e* $y \leqslant x$, *entonces* $y \in G$.

43. COROLARIO.—*Si E es filtrante superiormente, todo cerrado no vacío F en* E_β *es compacto si y sólo si E tiene último elemento.*

44. COROLARIO.—*Si H es un subconjunto de E tal que existe* $x = \max H$, *entonces H es compacto.*

45. TEOREMA.—*Sea E un* β*-inf-semirretículo y sea* (x_n) *una sucesión de elementos de E tal que*

$$\mathit{Lim}\; x_n = x \quad (\text{en } \mathcal{T}_\alpha) \quad y \quad \mathit{lim}\; x_n = y \quad (\text{en } \mathcal{T}_\beta)$$

entonces $x \leqslant y$.

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos $x \nleqslant y$; por 1.5, existe un $z \in E$, tal que $y \beta z$ y $x \nleqslant z$ y, como $\lim x_n = y$, existe un $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $x_n \in V_z(y)$ para todo $n \geqslant n_0$ y $x \notin V_z(y)$, lo que contradice el hecho de que $V_z(y)$ es cerrado en $\mathcal{T}_\alpha$ y $\mathrm{Lim}\, x_n = x$.

46. TEOREMA.—*Sea E un* β*-inf-semirretículo y sea* (x_n) *una sucesión de elementos de E. Si* (x_n) *es convergente en* E_α, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $x \in E$ *es minimal respecto de la propiedad* $\lim x_n = x$.

(ii) $x \in E$ *verifica* $\mathit{Lim}\; x_n = x$.

Demostración. — Si x es minimal respecto a la propiedad $\lim x_n = x$, y

$$\operatorname{Lim} x_n = y \neq x,$$

también $\lim x_n = y \nleq x$, lo que contradice el teorema 45.

Recíprocamente, si $\operatorname{Lim} x_n = x$, $\lim x_n = x$ y además x es minimal puesto que la existencia de $y \in E$ tal que $\lim x_n = y < x$ contradice el teorema 45.

57. Teorema.—*Sea E un* β*-inf-semirretículo y sea* (x_n) *una sucesión acotada de elementos de E tal que*

$$\lim x_n = y.$$

Si en E_α *vale el primer axioma de numerabilidad, entonces existe una subsucesión* (x'_n) *de* (x_n) *tal que*

$$\operatorname{Lim} x'_n = x \quad y \quad x \leq y.$$

Demostración.—Por ser (x_n) una sucesión acotada, tiene al menos un punto de aglomeración en E_α, sea éste x. Como en E_α se verifica el primer axioma de numerabilidad, existe una subsucesión (x'_n) de (x_n) tal que

$$\operatorname{Lim} x'_n = x \quad \text{y} \quad \lim x'_n = y.$$

Por el teorema 45, $x \leqslant y$.

48. Observación.—Como toda sucesión convergente en E_β es acotada superiormente, si E tiene primer elemento 0, entonces de $\lim x_n = y$ se sigue que (x_n) es acotada.

49. Teorema.—*Sea E un* β*-inf-semirretículo con primer elemento. Entonces, un subconjunto de E, cerrado en (E,* α*), es compacto en (E,* β*) si y sólo si es compacto en (E,* α*).*

Demostración.—Si un subconjunto de E es compacto en (E, α), también lo es en (E, β) por ser $\mathcal{T}_\alpha$ más fina que $\mathcal{T}_\beta$. El recíproco se deduce del teorema 47 y de que (E, α) es un espacio métrico.

Bibliografía

[1] Gracia Rivas, I. 1974. *S-sistemas dinámicos abstractos.* Tesis doctoral, Madrid.

[2] Rodríguez-Salinas, B. y Bombal, F. 1975. *Representación de inf-semirretículos en las partes de un espacio topológico.* «Collec. Math.», **26**, 67-94.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid