CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE MEDIDAS DE CONJUNTOS RIEMANN-INTEGRABLES

Pedro Jiménez Guerra

Recibido: 8 noviembre 1978

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Introducción

En este trabajo damos unos criterios para la convergencia de redes de la forma $(\mu_i(Y))_{i \in I}$ siendo $(\mu_i)_{i \in I}$ una red de medidas de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ sobre un espacio topológico arbitrario E, que converge a una medida $\mu \in M(E; \mathcal{H})$, e Y un subconjunto μ-Riemann-integrable del espacio E. Estos criterios dependen del tipo de convergencia que se tome en $M(E; \mathcal{H})$.

El criterio de convergencia que damos cuando en el espacio $M(E; \mathcal{H})$ se considera la topología débil, constituye, en un elevado número de espacios E, una extensión del correspondiente criterio para medidas de Radon finitas, dado por L. Schwartz en [4] que resulta del teorema dado por B. Maurey en [2].

Criterios de convergencia

Sea E un espacio topológico arbitrario (no necesariamente T_2) y $\mathcal{H}$ una clase filtrante $(\subset)$ de conjuntos cerrados de E, denotamos por $M(E; \mathcal{H})$ al conjunto de las medidas de Radon de tipo $\mathcal{H}$ sobre E. Para toda medida $\mu \in M(E; \mathcal{H})$ representamos por μ^* a la medida exterior sobre E asociada a μ (ver el teorema 73 de [3]).

1. DEFINICIÓN.—Sea $(\mu_i)_{i \in I}$ una red de medidas de Radon de

tipo $(\mathcal{H})$ sobre E, se dice que un conjunto $X \subset E$ es $(\mu_i)_{i \in I}$-*regular* cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $H \in \mathcal{H}$ tal que

$$\overline{\lim}\, \mu_i^{\bullet} (X - H) < \varepsilon.$$

Un conjunto $Y \subset E$ se dice que es μ-*Riemann-integrable* cuando su frontera es un conjunto de medida nula respecto a μ, lo cual es equivalente a que la función característica $\mathcal{X}_Y$ sea μ-Riemann-integrable.

2. Definición.—Una red $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E; \mathcal{H})$ *converge simplemente sobre cada* $H \in \mathcal{H}$ a $\mu \in M(E; \mathcal{H})$, lo que denotamos por $\mu_i \xrightarrow{s(\mathcal{H})} \mu$, si y sólo si $\mu_{iH} \xrightarrow{s} \mu_H$ para todo $H \in \mathcal{H}$, siendo μ_{iH} y μ_H las medidas de Radon de tipo

$$\mathcal{H} = \{H' \subset H : H' \in \mathcal{H}\}$$

inducidas en H por μ_i y μ respectivamente.

Si $(\mu_i)_{i \in I}$ es una red en $M(E; \mathcal{H})$ que converge simplemente a una medida $\mu \in M(E; \mathcal{H})$ diremos que la red $(\mu_i)_{i \in I}$ es s-convergente a μ y lo denotaremos por $\mu_i \xrightarrow{s} \mu$. Análogamente, si la red converge débilmente a μ diremos que es w-convergente a μ y lo denotaremos por $\mu_i \xrightarrow{w} \mu$.

En [1] hemos estudiado la relación existente entre los tipos de convergencia anteriores.

3. Proposición.—*Sea* $(\mu_i)_{i \in I}$ *una red en* $M(E; \mathcal{H})$ *que es* $s(\mathcal{H})$*-convergente a una medida de Radon* μ *de tipo* $(\mathcal{H})$ *sobre* E, *entonces para todo* $Y \subset E$ μ*-Riemann-integrable se tiene que*

$$\lim_i \mu_i^{\bullet} (Y \cap H) = \mu^{\bullet} (Y \cap H) \tag{3.1}$$

para todo $H \in \mathcal{H}$.

Demostración.—Como

$$Y = \overset{\circ}{Y} \cup (Y \cap \partial Y) \quad \text{y} \quad \mu^{\bullet} (Y \cap \partial Y) \leq \mu^{\bullet} (\partial Y) = 0,$$

se tiene que Y es μ-medible y, por consiguiente, de la proposición 5 de [1] resulta (3.1) para todo $H \in \mathcal{H}$.

4. PROPOSICIÓN.—*Sea* $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E; \mathcal{H})$ *y* μ *una medida de Radon de tipo* $(\mathcal{H})$ *sobre* E *tales que* $\mu_i \xrightarrow{s(\mathcal{H})} \mu$. *Entonces, para todo* $Y \subset E$ μ*-Riemann-integrable, son equivalentes:*

4.1. *Si* $\mu^{\bullet}(Y) < +\infty$ *entonces* Y *es* $(\mu_i)_{i \in I}$*-regular.*

4.2. $\lim \mu^{\bullet}_i(Y) = \mu^{\bullet}(Y)$.

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que se verifica 4.1. Del teorema 74 de [3] y de la proposición 3, resulta que

$$\begin{aligned}\mu^{\bullet}(Y) &= \sup \{\mu^{\bullet}(Y \cap H) : H \in \mathcal{H}\} \\ &= \sup \{\lim \mu^{\bullet}_i (Y \cap H); H \in \mathcal{H}\} \\ &\leq \underline{\lim}_i \, \mu^{\bullet}_i (Y).\end{aligned}$$

Por tanto, si $\mu^{\bullet}(Y) = +\infty$ entonces

$$\lim_i \mu^{\bullet}_i (Y) = +\infty = \mu^{\bullet}(Y).$$

Si $\mu(Y) < +\infty$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $H \in \mathcal{H}$ tal que

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_i \, \mu^{\bullet}_i (Y) &\leq \lim_i \mu^{\bullet}_i (Y \cap H) + \overline{\lim}_i \, \mu^{\bullet}_i (Y - H) \\ &\leq \mu^{\bullet}(Y \cap H) + \varepsilon \\ &\leq \mu^{\bullet}(Y) + \varepsilon\end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$\overline{\lim}_i \, \mu^{\bullet}_i (Y) \leq \mu^{\bullet}(Y),$$

de donde como anteriormente hemos probado que

$$\mu^{\bullet}(Y) \leq \underline{\lim}_i \, \mu^{\bullet}_i (Y),$$

resulta 4.2.

Recíprocamente, supongamos que se tiene 4.2 y que $\mu^{\bullet}(Y) < +\infty$, entonces del teorema 74 de [3] resulta que para todo $\varepsilon > 0$ existe

$H \in \mathcal{H}$ tal que $\mu^{\bullet}(Y - H) < \varepsilon$ y, por tanto, de la proposición 3 se deduce que

$$\begin{aligned}\overline{\lim_i}\, \mu_i^{\bullet}(Y - H) &= \overline{\lim_i}\,(\mu_i^{\bullet}(Y) - \mu_i^{\bullet}(Y \cap H)) \\ &= \lim_i \mu_i^{\bullet}(Y) - \lim_i \mu_i^{\bullet}(Y \cap H) \\ &= \mu^{\bullet}(Y) - \mu^{\bullet}(Y \cap H) \\ &= \mu^{\bullet}(Y - H) \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

y, por consiguiente, Y es $(\mu_i)_{i \in I}$-regular y se tiene 4.1.

5. Proposición.—*Si $(\mu_i)_{i \in I}$ es una red en $M(E; \mathcal{H})$ que es* s-*convergente a $\mu \in M(E; \mathcal{H})$, entonces para todo conjunto $Y \subset E$ μ-Riemann-integrable se tiene que*

$$\lim_i \mu_i^{\bullet}(Y) = \mu^{\bullet}(Y). \tag{5.1}$$

Demostración.—De la proposición 8 de [1] resulta que $\mu_i \xrightarrow{s(\mathcal{H})} \mu$ y que si $\mu^{\bullet}(Y) < +\infty$ entonces $\overline{Y}$ es $(\mu_i)_{i \in I}$-regular, puesto que

$$\begin{aligned}\mu(\overline{Y}) &= \mu(\overset{\circ}{Y}) + \mu(\partial Y) \\ &= \mu(\overset{\circ}{Y}) \\ &\leq \mu^{\bullet}(Y) \\ &< +\infty .\end{aligned}$$

Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $H \in \mathcal{H}$ tal que

$$\begin{aligned}\overline{\lim_i}\, \mu_i^{\bullet}(Y - H) &\leq \lim_i \mu_i^{\bullet}(\overline{Y} - H) \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

y el conjunto Y es $(\mu_i)_{i \in I}$-regular y se verifica 4.1. Por consiguiente, de la proposición 4 se deduce que se verifica (5.1).

6. Proposición.—*Sea $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E; \mathcal{H})$ una red* w-*convergente a una medida finita μ de Radon de tipo $(\mathcal{H})$ sobre E, entonces*

$$\lim \mu_i^{\bullet}(Y) = \mu^{\bullet}(Y), \tag{6.1}$$

para todo conjunto $Y \subset E$ μ-Riemann-integrable.

DEMOSTRACIÓN.—En efecto, de la observación 6 de [1] se deduce que

$$\begin{aligned} \mu(\overset{\circ}{Y}) &\leq \underline{\lim}_{i}\, \mu_i^{\cdot}(\overset{\circ}{Y}) \\ &\leq \underline{\lim}_{i}\, \mu_i^{\cdot}(Y) \\ &\leq \overline{\lim}_{i}\, \mu_i^{\cdot}(Y) \\ &\leq \overline{\lim}_{i}\, \mu_i^{\cdot}(\overline{Y}) \\ &\leq \mu(\overline{Y}) \end{aligned}$$

de donde, resulta (6.1) ya que por ser Y μ-Riemann-integrable se tiene que

$$\mu(\overset{\circ}{Y}) = \mu(Y) = \mu(\overline{Y}).$$

7. OBSERVACIÓN.—*Nótese que de las proposiciones 4 y 5 resulta inmediatamente que si la red* $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E; \mathcal{H})$ *es* s-*convergente a* $\mu \in M(E; \mathcal{H})$, *entonces todo subconjunto* $Y \subset E$ μ-*Riemann-integrable de medida* $\mu^{\cdot}(Y) < +\infty$, *es* $(\mu_i)_{i \in I}$-*regular, puesto que si* $\mu_i \xrightarrow{s} \mu$ *entonces* $\mu_i \xrightarrow{s(\mathcal{H})} \mu$.

Si $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E; \mathcal{H})$ *es tal que* $\mu_i \xrightarrow{w} \mu$, *siendo* μ *una medida de Radon de tipo* $(\mathcal{H})$ *sobre E (no necesariamente finita), entonces (6.1) se verifica trivialmente para todos los conjuntos* $Y \subset E$ μ-*Riemann-integrable tales que* $\mu^{\cdot}(Y) = +\infty$.

Para aquellos espacios topológicos E tales que la convergencia estrecha implique la convergencia débil en $M(E; \mathcal{H})$, *la proposición 6 extiende al criterio de convergencia dado por L. Schwartz en* [4] *(que se deduce del teorema dado por Maurey en* [2]*) para medidas de Radon finitas y conjuntos Riemann-integrables (respecto a la medida límite de la red correspondiente) que son medibles respecto a todas las medidas de la red que se considera.*

Nótese que en muchos tipos de espacios (por ejemplo si E es un espacio Polaco) una red $(\mu_i)_{i \in I} \subset M(E; \mathcal{H})$ *de medidas finitas, es* w-*convergente a una medida finita* $\mu \in M(E; \mathcal{H})$ *si y sólo si* $\mu_i(f) \longrightarrow \mu(f)$ *para toda función real continua acotada, lo cual equivale, si E es completamente regular, a que la red* $(\mu_i)_{i \in I}$ *converja estrechamente a* μ.

Referencias

[1] JIMÉNEZ GUERRA, P. 1978. *Compactness in the space of Radon measures of type ($\mathcal{H}$).* «Proc. R. Irish Acad.», 78 a 21, 199-216.
[2] MAUREY, B. 1970. *Une propieté de la convergence étroite.* «C. R. Acad. Sci. Paris», Sér. A, **270**, 448-451.
[3] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. y JIMÉNEZ GUERRA, P. 1979. *Medidas de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) en espacios topológicos arbitrarios.* Mem. R. Acad. Ci. Madrid», 12.
[4] SCHWARTZ, L. 1973. *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.* Oxford University Press.
[5] TOPSØE, F. 1970. *Topology and measure.* «Lect. Notes in Math.», **133**.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense
Ciudad Universitaria
Madrid-3, ESPAÑA (SPAIN)