SOBRE EL ESPACIO $\mathcal{B}_0(\Omega)$

M. Valdivia

Recibido: 4-VI-80

In this article we give a representation of the space $\mathcal{B}_0(\Omega)$. In particular, we prove that if $\mathcal{B}_0(\Omega)$ is not reflexive, then it is isomorphic to $s \hat{\otimes} c_0$ and if $\mathcal{B}_0(\Omega)$ is nuclear then it is isomorphic to s.

En este artículo damos una representación del espacio $\mathcal{B}_0(\Omega)$. En particular, probamos que si $\mathcal{B}_0(\Omega)$ no es reflexivo entonces es isomorfo a $s \hat{\otimes} c_0$ y si $\mathcal{B}_0(\Omega)$ es nuclear es isomorfo a s.

1. Notaciones

Denotamos por s el espacio vectorial de las sucesiones complejas de decrecimiento rápido con la topología usual de espacio de Fréchet. Los espacios de Banach c_0 y l^∞ los suponemos complejos.

Si E y F son dos espacios vectoriales topológicos de Hausdorff, localmente convexos y definidos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, ponemos

$$E \hat{\otimes} F$$

para la compleción de $E \otimes F$ dotado de la topología proyectiva.

En el caso en que E y F sean isomorfos, escribimos $E \simeq F$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es un multi-índice, en donde α_j es un entero no negativo, $j = 1, 2, \ldots, n$, ponemos, como es habitual,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

y si f es una función compleja definida en un abierto del espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$, indefinidamente diferenciable, $D^\alpha f$ es la derivada parcial de f de orden α.

La distancia que consideramos en $\mathbb{R}^n$ es la euclídea y si

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n,$$

ponemos

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

Si K es un compacto de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}$ (K) es el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de todas las funciones complejas definidas en $\mathbb{R}^n$, indefinidamente diferenciables y con soportes en K, dotado con la topología ordinaria de espacio de Fréchet. Si el interior $\overset{\circ}{K}$ de K tiene su clausura coincidente con K, denotamos por $\mathcal{C}^\infty$ (K) el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de todas las funciones complejas definidas en K, indefinidamente diferenciables, que se extienden por continuidad, así como todas sus derivadas de cualquier orden, a K. También suponemos que $\mathcal{C}^\infty$ (K) está dotado de su topología ordinaria de espacio de Fréchet.

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Siguiendo a J. Horváth, [3, p. 283], denotamos por $\mathcal{B}_0(\Omega)$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de las funciones complejas definidas en Ω e indefinidamente diferenciables, de manera que $f \in \mathcal{B}_0(\Omega)$ si, y sólo si, dado un $\varepsilon > 0$ y un multi-índice α, existe un compacto K en Ω que verifica:

$$|D^\alpha f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega \sim K.$$

Suponemos que $\mathcal{B}_0(\Omega)$ está dotado de la topología de espacio de Fréchet tal que una sucesión (f_r) de $\mathcal{B}_0(\Omega)$ converge al origen de este espacio si para cada multi-índice α, $(D^\alpha f_r)$ converge uniformemente a cero en Ω. En particular, si $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_0(\Omega)$ coincide con el espacio $\overset{\circ}{\mathcal{B}}$ de L. Schwartz, [6, p. 199].

$\mathcal{B}_1(\Omega)$, introducido en [1], es un subespacio del clásico espacio $\mathcal{B}$ de L. Schwartz, [6, p. 199], y está formado por aquellos elementos de $\mathcal{B}$ que se anulan, así como sus derivadas de todos los órdenes, en $\mathbb{R}^n \sim \Omega$.

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, consideramos todos los cubos de la forma

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq a_j + 1, \quad a_j \text{ entero}, \quad j = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{1}$$

ordenados en una sucesión (B_r) de elementos distintos.

Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, sea $\mathcal{B}_1$ la familia de todos los cubos de la forma (1) contenidos en Ω, de manera que si $Q \in \mathcal{B}_1$, la distancia que Q a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ es igual o mayor que $\sqrt{n}$.

Procediendo por recurrencia, supongamos que hemos obtenido las familias de cubos $\mathcal{B}_h$, $1 \leqslant h \leqslant k$. Representamos por $\mathcal{B}_{k+1}$ la colección de todos los cubos de la forma

$$\left\{x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{a_j}{2^k} \leq x_j \leq \frac{a_j + 1}{2^k}, \quad a_j \text{ entero}, \quad j = 1, 2, \ldots, n\right\},$$

contenidos en Ω, de manera que si $Q \in \mathcal{B}_{k+1}$, la distancia de Q a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ es igual o mayor que $\frac{\sqrt{n}}{2^k}$ y Q no está contenido en ningún elemento de $\mathcal{B}_h$, $1 \leqslant h \leqslant k$. Ordenamos los cubos de $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k$ en una sucesión (B_r) de elementos distintos.

En cualquiera de los dos casos considerados para Ω, supongamos que

$$\mathrm{B}_r = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{a_j(r)}{2^{k(r)}} \leq x_j \leq \frac{a_j(r) + 1}{2^{k(r)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

en donde $a_j(r)$ es un entero y $k(r)$ es un entero no negativo, $j = 1, 2, \ldots, n$, $r = 1, 2, \ldots$ Sea $\rho = (\rho_r)$ la sucesión de las longitudes de las aristas de (B_r), es decir,

$$\rho_r = \frac{1}{2^{k(r)}}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Ponemos:

$$A_r = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{a_j(r)}{2^{k(r)}} - \frac{1}{2^{k(r)+3}} \leq x_j \leq \frac{a_j(r)+1}{2^{k(r)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{k(r)+3}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

$$C_r = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{a_j(r)}{2^{k(r)}} + \frac{1}{3 \times 2^{k(r)}} \leq x_j \leq \frac{a_j(r)+1}{2^{k(r)}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3 \times 2^{k(r)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Es inmediato que

$$\bigcup_{r=1}^{\infty} B_r = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathring{A}_r = \Omega.$$

Sean B_{r_1} y B_{r_2}, $r_1 \neq r_2$, dos términos de (B_r). Si $B_{r_1} \cap B_{r_2} \neq \varnothing$, se tiene una de las tres igualdades:

$$\rho_{r_1} = \rho_{r_2}, \ \rho_{r_1} = 2\rho_{r_2}, \ 2\rho_{r_1} = \rho_{r_2}.$$

Si $B_{r_1} \cap B_{r_2} = \varnothing$, la distancia entre B_{r_1} y B_{r_2} es mayor o igual que el mínimo de ρ_1 y ρ_2.

Como consecuencia de lo anterior, $4^n + 1$ elementos distintos de (A_r) tienen intersección vacía y cada elemento de (C_r) corta a un solo elemento de (A_r). Sean

$$I = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : -1 \leq x_j \leq 1, \ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$J = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : -\frac{4}{15} \leq x_j \leq \frac{4}{15}, \ j = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

$$L = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : -\frac{4}{5} \leq x_j \leq \frac{4}{5}, \ j = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Si φ_r es la aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{2a_1(r)+1}{2^{k(r)+1}} + \frac{5}{2^{k(r)+3}} x_1, \ldots, \frac{2a_n(r)+1}{5^{k(r)+1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{3^{k(r)+3}} x_n\right)$$

se tiene que φ_r transforma I en A_r, J en C_r y L en B_r, $r = 1, 2, \ldots$

Sea φ una función real definida en $\mathbb{R}^n$, de clase $\mathcal{C}^\infty$, que es estrictamente positiva en el interior de I y cero en los demás puntos.

Si

$$\mu_r(x) = \frac{(\varphi_0 \varphi_r^{-1})(x)}{\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_0 \varphi_j^{-1})(x)}, \quad x \in \Omega,$$

se tiene que

$$\{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r, \ldots,\}$$

es una partición de la unidad en Ω de clase $\mathcal{C}^\infty$.

2. Primeros resultados

PROPOSICIÓN 1.—*Sean* p *y* m *dos enteros positivos de manera que* $\dfrac{1}{2^p}$ *es la longitud de la arista de un término de* (B_r). *Si la arista de* B_m *tiene una longitud menor que* $\dfrac{1}{2^p}$ *entonces la distancia de* B_m *a* $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ *es menor o igual que*

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k(m)-2}}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que la distancia de B_m a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ sea mayor que

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k(m)-2}}.$$

Ponemos

$$A = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{b_j}{2^{k(m)-1}} \leq x_j \leq \frac{b_j+1}{2^{k(m)-1}}, \ j = 1, 2, \ldots, n\right\},$$

en donde

$$b_j = \frac{a_j(m)}{2}$$

si $a_j(m)$ es par, y

$$b_j = \frac{a_j(m) = 1}{2}$$

si $a_j(m)$ es impar. Se tiene, si d es la distancia de A a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$, que

$$d > \frac{\sqrt{n}}{2^{k(m)-2}} - \frac{\sqrt{n}}{2^{k(m)-1}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{k(m)-1}},$$

y puesto que $k(m)$ es un entero positivo, resulta que A está contenido en un elemento de la sucesión (B_r) y, por tanto, B_m está contenido estrictamente en un elemento de dicha sucesión, lo cual es una contradicción. Luego la distancia de B_m a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ es menor o igual que

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k(m)-2}}.$$

c. q. d.

Para las dos proposiciones siguiente, sea f un elemento de $\mathcal{B}_0(\Omega)$ y sea f_r el elemento de $\mathcal{C}^\infty(I)$ tal que

$$f_r(x) = (f_0 f_r)(x), \quad x \in I, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Proposición 2.—*Dado el multi-índice* α *y el entero no negativo* k *se tiene que*

$$\lim_{r \to \infty} \rho_r^{-k} \sup_{x \in I} | D^\alpha f_r(x) | = 0.$$

Demostración.—Sea ε un número positivo arbitrario. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, tomamos un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$| D^\alpha f(x) | < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \sim K.$$

Hallamos un entero positivo r_0 de manera que

$$A_r \cap K = \varnothing, \quad r \geq r_0.$$

Entonces, si $r \geqslant r_0$,

$$\rho_r^{-k} \sup_{x \in I} | D^\alpha f_r(x) | = \left(\frac{5}{8}\right)^{|\alpha|} \sup_{x \in A_r} | D^\alpha f(x) | < \varepsilon,$$

de aquí la conclusión.

Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, podemos hallar un compacto no vacío K_1 en Ω de manera que en cada punto de $\Omega \sim K_1$ la derivada de orden igual a k de $D^\alpha f$ en cualquier dirección esté acotada en módulo por

$$\frac{k!}{2}\left(\frac{1}{12\sqrt{n}}\right)^k \varepsilon.$$

Si δ es la distancia de K_1 a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$, determinamos un entero positivo p tal que $\dfrac{1}{2^p}$ sea la longitud de la arista de un cubo de (B_r) y que

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{p-4}} < \delta.$$

Hallamos ahora un compacto K_2 en Ω, $K_2 \supset K_1$, de tal forma que si $x \in \Omega \sim K_2$, se tenga

$$2^{kp} \mid D^\alpha f(x) \mid < \varepsilon.$$

Sea r_1 un entero positivo tal que

$$A_r \cap K_2 = \emptyset, \quad r \geq r_1.$$

Si $r \geqslant r_1$ y $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in A_r$ pueden ocurrir dos casos:

a. Que la longitud de la arista de B_r sea mayor o igual que $\dfrac{1}{2^p}$. Entonces,

$$\rho_r^{-k} \mid D^\alpha f_r(z) \mid = \left(\frac{5}{8}\right)^{|\alpha|} \rho_r^{-k+|\alpha|} \mid D^\alpha f(z) \mid \leq$$
$$\leq \rho_r^{-k} \mid D^\alpha f(z) \mid \leq 2^{kp} \mid D^\alpha f(z) \mid < \varepsilon.$$

b. Que la longitud de la arista de B_r sea menor que $\dfrac{1}{2^p}$. Aplicando la proposición anterior resulta que la distancia de B_r a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ es menor o igual que

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)-2}}.$$

Hallamos un $x^0 = (x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n) \in \mathbb{R}^n \sim \Omega$ cuya distancia a B_r sea menor que

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)-3}}$$

Entonces,

$$| x^0 - z | \leq \frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)-3}} + \frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)}} + \frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)+3}} < \frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)-4}} < \frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)-3}},$$

y, como consecuencia, cualquier punto del segmento

$$\}x^0 + w(z - x^0) : 0 \leq w \leq 1\{$$

dista de $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ menos de δ, de aquí que dicho segmento no corte a K_1.

Ampliamos f a todo $\mathbb{R}^n$ poniendo $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^n \sim \Omega$. Es inmediato que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Escribimos

$$f = f_1 + i f_2, \quad f_1 \text{ y } f_2 \text{ reales.}$$

Entonces,

$$D^\alpha f_j(z) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{d\,w^k} D^\alpha f_j(x_1{}^0 + w(z_1 - x_1{}^0), \ldots, x_n{}^0 + w(z_n - x_n{}^0))\right]_{w = \theta_j}$$
$$0 < \theta_j < 1, \; j = 1, 2,$$

y, por tanto,

$$| D^\alpha f(z) | \leq 2 \frac{| z - x^0 |^k}{k!} \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{16\sqrt{n}}\right)^k \varepsilon < \left(\frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)-4}}\right)^k \left(\frac{1}{16\sqrt{n}}\right)^k \varepsilon = \rho_r{}^k \varepsilon.$$

De lo anterior resulta, si $r \geqslant r_1$,

$$\rho_r{}^{-k} \sup_{x \in I} | D^\alpha f_r(x) | = \left(\frac{5}{8}\right)^{|\alpha|} \rho_r{}^{-k+|\alpha|} \sup_{x \in A_r} | D^\alpha f(x) | \leq$$
$$\leq \rho_r{}^{-k} \sup_{x \in A_r} | D^\alpha f(x) | < \varepsilon.$$

c. q. d.

PROPOSICIÓN 3.—*Dado un* $\varepsilon > 0$ *y un multi-índice* α, *existe un compacto K en* Ω *tal que*

$$\left|\left(f\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}\right)(x)\right|<\varepsilon,\quad \forall x\in\Omega\sim K.$$

DEMOSTRACIÓN.—De acuerdo con la proposición anterior, hallamos un entero positivo r_0 tal que

$$\left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|}4^n \sup_{x\in I}|D^\alpha\varphi(x)|\,\rho_r^{-|\alpha|}\sup_{x\in I}|f_r(x)|<\varepsilon,\quad r\geq r_0.$$

Tomamos un compacto K en Ω de manera que

$$A_r\subset K,\quad r<r_0.$$

Entonces si $z\in\Omega\sim K$, existen los números enteros positivos $r_1, r_2, \ldots, r_p$, $p\leqslant 4^n$, de tal forma que

$$z\notin A_r,\ r\neq r_j,\ r_j\geq r_0,\ j=1,2,\ldots,p$$

y, como consecuencia,

$$\left|\left(fD^\alpha\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}\right)(z)\right|\leq\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|}\rho_{r_j}^{-|\alpha|}\,|f(z)|\;|(D^\alpha\varphi)(\varphi_{r_j}^{-1}(z))|\leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|}\rho_{r_j}^{-|\alpha|}\sup_{x\in I}|f_{r_j}(x)|\cdot|D^\alpha\varphi(x)|<\sum_{j=1}^{p}\frac{\varepsilon}{4^n}\leq\varepsilon.\quad \text{c.q.d.}$$

PROPOSICIÓN 4.—*Dado el multi-índice* γ *y el elemento* g *de* $\mathcal{B}_0(\Omega)$, *se tiene que*

$$g\,D^\gamma\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}\in\mathcal{B}_0(\Omega).$$

DEMOSTRACIÓN.—Teniendo en cuenta la regla de derivación de un cierto orden de un producto de funciones, basta comprobar que dados los multi-índices α y β y el número positivo ε, existe un compacto K en Ω tal que

$$\left|\left(D^\beta g\,D^\alpha\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\circ\varphi_j^{-1}\right)(x)\right|<\varepsilon,\quad\forall x\in\Omega\sim K,$$

lo cual es inmediato aplicando la proposición anterior para $D^\beta g = f$, c. q. d.

Proposición 5.—*Si* f $\in \mathcal{B}_0(\Omega)$, *se tiene que*

$$\frac{f}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}} \in \mathcal{B}_0(\Omega).$$

Demostración.—Puesto que L es un compacto contenido en el interior de I, se tiene que

$$\inf \{\varphi(x) : x \in L\} = b > 0.$$

Si $x \in \Omega$, hallamos un entero positivo r tal que $x \in B_r$. Entonces,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right)(x) \geq (\varphi \circ \varphi_r^{-1})(x) = \varphi(\varphi_r^{-1}(x)) \geq b. \tag{2}$$

Es obvio que basta comprobar que dados los multi-índices α y β y un $\varepsilon > 0$, existe un compacto K en Ω tal que

$$\left| \left(D^\alpha f \, D^\beta \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}} \right)(x) \right| < \varepsilon, \quad x \in \Omega \sim K \tag{3}$$

Se tiene que

$$D^\beta \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}}$$

es una fracción cuyo numerador es una combinación lineal de términos de la forma

$$D^\gamma \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right) D^\delta \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right) \ldots D^\mu \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right),$$

siendo $\gamma, \delta, \ldots, \mu$ multi-índices, y el denominador es una potencia entera y positiva de

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}.$$

La aplicación reiterada de la proposición anterior permite afirmar que

$$D^{\alpha} f D^{\gamma}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right) D^{\delta}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right) \ldots D^{\mu}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}\right) \in \mathcal{B}_0(\Omega)$$

y teniendo en cuenta (2), la comprobación de (3) es inmediata, c. q. d.

Denotamos por E el espacio vectorial de las sucesiones (f_r) de $\mathcal{D}(\mathrm{I})$ tales que, para cada multi-índice α y cada entero no negativo k, se verifica que

$$\lim_{r \to \infty} \rho_r^{-k} \sup_{x \in \mathrm{I}} | D^{\alpha} f_r(x) | = 0$$

Dotamos a E de la topología de espacio de Fréchet que se deriva de la familia de normas

$$p_{m,k}((f_r)) = \sup_r \rho_r^{-k} \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathrm{I}} | D^{\alpha} f_r(x) |, \quad m, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Se define F análogamente a E, cambiando en la definición de E, $\mathcal{D}(\mathrm{I})$ por $\mathcal{C}^{\infty}(\mathrm{J})$ e I por J.

Puesto que

$$\mathcal{D}(\mathrm{I}) \simeq s \simeq \mathcal{C}^{\infty}(\mathrm{J}), \quad [5, \text{p. } 207\text{-}210],$$

resulta que

$$\mathrm{E} \simeq \mathrm{F}.$$

Si (f_r) es un elemento cualquiera de E, ponemos

$$\mathrm{T}((f_r)) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1}.$$

Para cada multi-índice α se tiene que

$$D^{\alpha} \sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1} = \sum_{r=1}^{\infty} D^{\alpha}(f_r \circ \varphi_r^{-1}) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{2^{k(r)+8}}{5}\right)^{|\alpha|} (D^{\alpha} f_r) \circ \varphi_r^{-1} =$$
$$= \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-|\alpha|} (D^{\alpha} f_r) \circ \varphi_r^{-1}. \tag{4}$$

Dado un $\varepsilon > 0$, hallamos un entero positivo r_0 tal que

$$\rho_r^{-|\alpha|} \sup \; | D^\alpha f_r(x) | < \frac{1}{4^n} \left(\frac{5}{8}\right)^{|\alpha|} \varepsilon, \quad r \geq r_0.$$

Si K es un compacto de Ω que verifica:

$$A_r \subset K, \quad r < r_0,$$

y z es un punto cualquiera de $\Omega \sim K$, existen los números enteros positivos $r_1, r_2, \ldots, r_p$, $p \leqslant 4^n$, de manera que

$$z \notin A_r, \; r \neq r_j, \; r_j \geq r_0, \; j = 1, 2, \ldots, p.$$

Entonces, usando (4),

$$\left| \left(D^\alpha \sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1} \right)(z) \right| = \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \left| \left(\sum_{j=1}^{p} \rho_{r_j}^{-|\alpha|} (D^\alpha f_{r_j}) \circ \varphi_{r_j}^{-1} \right)(z) \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^{p} \rho_{r_j}^{-|\alpha|} \sup_{x \in I} \; | D^\alpha f_{r_j}(x) | \leq 4^n \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{4^n} \left(\frac{5}{8}\right)^{|\alpha|} \varepsilon = \varepsilon,$$

de aquí que

$$T((f_r)) \in \mathcal{B}_0(\Omega).$$

Proposición 6.—*T es un operador lineal y continuo de E sobre* $\mathcal{B}_0(\Omega)$.

Demostración.—Por lo dicho anteriormente, T aplica E en $\mathcal{B}_0(\Omega)$. Es obvio que T es lineal.

Si $(f_r) \in E$ y α es un multi-índice, resulta que

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \left(D^\alpha \sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \varphi_r^{-1} \right)(x) \right| = \sup_{x \in \Omega} \left| \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{-|\alpha|} (D^\alpha f_r) \circ \varphi_r^{-1} \right)(x) \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} 4^n \sup_r \rho_r^{-|\alpha|} \sup_{x \in I} \; | D^\alpha f_r(x) | ,$$

de donde se deduce la continuidad de T.

Veamos ahora que T es suprayectiva. Tomamos un elemento f de $\mathcal{B}_0(\Omega)$ y ponemos

$$h_r = (f\mu_r) \circ \varphi_r, \quad r = 1, 2, \dots$$

Si escribimos

$$g = \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}},$$

se tiene, aplicando la Proposición 5, que

$$fg \in \mathcal{B}_0(\Omega)$$

y teniendo en cuenta la Proposición 2, la sucesión

$$(h_r = ((f\mu_r) \circ \varphi_r) = (((fg)(\varphi \circ \varphi_r^{-1}) \circ \varphi_r) = (((fg) \circ \varphi_r) \times \varphi) \in \mathrm{E}.$$

Finalmente,

$$\mathrm{T}((h_r)) = \sum_{r=1}^{\infty} (f\mu_r) \circ \varphi_r) \circ \varphi_r^{-1} = \sum_{r=1}^{\infty} f\mu_r = f. \quad \text{c. q. d.}$$

PROPOSICIÓN 7.—*Dado el multi-índice* α *y el entero no negativo* k, *existe una constante positiva M tal que*

$$\rho_r^{-k} \sup_{x \in \mathrm{I}} |D^\alpha (\mathrm{f} \circ \varphi_r)(\mathrm{x})| \leq M \sum_{|\beta| \leq |\alpha| + \mathrm{k}} \sup_{x \in \Omega} |D^\beta \mathrm{f}(\mathrm{x})|, \quad \forall \mathrm{f} \in \mathcal{B}_0(\Omega)$$
$$\mathrm{r} = 1, 2, \dots$$

DEMOSTRACIÓN.—Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\rho_r^{-k} \sup |D^\alpha (f \circ \varphi_r)(x)| = \left(\frac{5}{8}\right)^{|\alpha|} \sup_{x \in A_r} |D^\alpha f(x)| \leq$$
$$\leq \left(\frac{5}{8}\right)^{|\alpha|} \sum_{|\beta| \leq |\alpha| + k} \sup_{x \in \Omega} |D^\beta f(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{B}_0(\Omega).$$

Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, determinamos un entero positivo p tal que $\frac{1}{2^p}$ sea la longitud de la arista de un cubo (B_r).

Dado el entero positivo r dos casos se pueden presentar:

a. Que la longitud de la arista de B_r sea mayor o igual que $\frac{1}{2^p}$. Entonces,

$$\rho_r^{-k} \sup_{x \in [0,1]} | D^\alpha (f \circ \varphi_r)(x) | = \left(\frac{5}{8}\right)^{|\alpha|} \rho_r^{-k+|\alpha|} \sup_{x \in A_r} | D^\alpha f(x) | \leq$$

$$\leq \rho_r^{-k} \sup_{x \in A_r} | D^\alpha f(x) | \leq 2^{kp} \sum_{|\beta| \leq |\alpha| + k} \sup_{x \in \Omega} | D^\alpha f(x) | , \quad \forall f \in \mathcal{B}_0(\Omega).$$

b. Que la longitud de la arista de B_r sea menor que $\frac{1}{2^p}$. Procedemos como en el caso b. de la prueba de la proposición 2 y utilizamos las mismas notaciones que allí. Podemos hallar una constante positiva Q tal que

$$\rho_r^{-k} | D^\alpha (f \circ \varphi_r)(z) | = \left(\frac{5}{8}\right)^{|\alpha|} \rho_r^{-k+|\alpha|} | D^\alpha f(z) | \leq$$

$$\leq \rho_r^{-k} [| D^\alpha f_1(z) | + | D^\alpha f_2(z) |] \leq$$

$$\leq \rho_r^{-k} \frac{1}{k!} \left[\left| \left(\frac{d^k}{d w^k} D^\alpha f_1 (x_1^0 + w(z_1 - x_1^0), \ldots, x_n^0 + w(z_n - x_n^0)) \right)_{w = \theta_1} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \left(\frac{d^k}{d w^k} D^\alpha f_2 (x_1^0 + w(z_1 - x_1^0), \ldots, x_n^0 + w(z_n - x_n^0)) \right)_{w = \theta_2} \right| \right] \leq$$

$$\leq \rho_r^{-k} \frac{2}{k!} | z - x^0 |^k Q \sum_{|\beta| \leq |\alpha| + k} \sup_{x \in \Omega} | D^\alpha f(x) | \leq$$

$$\leq \rho_r^{-k} \frac{2}{k!} \left(\frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)-4}} \right)^k Q \sum_{|\beta| \leq |\alpha| + k} \sup_{x \in \Omega} | D^\alpha f(x) | =$$

$$= \frac{2}{k!} \left(\frac{\sqrt{n}}{16} \right)^k Q \sum_{|\beta| \leq |\alpha| + k} \sup_{x \in \Omega} | D^\alpha f(x) | , \quad \forall f \in \mathcal{B}_0(\Omega), \quad \forall z \in A_r.$$

Para el caso $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, la conclusión se sigue ahora fácilmente, c. q. d.

PROPOSICIÓN 8.—$\mathcal{B}_0(\Omega)$ *es isomorfo a un subespacio complementado de E.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea S la aplicación de $\mathcal{B}_0(\Omega)$ en E tal que

$$S(f) = ((f \mu_r) \circ \varphi_r), \quad f \in \mathcal{B}_0(\Omega).$$

S es, obviamente, lineal e injectiva. De la igualdad

$$S(f) = (((fg) \circ \varphi_r) \cdot \varphi),$$

con

$$g = \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \varphi \circ \varphi_j^{-1}}$$

obtenida en la proposición 6 y utilizando la proposición anterior, no ofrece dificultad ver que S es continua. Por otra parte,

$$T(S(f)) = f,$$

por lo que S es un isomorfismo del espacio de Fréchet $\mathcal{B}_0(\Omega)$ en el espacio de Fréchet E. Finalmente, S ∘ T es una proyección continua en E cuya imagen es S ($\mathcal{B}_0(\Omega)$), de aquí la conclusión, c. q. d.

Sea X un operador lineal continuo de $\mathcal{C}^\infty(J)$ en D (I) tal que si $f \in \mathcal{C}^\infty(J)$, la restricción de X ($f$) a J coincide con f, [4] o [8]. Dado un multi-índice α, existe un entero positivo m y una constante positiva M de tal forma que

$$\sup_{x \in I} |(D^\alpha X(f))(x)| \leq M \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in J} |D^\beta f(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(J). \qquad (5)$$

Entonces, si k es un entero no negativo y $(f_r) \in F$, se tiene que

$$\sup_r \rho_r^{-k} \sup_{x \in I} |D^\alpha X(f_r)(x)| \leq M \sup_{|\beta| \leq m} \sup_r \rho_r^{-k} \sup_{x \in J} |D^\beta f_r(x)|,$$

de donde se deduce que la aplicación Y de F en E tal que

$$Y((f_r)) = (X(f_r)), \quad (f_r) \in F,$$

es un isomorfismo de F en E.

PROPOSICIÓN 9.—$\mathcal{B}_0(\Omega)$ *tiene un subespacio complementado isomorfo a E.*

DEMOSTRACIÓN.—Si $f \in \mathcal{B}_0(\Omega)$, ponemos

$$Z(f) = ((Zf)_r),$$

siendo

$$(Zf)_r(x) = (f \circ \varphi_r)(x), \quad x \in J, \quad r = 1, 2, \dots$$

No ofrece dificultad comprobar, utilizando las Proposiciones 2 y 7, que Z es un operador lineal continuo de $\mathcal{B}_0(\Omega)$ sobre F y que $T \circ Y \circ Z$ es una proyección continua en $\mathcal{B}_0(\Omega)$ cuya imagen en T (Y (F)), que es isomorfo a F y, por tanto, a E, y cuyo núcleo está formado por todos los elementos de $\mathcal{B}_0(\Omega)$ que se anulan en C_r, $r = 1, 2, \dots$, c. q. d.

3. Representación del espacio $\mathcal{B}_0(\Omega)$

Denotamos por $\lambda_0(\rho)$ el espacio vectorial de las sucesiones complejas (a_r) tales que

$$\lim_{r \to \infty} \rho_r^{-k} a_r = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ponemos, para cada entero positivo k,

$$r_k((a_r)) = \sup \{\rho_r^{-k} \mid a_r \mid : r = 1, 2, \dots\}.$$

Es inmediato que

$$\{r_k : k = 0, 1, 2, \dots\}$$

es un sistema de normas sobre $\lambda_0(\rho)$ que le dota de una topología de espacios de Fréchet. Suponemos que $\lambda_0(\rho)$ está provisto de dicha topología.

Sea W la aplicación de $\lambda_0(\rho) \otimes \mathcal{D}(I)$ en E definida por

$$W : \sum_{j=1}^{h} (a_r^{(j)}) \otimes f_j \longrightarrow \left(\sum_{j=1}^{h} a_r^{(j)} f_j \right), \quad (a_r^{(j)}) \in \lambda_0(\rho), f_j \in \mathcal{D}(I), j = 1, 2, \dots, h.$$

Suponemos que $\lambda_0(\rho) \otimes \mathcal{D}(I)$ está dotado de la topología proyectiva.

PROPOSICIÓN 10.—*W es un isomorfismo de* $\lambda_0(\rho) \otimes \mathcal{D}(I)$ *en E.*

DEMOSTRACIÓN.—Es inmediato que W es lineal e injectiva. Se tiene que

$$p_{m,k}\left(\left(\sum_{j=1}^{h} a_r(j) f_j\right)\right) = \sup_r \rho_r^{-k} \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in I} \left| \left(D^\alpha \sum_{j=1}^{h} a_r(j) f_j\right)(x) \right| \leq$$

$$\leq \sup_r \rho_r^{-k} \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^{h} |a_r(j)| \sup_{x \in I} |D^\alpha f_j(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{h} (\sup_r \rho_r^{-k} |a_r(j)|) \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in I} |D^\alpha f_j(x)|,$$

de donde se deduce la continuidad de W.

Sean

$$U = \{(a_n) \in \lambda_0(\rho) : \sup \rho_r^{-k} |a_r| \leq 1\}$$

$$V = \left\{ f \in \mathcal{D}(I) : \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in I} |D^\alpha f(x)| \leq 1 \right\}.$$

Denotamos por U^0 y V^0 los conjuntos polares de U y V en los duales topológicos de $\lambda_0(\rho)$ y $\mathcal{D}(I)$, respectivamente. Sea e_j el elemento de $\lambda_0(\rho)$ que tiene todos sus términos iguales a cero salvo el que ocupa el lugar j, que vale uno. Tomamos $u \in U^0$, $v \in V^0$ y λ_r un número complejo de módulo uno tal que

$$\lambda_r \langle u, e_r \rangle = |\langle u, e_r \rangle|, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Obviamente,

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \rho_j^k e_j \in U, \quad m = 1, 2, \ldots$$

y, por tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \rho_j^k \langle u, e_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^k |\langle u, e_j \rangle| \leqslant 1.$$

Por otra parte,

$$\left|\sum_{j=1}^{h} \langle u, (a_r^{(j)})\rangle \langle v, f_j\rangle\right| = \left|\sum_{j=1}^{h}\left(\sum_{r=1}^{\infty} \langle u, e_r\rangle a_r^{(j)}\right)\langle v, f_j\rangle\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{h} \langle v, \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_r\rangle a_r^{(j)} f_j\rangle\right| = \left|\sum_{r=1}^{\infty} \langle u, e_r\rangle \langle v, \sum_{j=1}^{h} a_r^{(j)} f_j\rangle\right| \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{\infty} |\langle u, e_r\rangle| \cdot \left|\langle v, \sum_{j=1}^{h} a_r^{(j)} f_j\rangle\right| \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{\infty} |\langle u, e_r\rangle| \sum_{|\alpha| \leqq m} \sup_{x \in I} \left|\left(D^\alpha \sum_{j=1}^{h} a_r^{(j)} f_j\right)(x)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha| \leqq m} \sup_r \rho_r^{-k} \sup_{x \in I} \left|\left(D^\alpha \sum_{j=1}^{h} a_r^{(j)} f_j\right)(x)\right| \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, e_j\rangle \rho_j^k \leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha| \leqq m} \sup_r \rho_r^{-k} \sup_{x \in I} \left|\left(D^\alpha \sum_{j=1}^{h} a_r^{(j)} f_j\right)(x)\right|,$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta que $\mathcal{D}$ (I) es nuclear y, por consiguiente, las topologías proyectivas y la de la convergencia bi-equicontinua coincide en $\lambda_0(\rho) \otimes \mathcal{D}$ (I), que W es un isomorfismo de $\lambda_0(\rho) \otimes \mathcal{D}$ (I) en E.

PROPOSICIÓN 11.—*El espacio* $s \widehat{\otimes} \lambda_0(\rho)$ *es isomorfo a E.*

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que

$$\lambda_0(\rho) \widehat{\otimes} \mathcal{D}(I) \simeq s \widehat{\otimes} \lambda_0(\rho)$$

basta ver que $\lambda_0(\rho) \widehat{\otimes} \mathcal{D}$ (I) es isomorfo a E.

El subespacio G de E formado por aquellas sucesiones de $\mathcal{D}$ (I) cuyos términos son nulos, salvo a lo sumo un número finito, es denso en E.

Por otra parte, dada la sucesión (g_r) de $\mathcal{D}$ (I) tal que

$$g_r = 0, \quad \text{para} \quad r > h,$$

se tiene que

$$W\left(\sum_{j=1}^{h} e_j \otimes g_j\right) = (g_r),$$

de aquí que

$$W(\lambda_0(\rho) \otimes \mathcal{D}(I)) \supset G$$

y, consecuentemente,

$$W(\lambda_0(\rho) \otimes \mathcal{D}(I))$$

es denso en E. Entonces W se extiende a un isomorfismo de

$$\lambda_0(\rho) \hat{\otimes} \mathcal{D}(I)$$

sobre E. Luego

$$\lambda_0(\rho) \hat{\otimes} \mathcal{D}(I) \simeq E.$$

c. q. d.

PROPOSICIÓN 12. — *Sea L_1 un subespacio complementado de $s \hat{\otimes} \lambda_0(\rho)$. Sea M_1 un subespacio complementado de L_1. Si*

$$M_1 \simeq s \hat{\otimes} \lambda_0(\rho)$$

entonces

$$L_1 \simeq s \hat{\otimes} \lambda_0(\rho)$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea L_2 un complemento topológico de L_1 en $s \otimes \lambda_0(\rho)$. Sea M_2 un complemento topológico de M_1 en L_1. Entonces,

$$\begin{aligned} s \hat{\otimes} \lambda_0(\rho) &\simeq (s \hat{\otimes} s) \hat{\otimes} \lambda_0(\rho) \simeq s \hat{\otimes} (\hat{\otimes} \lambda_0(\rho)) \simeq s \hat{\otimes} (L_1 \times L_2) \simeq (S \hat{\otimes} L_1) \times (s \hat{\otimes} L_2) \simeq \\ &\simeq ((\mathbb{C} \times s) \hat{\otimes} L_1) \times (s \hat{\otimes} L_2) \simeq (\mathbb{C} \hat{\otimes} L_1) \times (s \hat{\otimes} L_1) \times (s \hat{\otimes} L_2) \simeq \\ &\simeq L_1 \times (s \hat{\otimes} L_1 \times (s \hat{\otimes} L_2) \simeq L_1 \times (s \hat{\otimes} \lambda_0(\rho)) \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} L_1 &\simeq M_1 \times M_2 \simeq (s \hat{\otimes} \lambda_0(\rho \quad \times M_2 \simeq ((s \times s) \hat{\otimes} \lambda_0(\rho)) \times M_2 \simeq \\ &\simeq (S \hat{\otimes} \lambda_0(\rho)) \times (s \hat{\otimes} \lambda_0((\rho) \times M_2 \simeq (S \hat{\otimes} \lambda_0(\rho)) \times L_1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$L_1 \simeq S \hat{\otimes} \lambda_0(\rho).$$

c. q. d.

TEOREMA 1.—*El espacio* $\mathcal{B}_0(\Omega)$ *es isomorfo a* $s \hat{\otimes} \lambda_0(\rho)$.

DEMOSTRACIÓN.—Es una consecuencia inmediata de las proposiciones 8, 9, 11 y 12, c. q. d.

NOTA 1.—Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ se tiene que $\rho_r = 1$, $r = 1, 2, \ldots$ y $\lambda_0(\rho) = c_0$. Entonces resulta:

$$\mathring{\mathcal{B}} \simeq s \hat{\otimes} c_0.$$

Como consecuencia, y teniendo en cuenta que $\mathcal{B}$ es isomorfo al bidual fuerte de $\mathring{\mathcal{B}}$, [7], se tiene que

$$\mathcal{B} \cong s \hat{\otimes} l^\infty.$$

4. Reflexividad y nuclearidad de $\mathcal{B}_0(\Omega)$

Los siguientes resultados son fáciles de obtener y se encuentran, en un contexto más general, en [10]:

1. $\lambda_0(\rho)$ es reflexivo, si, y sólo si,

$$\lim_{r \to \infty} \rho_r = 0.$$

2. Si $\lambda_0(\rho)$ es reflexivo es un espacio de Schwartz.
3. $\lambda_0(\rho)$ es nuclear si, y sólo si, existe un entero positivo p tal que

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^p < \infty.$$

El teorema siguiente es una consecuencia inmediata de los resultados anteriores y del teorema 1.

TEOREMA 2.—*Se tienen las siguientes propiedades*:

a. $\mathcal{B}_0(\Omega)$ es reflexivo si, y sólo si,

$$\lim_{r \to \infty} \rho_r = 0$$

b. *Si* $\mathcal{B}_0(\Omega)$ *es reflexivo es un espacio de Schwartz.*

c. $\mathcal{B}_0(\Omega)$ *es nuclear si, y sólo si, existe un entero positivo* p *tal que*

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho^p_r < \infty .$$

Representamos por t la función definida en $\mathbb{R}^n$ tal que, si $\mathbb{R} = \Omega$

$$t(x) = \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

y si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$,

$$t(x) = \min \{ | x - y | : y \in \mathbb{R}^n \sim \Omega \}.$$

Se dice que Ω es casi-acotado si para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : t(x) \geq \varepsilon\}$$

es compacto.

En [1] se da el siguiente resultado: a) *Las aserciones siguientes son equivalentes*: *A.* Ω *es casi-acotado.* 2. $\mathcal{B}_0(\Omega)$ *es un espacio de Schwartz.* 3. $\mathcal{B}_0(\Omega)$ *es un espacio de Montel.* 4. $\mathcal{B}_0(\Omega)$ *es un espacio reflexivo.*

El resultado a) puede obtenerse de nuestro teorema 2, ya que es inmediato que Ω es casi-acotado si, y sólo si,

$$\lim_{r \to \infty} \rho_r = 0.$$

TEOREMA 3.—$\mathcal{B}_0(\Omega)$ *es nuclear si, y sólo si, existe un entero positivo* p *tal que*

$$t \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demostración.—Supongamos primero que $\mathscr{B}_0(\Omega)$ es nuclear. De acuerdo con el teorema 2 existe un entero positivo p tal que

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho^p_r < \infty . \tag{6}$$

Sea m un entero positivo tal que en (B_r) existe un término cuya arista tiene una longitud igual a $\frac{1}{2^m}$. Hallamos, de acuerdo con (6), un entero positivo r_0 tal que

$$\rho_r < \frac{1}{2^m}, \quad r \geq r_0 .$$

Si $r \geqslant r_0$, aplicamos la Proposición 1 y obtenemos que la distancia de B_r a $\mathbb{R}^n \sim \Omega$ es menor o igual que

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k(r)-2}} = 4\sqrt{n}\,\rho_r .$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^p(x)\,dx = \sum_{r=1}^{r_0} \int_{B_r} t^p(x)\,dx + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \int_{B_r} t^p(x)\,dx \leq \sum_{r=1}^{r_0} \int_{B_r} t^p(x)\,dx +$$
$$+ \sum_{r=r_0+1}^{\infty} \int_{B_r} (5\sqrt{n}\,\rho_r)^p\,dx = \sum_{r=1}^{r_0} \int_{B_r} t^p(x)\,dx + \sum_{r=r_0+1}^{\infty} (5\sqrt{n})^p \rho_r^{p+m} < \infty .$$

Recíprocamente, supongamos que existe un entero positivo p tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^p(x)\,dx < \infty .$$

Entonces,

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^{p+n} = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{B_r} \rho_r^p\,dx \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^p \sum_{r=1}^{\infty} \int_{B_r} t^p(x)\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} t^p(x)\,dx < \infty ,$$

y aplicando el teorema 2 obtenemos que $\mathscr{B}_0(\Omega)$ es nuclear.

NOTA 2.—En [1] se da una condición suficiente para la nuclearidad de $\mathcal{B}_0(\Omega)$ en términos de min $(1, t)$.

5. Una propiedad de complementación de $\mathcal{B}_0(\Omega)$

Sea E_1 el espacio vectorial de las sucesiones (f_r) en $\mathcal{D}([0,1])$ tales que

$$\lim_{r\to\infty} \rho_r^{-k} \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{d^h f_r(x)}{dx^h} \right| = 0, \qquad k, h = 0, 1, 2, \ldots$$

Suponemos que E_1 está dotado de la topología definida por el sistema de normas:

$$q_{h,k}((f_r)) = \sum_{j=1}^{h} \sup_r \rho_r^{-k} \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{d^j f_r(x)}{dx^j} \right|, \qquad h, k = 0, 1, 2, \ldots$$

A E_1 se le aplican, igual que a E, las proposiciones **10** y **11** y se obtiene que

$$s \hat{\otimes} \lambda_0(\rho) \simeq E_1.$$

Sea F_1 el espacio vectorial de las sucesiones (f_r) de $\mathcal{C}^\infty\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$ tales que, para cada par de enteros no negativos h y k,

$$\lim_{r\to\infty} \rho_r^{-k} \sup_{x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} \left| \frac{d^h f_r(x)}{dx^h} \right| = 0.$$

Suponemos que F_1 está dotado de la topología definida por el sistema de normas:

$$r_{h,k}((f_r)) = \sum_{j=1}^{h} \sup_r \rho_r^{-k} \sup_{x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} \left| \frac{d^j f_r(x)}{dx^j} \right|, \qquad h, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Puesto que

$$\mathcal{D}([0,1]) \simeq s \simeq \mathcal{C}^\infty\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right),$$

es obvio que F_1 es isomorfo a E_1 y, por tanto,

$$F_1 \simeq s \hat{\otimes} \lambda_0(\varphi).$$

Sea G_1 el espacio vectorial de las sucesiones (f_r) de $\mathcal{D}([0, 1])$ tales que para cada entero no negativo h,

$$\lim_{r \to \infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{d^h f_r(x)}{d x^h} \right| = 0.$$

Suponemos que G_1 está dotado de la topología definida por el sistema de normas

$$q_m((f_r)) = \sum_{h \leq m} \sup_r \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{d^h f_r(x)}{d x^h} \right|, \quad (f_r) \in G_1, \; m = 0, 1, 2, \ldots$$

Teniendo en cuenta las Proposiciones 10 y 11, se tiene que

$$G_1 \simeq s \hat{\otimes} c_0.$$

Ponemos:

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_r(x) = 2r - 1 + x, x \in \mathbb{R}, \\ H_r =]2r - 1, 2r[, \end{array}\right\} r = 1, 2, \ldots$$

$$H = \bigcup_{r=1}^{\infty} H_r.$$

Entonces, ψ_r transforma el intervalo $[0, 1]$ en H_r, $r = 1, 2, \ldots$ Ponemos, para cada $(f_r) \in G_1$,

$$T_1((f_r)) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \Psi_r^{-1},$$

y consideramos todos los elementos de $\mathcal{B}_0(H)$ extendidos a $\mathbb{R}$, de manera que si $f \in \mathcal{B}_0(H)$, $f(x) = 0$, para cada x de $\mathbb{R} \sim H$. No es difícil probar que T_1 es un isomorfismo de G_1 en $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ cuya imagen es $\mathcal{B}_0(H)$.

Como consecuencia,

$$\mathcal{B}_0(H) \simeq s \hat{\otimes} c_0$$

Ponemos

$$\Lambda(x) = 2r - 1 + \frac{3}{4}\rho_r x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$L_r = \left[2r - 1, 2r - 1 + \frac{3}{4}\rho_r\right]$$

$$K_r = \left[2r - 1 + \frac{1}{4}\rho_r, \ 2r - 1 + \frac{1}{2}\rho_r\right]$$

$$r = 1, 2, \ldots$$

Entonces, Λ_r transforma el intervalo $[0, 1]$ en L_r y el intervalo $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ en K_r.

Sea X_1 un operador lineal continuo de $\mathcal{C}^\infty\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$ en $\mathcal{D}([0, 1])$ tal que si $f \in \mathcal{C}^\infty\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$, la restricción de $X_1(f)$ a $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ coincide con f, [4] o [8]. Un argumento análogo al utilizado en la parte segunda para el operador Y, conduce a afirmar que el operador Y_1 de F_1 en E_1 tal que

$$Y_1((f_r)) = X_0(f_r)), \quad (f_r) \in F^0,$$

es un isomorfismo de F_1 en E_1.

Si f es un elemento cualquiera de $\mathscr{B}_0(H)$, sea f_r el elemento de $\mathcal{C}^\infty\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$ tal que

$$f_r(x) = (f \circ \Lambda_r)(x), \quad x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad r = 1, 2, \ldots$$

Ponemos

$$Z_1(f) = (f_r)$$

PROPOSICIÓN 13.—*Z_1 es un operador lineal continuo de $\mathscr{B}_0(H)$ en F_1.*

DEMOSTRACIÓN.—Si $f \in \mathscr{B}_0(H)$, escribimos

$$f = f_1 + i f_2, \ f_1, f_2 \text{ reales}.$$

Si x varía en K_r, se tiene que

$$\frac{d^h f_j(x)}{d x^h} = \frac{(x-2r+1)^k}{k!}\left(\frac{d^{h+k} f(w)}{d w^{h+k}}\right)_{w=z_j}, \quad 2r-1 < z_j < x,\ j=1,2,$$

y, por tanto,

$$\left|\frac{d^h f_j(x)}{d x^h}\right| \leq 2\,\frac{\left(\frac{1}{2}\rho_r\right)^k}{k!} \sup_{w \in H_r} \frac{d^{h+k} f(w)}{d w^{h+k}}$$

de aquí que

$$\rho_r^{-k} \sup_{x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]} \left|\frac{d^h f_r(x)}{d x^h}\right| = \left(\frac{3}{4}\right)^h \rho_r^{-k+h} \sup_{w \in H_r} \left|\frac{d^h f(x)}{d x^h}\right| \leq$$

$$\leq \frac{\rho_r^k}{2^{k-1} k!}\left(\frac{3}{4}\right)^h \rho_r^{-k+h} \sup_{w \in H_r}\left|\frac{d^{h+k} f(w)}{d w^{h+k}}\right| \leq 2 \sup_{w \in H_r}\left|\frac{d^{h+k} f(w)}{d w^{h+k}}\right|$$

de donde se deduce que Z_1, que obviamente es lineal, es continuo de $\mathscr{B}_0$ (H) en F_1, c. q. d.

Si (g_r) está en E_1, escribimos

$$U_1((g_r)) = \sum_{r=1}^{r} g_r \circ \Lambda_r^{-1}$$

No ofrece ninguna dificultad comprobar, utilizando en parte un argumento análogo al de la prueba de la proposición anterior, que U_1 es un isomorfismo de E_1 en $\mathscr{B}_0$ (H).

TEOREMA 4.—*$\mathscr{B}_0$ (Ω) es isomorfo a un subespacio complementado de* $s \hat{\otimes} c_0$.

DEMOSTRACIÓN.—Si

$$V_1 = U_1 \circ Y_1 \circ Z_1,$$

se tiene que V_1 es una proyección continua en $\mathscr{B}_0$ (H), cuyo núcleo está formado por aquellas funciones f de $\mathscr{B}_0$ (H) que se anulan en K^r, $r = 1, 2, \ldots$ La imagen de V_1 es, obviamente, $U_1(Y_1(F_1))$. Finalmente,

$$U_1(Y_1(F_1)) \simeq Y_1(F_1) \simeq F_1 \simeq s \hat{\otimes} \lambda_0(\rho) \simeq \mathscr{B}_0(\Omega) \qquad \text{c. q. d.}$$

6. Representación de $\mathcal{B}_0(\Omega)$ cuando no es reflexivo

Supongamos que $\mathcal{B}_0(\Omega)$ no es reflexivo. Aplicamos el teorema 2 y obtenemos una sucesión de enteros positivos

$$r_1 < r_2 < \dots < r_j \dots$$

de manera que

$$\rho_{r_1} = \rho_{r_2} = \dots = \rho_{r_j} = \dots$$

Sea λ_1 el subespacio de $\lambda_0(\rho)$ formado por todas aquellas sucesiones que se anulan en r_j, $j = 1, 2, \dots$ Sea λ_2 el subespacio de $\lambda_0(\rho)$ formados por todas las sucesiones que se anulan en r, $r \neq r_j$, $j = 1, 2, \dots$ Obviamente, $\lambda_0(\rho)$ es isomorfo a $\lambda_1 \times \lambda_2$ y λ_2 es isomorfo a c_0. Por tanto,

$$s \hat{\otimes} \rho_0(\lambda) \simeq s \hat{\otimes} (\lambda_1 \times \lambda_2) \simeq (s \hat{\otimes} \lambda_1) \times (s \hat{\otimes} c_0) \tag{7}$$

TEOREMA 5.—*Si $\mathcal{B}_0(\Omega)$ no es reflexivo es isomorfo a* $s \hat{\otimes} c_0$.

DEMOSTRACIÓN.—Por (7), $s \hat{\otimes} c_0$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{B}_0(\Omega)$. Por el teorema 4, $\mathcal{B}_0(\Omega)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $s \otimes c_0$. Basta ahora aplicar la proposición 11 para el caso $\lambda_0(\rho) = c_0$, c. q. d.

7. Representación de $\mathcal{B}_0(\Omega)$ cuando es nuclear

Cuando $\mathcal{B}_0(\Omega)$ es nuclear, existe un entero positivo p tal que

$$\sum_{r=1}^{\infty} \rho_r^p < \infty .$$

Sean $D_1, D_2, \dots, D_r, \dots$, una sucesión de intervalos cerrados de longitudes iguales a

$$\rho^p_1, \rho_2^p, \dots, \rho^p_r, \dots,$$

respectivamente, de manera que si

$$D_r = [d_r, d_r + \rho^{p_r}]$$

se tenga que

$$d_1 = 0, d_r + \rho^{p_r} < d_{r+1}, r = 1, 2, \ldots,$$
$$\lim_{r \to \infty} d_r = d < \infty .$$

Si

$$\Phi(x) = \rho^{p_r} x + d_r, \quad x \in \mathbb{R},$$

Φ transforma el intervalo $[0, 1]$ en D_r, $r = 1, 2, \ldots$
Ponemos

$$P = \left(\bigcup_{r=1}^{\infty} D_r\right) \cup \{d\}$$

que es, evidentemente, un compacto no vacío de $\mathbb{R}$. Si (f_r) pertenece al espacio E_1 descrito en el apartado 5, escribimos

$$S_1((f_r)) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r \circ \Phi^{-1}.$$

Un mero cálculo permite asegurar que S_1 es un isomorfismo de E_1 sobre $\mathcal{D}$ (P).

Para el teorema siguiente necesitaremos el siguiente resultado que hemos obtenido en [9]:

b) *Si K es un compacto en una variedad C^∞-diferenciable de dimensión* n, *cuyo interior no es vacío, entonces* $\mathcal{D}(K) \simeq$ s.

TEOREMA 6.—*Si* $\mathcal{B}_0(\Omega)$ *es nuclear* $\mathcal{B}_0(\Omega) \simeq$ s.

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que E_1 es isomorfo a $\mathcal{D}$ (P), resulta, de acuerdo con el resultado b),

$$\mathcal{D}(P) \simeq s \simeq E_1 \simeq s \widehat{\otimes} \lambda_0(\rho) \simeq \mathcal{B}_0(\Omega).$$

NOTA 3.—En [1] P. Dierolf da el siguiente resultado: c) $\mathcal{B}_1(\Omega)$

es isomorfo al bidual fuerte de $\mathcal{B}_0(\Omega)$. Como consecuencia se tiene:

1. *Si* $\mathcal{B}_1(\Omega)$ *es reflexivo,* $\mathcal{B}_1(\Omega) \simeq s \hat{\otimes} \lambda_0(\rho)$.
2. *Si* $\mathcal{B}_1(\Omega)$ *no es reflexivo,* $\mathcal{B}_1(\Omega) \simeq s \hat{\otimes} l^\infty$.
3. *Si* $\mathcal{B}_1(\Omega)$ *es nuclear,* $\mathcal{B}_1(\Omega) \simeq s$.

NOTA 4.—P. Dierolf nos ha comunicado la siguiente caracterización de la nuclearidad de $\mathcal{B}_0(\Omega)$ obtenida independientemente de la nuestra por él mismo y por J. Voigt [2]: d) $\mathcal{B}_0(\Omega)$ *es nuclear si, y sólo si, existe un* p, $0 < p < \infty$, *tal que* $t \in L^p(R^n)$. También han obtenido, independientemente de nosotros, el teorema 6, [2].

Bibliografía

[1] DIEROLF, P. 1979. *L'espace* $\hat{\mathcal{B}}(\Omega)$ *et les distributions sommables*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288. Ser. A, 197-199.

[2] — — and VOIGT, J.: *Calculation of the bidual for some function spaces*. Integrable distributions (To be published).

[3] HORVÁTH, J. 1966. *Topological Vector Spaces and Distributions*. Addison Wesley, London.

[4] OGRODZKA, Z. 1967. *On simultaneous extension of infinitely differentiable functions*. «Studia Math.», **28**, 192-207.

[5] ROLEWICZ, S. 1972. *Metric Linear Spaces*. PWN-polish scientific publishers, Warszawa.

[6] SCHWARTZ, L. 1966. *Theorie des distributions*. Hermann, Paris.

[7] — — 1953/1954. Séminaire Schwartz.

[8] VALDIVIA, M. 1978. *Representaciones de los espacios* $\mathcal{D}(\Omega)$ *y* $\mathcal{D}'(\Omega)$. «Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid», **72**, 385-414.

[9] — — *Representation of the space* $\mathcal{D}(K)$. «J. reine angew. Math. (To appear).

[10] — — *Espacios semi-escalonados*. «Rev. Real. Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid». (Pendiente de publicación.)