SOBRE EL TEOREMA DE DIEUDONNE-GROTHENDIECK CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 4-VI-80

In this paper we are going to caracterize the spaces for which the Dieudonné-Grothendieck theorem holds. In an earlier work [2] we have studied this question under another point of view for the Γ_r spaces or infra-(s)-spaces.

En este trabajo vamos a caracterizar los espacios para los cuales vale el teorema de Dieudonné-Grothendieck. En uno anterior [2] hemos estudiado la cuestión desde otro punto de vista para los espacios Γ_r o infra-(s)-espacios.

Los espacios vectoriales que consideramos están definidos sobre el cuerpo **K** de los números reales o de los números complejos.

De manera general, E y F serán espacios vectoriales topológicos localmente convexos de Hausdorff, en abreviatura, e. l. c. s.

DEFINICIÓN.—Dado un e. l. c. s. E, un *espacio* $\Gamma_r(E)$ es un e. l. c. s. F tal que toda aplicación lineal $T: E \longrightarrow F$ con gráfica cerrada es continua.

Sea Σ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω, entonces se denota por $l_0^\infty(\Sigma)$ el espacio vectorial de las funciones Σ-simples con valores en **K**, dotado de la topología de la convergencia uniforme.

TEOREMA 1.—*Sea* $m: \Sigma \longrightarrow E$ *una aplicación tal que* Σ *es una* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *y* E *un espacio* $\Gamma_r(l_0^\infty(\Sigma))$:

$$E \in \Gamma_r(l_0^\infty(\Sigma)).$$

Si x′ m *es acotada y finitamente aditiva para cada* x′ *perteneciente a un subconjunto total* Γ *del dual E′ de E, entonces* m *es una medida vectorial acotada.*

Demostración.—La aditividad finita es una consecuencia de ser Γ total. Para demostrar que m es acotada es suficiente probar que $x' m$ es acotada para cada $x' \in E'$.

Sea

$$H = \{x' \in E' : x' m \text{ es acotada}\},$$

y F el espacio E dotado de la topología $\sigma(E, H)$, que es separado por ser H total en E′. Entonces la aplicación lineal S: $l_0^\infty(\Sigma) \longrightarrow F$, definida por

$$S(f) = \int f\, d\, m,$$

es continua puesto que

$$| x' S(f) | = | \int f\, d\, x' m | \leq \|f\|_\infty \, \| x' m \|$$

para $\| x' m \| = | x' m | (\Omega) \, (< \infty)$. Como por otra parte, la aplicación idéntica R: $F \longrightarrow E$ tiene la gráfica cerrada, resulta que

$$R S : l_0^\infty(\Sigma) \to E$$

es una aplicación lineal con la gráfica cerrada. Por tanto, RS es continua porque E es un espacio $\Gamma_r(l_0^\infty(\Sigma))$. Entonces, si B es la bola unidad

$$\{f \in l_0^\infty(\Sigma) : \|f\|_\infty \leq 1\},$$

se tiene que

$$m(\Sigma) \subset R\, S\, (B)$$

es un conjunto acotado en E.

Teorema 2.—*Sea* Σ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω*. Si E no es un espacio* $\Gamma_r(l_0^\infty(\Sigma))$*, existe una medida vectorial finitamente aditiva no acotada* m: $\Sigma \longrightarrow E$ *y un subconjunto total* Γ *de E′ tales que, para cada* $x' \in \Gamma$, x′ m *es una medida acotada.*

Demostración.—Como E no es un espacio $\Gamma_r(l_0^\infty(\Sigma))$, existe una aplicación lineal $T: l_0^\infty(\Sigma) \longrightarrow E$ con la gráfica cerrada no continua. Sea $m: \Sigma \longrightarrow E$ la medida vectorial definida por

$$m(A) = T(\chi_A)$$

para $A \in \Sigma$.

Sea Γ el dominio de la transpuesta T' de T. Por tener T la gráfica cerrada, Γ es un conjunto denso en

$$E'_\sigma = E'[\sigma(E', E)]$$

y es total. Además, si

$$x' \in \Gamma \quad \text{e} \quad y' = T' x' \in l_0^\infty(\Sigma)',$$

se tiene

$$|x' m(A)| = |x' T(\chi_A)| = |y' \chi_A| \leq \sup_{f \in B} |y' f| < \infty$$

para todo $A \in \Sigma$, siendo B la bola unidad de $l_0^\infty(\Sigma)$, e. d., $x' m$ es acotada para todo $x' \in \Gamma$.

Por otra parte, por las proposiciones 1 y 2 de Valdivia [3], se verifica

$$B \subset 4 \operatorname{aco} \{\chi_A : A \in \Sigma\},$$

siendo aco X la envoltura absolutamente convexa del subconjunto X de $l_0^\infty(\Sigma)$. Por tanto,

$$T(B) \subset 4\, T(\operatorname{aco} \{\chi_A : A \in \Sigma\}) = 4 \operatorname{aco} m(\Sigma),$$

de donde se deduce que $m(\Sigma)$ no es acotado por ser $T(B)$ un subconjunto no acotado de E, ya que T no es continua.

COROLARIO.—$\Gamma_r(l_0^\infty(2^N)) \subset \Gamma_r(F)$ *para todo espacio de Fréchet* F.

DEMOSTRACIÓN.—Resulta del teorema 1, y del teorema 2 de [2], según el cual si E no es un espacio $\Gamma_r(F)$ para un espacio de Fréchet F, existe una medida vectorial no acotada $m: 2^N \longrightarrow E$ y un subconjunto total Γ de E' tales que $x'm$ es acotada para todo $x' \in \Gamma$.

Bibliografía

[1] DIESTEL, J. y UHL, J. J. Jr. 1977. *Vector measures*. «Amer. Math. Soc.», Providence, R. I.
[2] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. 1980. *Sobre el teorema de Dieudonné-Grothendieck*. «Rev. R. Acad. Ci. Madrid», **74**, 169-171.
[3] VALDIVIA, M. 1979. *On certain barrelled normed spaces*. «Ann. Inst. Fourier» (Grenoble), **29**, 39-56.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid