SOBRE EL TEOREMA DE LA GRAFICA CERRADA. APLICACIONES LINEALES SUBCONTINUAS

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 4 junio 1980

In this paper we are going to improve theorems of Bennett-Kalton, Bessaga-Pelczyński and Valdivia about the closed-graph theorem to assure that a linear mapping with closed graph is subcontinuous or continuous. For every transfinite α, barrelled spaces of class α and the spaces $\Gamma_r^{(\alpha)}$ are defined. Last spaces are connected with Valdivia's spaces Γ_r.

En este trabajo vamos a mejorar teoremas de Bennett-Kalton, Bessaga-Pelczyński y Valdivia sobre el teorema de la gráfica cerrada para asegurar que una aplicación lineal con gráfica cerrada es subcontinua o continua. Para cada número transfinito α, se definen los espacios tonelados de clase α y los espacios $\Gamma_r^{(\alpha)}$, estos últimos relacionados con los espacios Γ_r de Valdivia.

Los espacios vectoriales que consideramos están definidos sobre el cuerpo **K** de los números reales o de los números complejos.

De manera general, E y F serán espacios vectoriales topológicos localmente convexos de Hausdorff, en abreviatura, e. l. c. s.

1. Definición.—Dado un e. l. c. s. E, un *espacio* Γ_r (E) es un e. l. c. s. F tal que toda aplicación lineal T: E $\longrightarrow$ F con gráfica cerrada es continua. Denotaremos también por Γ_r (E) la clase de todos los espacios Γ_r (E).

2. Proposición.—*Sean E y F e. l. c. s. Si E_0 es un subespacio denso de E y F es un espacio Γ_r (E_0) completo, entonces F es un espacio Γ_r (E).*

Demostración.—Sea T: E $\longrightarrow$ F una aplicación lineal con gráfica cerrada y $T_0: E_0 \longrightarrow F$ la restricción de T a E_0. Como T_0 tiene la gráfica cerrada y F es un espacio $\Gamma_r(E_0)$, T_0 es continua. Sea $T_1: E \longrightarrow F$ la extensión continua de T_0 a E. Entonces, como la gráfica de T es cerrada y $T x = T_1 x$ para todo $x \in E_0$, se tiene $T = T_1$ y, por tanto, T es continua.

3. PROPOSICIÓN.—*Sea E un espacio metrizable. Si E_0 es un subespacio denso de E y F es un espacio $\Gamma_r(E_0)$ secuencialmente completo, entonces F es un espacio $\Gamma_r(E)$.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en la proposición 2.

4. COROLARIO.—*Sean l^∞ el espacio de las sucesiones escalares acotadas, l_0^∞ el espacio de las sucesiones escalares que toman sólo un número finito de valores, c_0 el espacio de las sucesiones escalares convergentes a 0 y $c_{00} = c_0 \cap l_0^\infty$; dotados todos ellos de la topología de la convergencia uniforme. Entonces, si F es un espacio $\Gamma_r(c_{00})$ secuencialmente completo, F es un espacio $\Gamma_r(c_0)$. Análogamente, si F es un espacio $\Gamma_r(l_0^\infty)$ secuencialmente completo, F es un espacio $\Gamma_r(l^\infty)$.*

DEMOSTRACIÓN.—Inmediata.

5. PROPOSICIÓN.—*Si E_0 es un subespacio de codimensión finita del e. l. c. s. E, se tiene $\Gamma_r(E_0) = \Gamma_r(E)$.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea F un espacio $\Gamma_r(E_0)$ y $T: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal con gráfica cerrada. Sea T_0 la restricción de T a E_0. Es claro que $T_0: E_0 \longrightarrow F$ es una aplicación lineal con gráfica cerrada y, por tanto, continua. Sea

$$E = E_0 \oplus \mathbf{K} x_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{K} x_n \qquad (\mathbf{K} = \mathbf{R} \text{ o } \mathbf{C})$$

y

$$x = x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \qquad (x \in E)$$

con

$$x_0 \in F_0 \quad \text{y} \quad \alpha_k \in \mathbf{K} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Entonces, como

$$T(x) = T_0(x_0) + \alpha_1 T(x_1) + \ldots + \alpha_n T(x_n),$$

resulta que T es continua. Luego $\Gamma_r(E_0) \subset \Gamma_r(E)$.

Sea F un espacio $\Gamma_r(E)$ y $T_0: E_0 \longrightarrow F$ una aplicación con gráfica cerrada. Entonces, si

$$E = E_0 \oplus \mathbf{K} x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{K} x_n,$$

extendemos T_0 a E poniendo $T = T_0$ sobre E_0 y $T(x_k) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Es inmediato que T es una aplicación lineal con gráfica cerrada y, por tanto, continua. Luego T_0 es continua y

$$\Gamma_r(E) \subset \Gamma_r(E_0).$$

6. COROLARIO.—*Sea* c *el espacio de las sucesiones escalares convergentes, dotado de la topología de la covergencia uniforme. Entonces* $\Gamma_r(c_0) = \Gamma_r(c)$.

DEMOSTRACIÓN.—Inmediata.

7. DEFINICIÓN (Por inducción transfinita).—Todo espacio tonelado E se dice de *clase* 0. Si α es un número transfinito de primera especie (e. d., con precedente) E se dice de *clase* α si, para toda sucesión no decreciente $(E_n)_1^\infty$ de espacios que cubre a E, existe un n tal que E_n es un subespacio tonelado de clase $\alpha - 1$ denso de E. Si α es un número transfinito de segunda especie, E se dice tonelado de *clase* α si E es tonelado de clase α' para todo $\alpha' < \alpha$. Análogamente un *espacio* $\Gamma_r^{(0)}$ (o un espacio Γ_r) es un espacio $F \in \Gamma_r(E)$ para todo espacio tonelado E. Si α es un número transfinito de primera especie, un *espacio* $\Gamma_r^{(\alpha)}$ es un espacio F unión de una sucesión no decreciente $(F_n)_1^\infty$ de subespacios $\Gamma_r^{(\alpha-1)}$. Si α es un número transfinito de segunda especie, un *espacio* $\Gamma_r^{(\alpha)}$ es un espacio $\Gamma_r^{(\alpha')}$ para algún $\alpha' < \alpha$:

$$\Gamma_r^{(\alpha)} = \bigcup \{\Gamma_r^{(\alpha')} : \alpha' < \alpha\},$$

donde también se denota por $\Gamma_r^{(\alpha)}$ la clase de los espacios $\Gamma_r^{(\alpha)}$.

Si Σ es una σ-álgebra de subconjntos de un conjunto Ω, un teorema de Valdivia [6] dice que el espacio lineal $l_0^\infty(\Sigma)$ de las funciones escalares Σ-simples es un espacio tonelado de clase 1. Como consecuencia resulta

$$\Gamma_r(E) \supset \Gamma_r^{(1)} \quad \text{si} \quad E = l_0^\infty(\Sigma) \quad \text{o si} \quad E = l^\infty(\Sigma),$$

según vamos a ver a continuación.

8. PROPOSICIÓN.—*Si E es un espacio tonelado de clase α y F es un subespacio de la compleción $\hat{E}$ de E, que contiene a E, F es un espacio tonelado de clase α.*

DEMOSTRACIÓN.—Procederemos por inducción transfinita, suponiendo que E es un espacio tonelado de clase α. Si α es de primera especie y $(F_n)_1^\infty$ es una sucesión no decreciente de espacios que cubre a F, existe un n tal que $E_n = F_n \cap E$ es un espacio tonelado de clase $\alpha - 1$ denso en E. Por tanto, F_n es denso en F. Sea T un tonel de F_n, entonces $T \cap E_n$ es un tonel de E_n y, por tanto, existe un entorno abierto V de 0 en F_n tal que $T \cap E_n \supset V \cap E_n$ y, por consiguiente,

$$T \supset \overline{T \cap E_n} \supset \overline{V \cap E_n} = \overline{V}$$

es un entorno de 0 en F_n, donde se toman las clausuras en F_n. Si α es de segunda especie la demostración es inmediata.

9. COROLARIO.—*Sea Σ una σ-álgebra. Si E es un subespacio de $l^\infty(\Sigma)$ (compleción de $l_0^\infty(\Sigma)$), que contiene a $l_0^\infty(\Sigma)$, E es un espacio tonelado de clase 1.*

DEMOSTRACIÓN.—Inmediata si se tiene en cuenta que $l_0^\infty(\Sigma)$ es un espacio tonelado de clase 1.

10. TEOREMA.—*Sean E un espacio tonelado de clase α y F un espacio $\Gamma_r^{(\alpha)}$. Si E_0 es un subespacio tonelado de clase α denso de E y $T_0: E_0 \longrightarrow F$ es una aplicación lineal continua, existe una extensión continua $T: E \longrightarrow F$ de T_0. Además se puede asegurar que la imagen $T(E)$ está contenida en un Γ_r-espacio $F_0 \subset F$.*

DEMOSTRACIÓN.—Procederemos por inducción transfinita. Para $\alpha = 0$ el teorema es cierto según un teorema de Valdivia [5]. Supongamos que el teorema es cierto para $\alpha = \alpha_0 - 1$, siendo α_0 un número transfinito de primera especie. Sean E un espacio tonelado de clase α_0, F un espacio $\Gamma_r^{(\alpha_0)}$ y E_0 un subespacio tonelado de clase α_0 denso de E. Entonces, F es unión de una sucesión no decreciente $(F_n)_1^\infty$ de espacios $\Gamma_r^{(\alpha_0 - 1)}$. Sea $T_0: E_0 \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua y

$$E_n = T_0^{-1}(F_n) (\subset E_0).$$

Entonces, por ser E_0 un espacio tonelado de clase α_0, existe un n tal que E_n es un subespacio tonelado de clase $\alpha_0 - 1$ denso de E_0. Por tanto, existe una extensión continua $T: E \longrightarrow F_n$ de la restricción T_n de T_0 a E_n. Como $T(x) = T_n(x)$ para $x \in E_n$ y E_n es denso en E_0, se tiene $T(x) = T_0(x)$ para $x \in E_0$. Si α_0 es de segunda especie y se supone el teorema cierto para $\alpha < \alpha_0$, la conclusión es obvia.

La última parte del teorema es ahora inmediata.

11. TEOREMA.—*Sean E un espacio tonelado de clase* α *y F un espacio* $\Gamma_r^{(\alpha)}$. *Si* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal con gráfica cerrada, entonces T es continua y existe un subespacio* F_0 *de F que es un espacio* Γ_r *y contiene a la imagen T (E).*

DEMOSTRACIÓN.—Procederemos por inducción transfinita. Para $\alpha = 0$ el teorema es cierto según un teorema de Valdivia [5]. Supongamos que el teorema es cierto para $\alpha_0 - 1$, siendo α_0 un número transfinito de primera especie. Sean E un espacio tonelado de clase α_0 y F un espacio $\Gamma_r^{(\alpha)}$. Entonces, F es unión de una sucesión no decreciente $(F_n)_1^\infty$ de espacios $\Gamma_r^{(\alpha - 1)}$. Es claro que $(T^{-1}(F_n))_1^\infty$ es una sucesión no decreciente de espacios que cubre a E. Por tanto, existe un n tal que $E_n = T^{-1}(F_n)$ es un subespacio tonelado de clase $\alpha_0 - 1$ denso de E. Sea $T_n: E_n \longrightarrow F_n$ la restricción de T a E_n. Entonces, por tener T_n la gráfica cerrada y ser F un espacio $\Gamma_r^{(\alpha_0 - 1)}$, T_n es continua. Por el teorema 11, T_n tiene una extensión continua $\overline{T}_n: E \longrightarrow F_n$. Por consiguiente, como $T: E \longrightarrow F$ tiene la gráfica cerrada y es igual a $\overline{T}_n$ sobre E_n, resulta $T = \overline{T}_n$ y, por tanto, T es continua y $T(E) \subset F_n$. Además existe un subespacio F_0 de F_n que es un espacio Γ_r que contiene a $T(E)$. Si α_0 es de segunda especie y el teorema se supone cierto para $\alpha < \alpha_0$, la demostración es inmediata.

12. COROLARIO.—*Sean E un espacio tonelado de clase* $\alpha + 1$ *y F un espacio* $\Gamma_r^{(\alpha+1)}$, *unión de una sucesión no decreciente* $(F_n)_1^\infty$

de espacios $\Gamma_r^{(\alpha)}$. *Si* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal con gráfica cerrada, entonces* T *es continua y existe un* n *tal que* $T(E) \subset F_n$.

Demostración.—Está contenida en la demostración del teorema 11.

13. Definición.—Sean E y F e. l. c. s. y $T: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Se dice que T es *subcontinua* si, para toda serie $\sum_1^\infty x_n$ que es subserie convergente en E, se tiene que $\sum_1^\infty T x_n$ converge (incondicionalmente) en F y

$$\sum_1^\infty T x_n = T\left(\sum_1^\infty x_n\right).$$

Es claro que esta última condición es consecuencia de las dos primeras si T tiene gráfica cerrada.

Si $T: E \longrightarrow F$ es débilmente continua, e. d., continua para las topologías $\sigma(E, E')$ y $\sigma(F, F')$, y si F es secuencialmente completo, se deduce del teorema de Orlicz-Pettis que T es subcontinua.

14. Teorema.—*Sean* E *y* F *e. l. c. s. y además* F *un espacio* $\Gamma_r(l_0^\infty)$ *secuencialmente completo. Si* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal con gráfica cerrada y* F *no contiene a* l^∞, *e. d., no contiene un subespacio isomorfo a* l^∞, *entonces* T *es subcontinua.*

Demostración.—Sea $\sum_1^\infty x_n$ subserie convergente en E. Definamos $S: l_0^\infty \longrightarrow E$ por

$$S(a) = S((a_n)) = \sum_1^\infty a_n x_n.$$

Como

$$|x'(S(a))| \leq \sum_1^\infty |x' x_n| < \infty$$

para todo $a \in l_0^\infty$ con $\|a\| \leqslant 1$ y todo $x' \in E'$, S es continua. Entonces $T\,S: l_0^\infty \longrightarrow F$ tiene la gráfica cerrada y, por tanto, es continua por ser F un espacio $\Gamma_r(l_0^\infty)$. Luego, para toda seminorma p de F existe una constante $M_p > 0$ tal que

$$p(T\,S(a)) \leq M_p \,\| a \| \quad (a \in l_0^\infty).$$

Sea

$$\Sigma = \mathcal{P}(\mathbf{N})\,(= 2^{\mathbf{N}}) \quad \text{y} \quad m: \Sigma \to F$$

la aplicación definida por

$$m(A) = T\left(\sum_{n \in A} x_n\right) \quad (A \in \Sigma).$$

Entonces m es una medida vectorial finitamente aditiva, y acotada puesto que

$$p(m(A)) = p(T\,S(\chi_A)) \leq M_p$$

para todo $A \in \Sigma$. Como F no contiene a l^∞, por el teorema de Diestel-Faires para e. l. c. s. (véase Diestel y Uhl [3], pág. 20) se tiene que m es fuertemente aditiva (o exhaustiva) y, por tanto,

$$\sum_1^\infty T x_n = \sum_1^\infty m(\{n\})$$

converge en F, de donde se deduce que T es subcontinua por tener la gráfica cerrada.

El teorema anterior es una mejora de un teorema de Bennett y Kalton [1]. El siguiente es una mejora de un teorema de Valdivia [6].

15. Teorema.—*Sean E y F e. l. c. s. Sea $(F_n)_1^\infty$ una sucesión no decreciente de espacios que cubre a F. Supongamos que, para todo entero* n, *existe una topología $\mathcal{T}_n$ sobre F_n más fina que la original tal que $F_n[\mathcal{T}_n]$ es un espacio Γ_r secuencialmente completo que no contiene a l^∞. Entonces, si $T: E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal con gráfica cerrada, existe un* n *tal que $T(E) \subset F_n$ y $T: E \longrightarrow F_n[\mathcal{T}_n]$ es subcontinua.*

Demostración.—Utilizaremos la misma notación que en el teorema 14. Entonces T S: $l_0^\infty \longrightarrow$ F es una aplicación lineal con gráfica cerrada. Como l_0^∞ es un espacio tonelado de clase 1, existe un n tal que

$$H_n = (T\, S)^{-1}(F_n)$$

es tonelado y denso en l_0^∞. Como la restricción R_n de T S a H_n tiene gráfica cerrada en $H_n \times F_n\,[\mathcal{T}_n]$,

$$R_n : H_n \rightarrow F_n\,[\mathcal{T}_n]$$

es continua y admite una extensión continua

$$\overline{R}_n : l_0^\infty \rightarrow F_n\,[\mathcal{T}_n].$$

Como T S: $l_0^\infty \longrightarrow F$ tiene gráfica cerrada,

$$\overline{H}_n = l_0^\infty \quad \text{y} \quad T\,S = \overline{R}_n$$

sobre H_n, entonces

$$T\,S : l_0^\infty \rightarrow F_n\,[\mathcal{T}_n]$$

es continua. Ahora basta proceder como en el teorema 14.

El siguiente teorema es una mejora de otro de Valdivia [6].

16. Teorema.—*En las mismas condiciones para E y F que en el teorema 15, sean $T: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal con gráfica cerrada, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω,* m: *$\Sigma \longrightarrow E$ una medida vectorial finitamente aditiva acotada. Entonces existe un entero* n *tal que $T \circ$* m: *$\Sigma \longrightarrow F_n\,[\mathcal{T}_n]$ es una medida fuertemente aditiva.*

Demostración.—Definamos S: $l_0^\infty(\Sigma) \longrightarrow$ E por

$$S(a) = \int a\, d\,m \qquad (a \in l_0^\infty(\Sigma)).$$

Como

$$|\, x'(S(a))\,| = |\int a\, d\, x' m\,| \leq \|\, x' m\,\|$$

para todo $a \in l_0^\infty(\Sigma)$ con $\| a \| \leqslant 1$ y todo $x' \in E'$, S es continua. Ahora basta proceder como en el teorema 15 para demostrar que existe un n tal que

$$T\,S : l_0^\infty(\Sigma) \rightarrow F_n[\mathfrak{T}_n]$$

es continua y, por tanto,

$$p(\Gamma \circ m\ A)) = p(\Gamma \quad \chi_A)) \leq M_p$$

para todo $A \in \Sigma$ y toda seminorma p de $F_n[\mathfrak{T}_n]$. Como $F_n(\mathfrak{T}_n)$ no contiene a l^∞ por el teorema de Diestel-Faires resulta que $T \circ m$ es fuertemente aditiva.

17. Teorema.—*Sean E y F e. l. c. s. y además F un espacio* $\Gamma_r(l_0^\infty(\Sigma))$ *secuencialmente completo que no contiene a* l^∞, *siendo* Σ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω. *Si* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal con gráfica cerrada y* $m: \Sigma \longrightarrow E$ *es una medida vectorial finitamente aditiva acotada, entonces* $T \circ m: \Sigma \longrightarrow F$ *es una medida fuertemente aditiva.*

Demostración.—Basta proceder como en los teoremas 14 y 16.

18. Teorema.—*Sean E y F e. l. c. s. y además F un espacio* $\Gamma_r(l^\infty)$ *secuencialmente completo. Si* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal con gráfica cerrada, F no contiene a* l^∞ *y* $\sum_1^\infty a_n x_n$ *es una serie convergente en E para toda sucesión* $(a_n)_1^\infty \in l^\infty$, *entonces* $\sum_1^\infty T x_n$ *converge en F.*

Demostración.—Basta proceder como en el teorema 14.

19. Proposición.—*Sea E un espacio secuencialmente completo o un espacio* $\Gamma_r^{(1)}$. *Entonces, si* $\sum_1^\infty x_n$ *es subserie convergente en E, la serie* $\sum_1^\infty a_n x_n$ *converge en E para toda sucesión* $(a_n)_1^\infty \in l^\infty$.

Demostración.—Sea $S_0: l_0^\infty \longrightarrow E$ la aplicación lineal definida por

$$S_0(a) = \sum_1^\infty a_n x_n$$

para toda sucesión $a = (a_n)_1^\infty \in l_0^\infty$. Entonces por ser E un espacio secuencialmente completo o un espacio $\Gamma_r^{(1)}$ y ser S_0 continua, existe una extensión continua $S: l^\infty \longrightarrow E$ de S_0. Para todo $a \in l_0^\infty$ y todo $x' \in E'$ se tiene

$$x' \; S(a)) = \sum_1^\infty a_n \, x'(x_n) \qquad (a = (a_n)_1^\infty \; .$$

Por tanto, como ambos miembros son funciones continuas en l^∞ que son iguales sobre el subespacio denso l_0^∞ de l^∞, la igualdad vale para todo $a \in l^\infty$. Luego

$$S(a) = \sum_1^\infty a_n \, x_n$$

para la topología σ (E, E'). Entonces por el teorema de Orlicz-Pettis se tiene

$$S(a) = \sum_1^\infty a_n \, x_n$$

en E.

20. Corolario.—*Sean E secuencialmente completo o un espacio* $\Gamma_r^{(1)}$, *y F un espacio* $\Gamma_r(l^\infty)$ *secuencialmente completo. Si* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal con gráfica cerrada y F no contiene a* l^∞, *entonces T es subcontinua.*

Demostración.—Resulta del teorema 18 y de la proposición 19.

21. Teorema.—*Sea E un espacio* Γ_r *secuencialmente completo que no contiene a* l^∞ *y sea* Γ *un subconjunto total de E'. Si* $\sum_1^\infty x_n$ *es una serie en E tal que todas sus subseries son* Γ*-convergentes en el sentido de que para cada subconjunto A de* **N** *existe* $x_A \in E$ *tal que*

$$\sum_{n \in A} x' \, x_n = x' \, x_A$$

para todo $x' \in \Gamma$, *entonces* $\sum_1^\infty x_n$ *es convergente en E. En particu-*

lar, si E es un espacio Γ_r secuencialmente completo, dual F' de un e. l. c. s. F, que no contiene a l^∞, *entonces una medida* $\sigma(F', F)$-*contablemente aditiva sobre una* σ-*álgebra es contablemente aditiva en E.*

DEMOSTRACIÓN.—Definamos una medida vectorial

$$m : \mathcal{P}(\mathrm{N}) \to \mathrm{E} \quad \text{por} \quad m(\mathrm{A}) = x_{\mathrm{A}} \quad (\mathrm{A} \subset \mathrm{N}).$$

En virtud de una generalización del teorema de Dieudonné-Grothendieck del autor de este trabajo para espacios Γ_r (véase [4]), m es una medida vectorial acotada. Como E no contiene a l^∞, el teorema de Diestel-Faires asegura que m es fuertemente aditiva. Entonces

$$\sum_1^\infty x_n = \sum_1^\infty m(\{n\})$$

converge en E.

La segunda afirmación es una inmediata consecuencia de la primera y de la observación que si $m\colon \Sigma \longrightarrow \mathrm{F}'$ es una medida contablemente aditiva para la topología $\sigma(\mathrm{F}', \mathrm{F})$ y $(\mathrm{A}_n)_1^\infty$ es una sucesión disjunta en Σ, entonces $\sum_1^\infty m(\mathrm{A}_n)$ es $\sigma(\mathrm{F}', \mathrm{F})$-convergente a $m\left(\bigcup_1^\infty \mathrm{A}_n\right)$ y, por tanto, convergente a

$$m\left(\bigcup_1^\infty \mathrm{A}_n\right)$$

en $\mathrm{E} = \mathrm{F}'$.

22. TEOREMA.—*Sean E un espacio L F y F un espacio secuencialmente completo. Si* $T\colon E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal con gráfica cerrada y tal que* $T^{-1}(F_0)$ *es cerrado en E para todo subespacio cerrado* F_0 *de F, entonces T es continua.*

DEMOSTRACIÓN.—Si T no fuese continua existiría un subespacio de Fréchet E_0 de E, dotado de una F-norma $\|\cdot\|$, y una seminorma p de F y una sucesión $(x_n)_1^\infty$ en E_0 tales que

$$\|x_n\| \leq 2^{-n} \quad \text{y} \quad p(\mathrm{T}x_n) \geq 1$$

para todo n. Es claro que $\sum_{1}^{\infty} x_n$ es subserie convergente en E_0, pero $\sum_{1}^{\infty} T x_n$ no converge en F. Sea $m: \mathcal{P}(\mathbf{N}) \longrightarrow F$ la medida definida por

$$m(A) = T\left(\sum_{n \in A} x_n\right),$$

que evidentemente no es fuertemente aditiva. Entonces por el teorema de Diestel-Faires para e. l. c. s. existe un isomorfismo topológico $S: l^\infty \longrightarrow F$ y una sucesión disjunta

$$(A_n)_1^\infty \quad \text{en} \quad \Sigma = \mathcal{P}(N)$$

tal que $S(e_n) = m(A_n)$, donde e_n es el n-ésimo vector unidad de l^∞. De aquí resulta que $S(l^\infty)$ es un subespacio cerrado de F y, por tanto,

$$E_1 = T^{-1}(F_1) \cap E_0$$

es un espacio de Fréchet para $F_1 = S(l^\infty)$. Sea T_1 la restricción de T a E_1. Es obvio que $T_1: E_1 \longrightarrow F_1$ es una aplicación lineal con gráfica cerrada entre espacios de Fréchet y, por tanto, continua. Pero esto lleva a una contradicción porque si

$$y_n = \sum_{k \in A_n} x_k,$$

la serie $\sum_{1}^{\infty} y_n$ es subserie convergente en E_0 y, por consiguiente,

$$\sum_{1}^{\infty} T y_n = \sum_{1}^{\infty} m(A_n)$$

sería convergente, así como también $\sum_{1}^{\infty} e_n$ sería convergente en l^∞

23. TEOREMA.—*Sean E y F e. l. c. s. además F un espacio* $\Gamma_r(c_{00})$ *secuencialmente completo. Si* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal con gráfica cerrada y F no contiene a* c_0, *para toda serie* $\sum_{1}^{\infty} x_n$

en E tal que $\sum_{1}^{\infty} | x' x_n | < \infty$ *para todo* $x' \in E'$, *la serie* $\sum_{1}^{\infty} T x_n$ *converge en F.*

DEMOSTRACIÓN.—Procederemos como en el teorema 14. Sea $\sum_{1}^{\infty} x_n$ una serie en E tal que $\sum_{1}^{\infty} | x' x_n | < \infty$ para todo $x' \in E'$. Definamos $S: c_{00} \longrightarrow F$ por

$$S(a) = S((a_n)) = \sum_{1}^{\infty} a_n x_n \qquad (a \in c_{00}).$$

Como

$$| x'(S(a)) | \leq \sum_{1}^{\infty} | x' x_n | < \infty$$

para todo $a \in c_{00}$ con $\| a \| \leqslant 1$ y $x' \in E'$, S es continua. Entonces $T S: c_{00} \longrightarrow F$ tiene gráfica cerrada y, por tanto, es continua por ser F un espacio $\Gamma_r(c_{00})$. Por consiguiente, para toda seminorma continua p de F existe una constante $M_p > 0$ tal que

$$p(T S(a)) \leq M_p \| a \| \qquad (a \in c_{00}).$$

Sea Σ la subálgebra de $\mathscr{P}(N)$ generada por los subconjuntos finitos de $\mathbf{N}$, y $m: \Sigma \longrightarrow F$ la aplicación definida por

$$\begin{aligned} m(A) &= T\Big(\sum_{n \in A} x_n\Big) && \text{si A es finito} \\ &= -T\Big(\sum_{n \in A^c} x_n\Big) && \text{si } A^c = \mathbf{N} \setminus A \text{ es finito.} \end{aligned}$$

Entonces m es una medida vectorial finitamente aditiva, y acotada puesto que

$$p(m(A)) = p(T S(\chi_A)) \leq M_p$$

para todo $A \in \Sigma$. Como F no contiene a c_0, según el teorema de Diestel-Faires para e. l. c. s. se tiene que m es fuertemente aditiva y, por tanto,

$$\sum_{1}^{\infty} T x_n = \sum_{1}^{\infty} m(\{n\})$$

converge en F.

24. TEOREMA.—*Sean E y F e. l. c. s. secuencialmente completos, y además F un espacio* $\Gamma_r(c_0)$. *Si* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal con gráfica cerrada y F no contiene a* c_0, *entonces para toda serie* $\sum_1^\infty x_n$ *en E tal que* $\sum_1^\infty |x' x_n| < \infty$ *para cada* $x' \in E'$, *la serie* $\sum_1^\infty T x_n$ *converge en F.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en el teorema 23, teniendo en cuenta que por ser E secuencialmente completo existe una aplicación lineal y continua $S: c_0 \longrightarrow E$ tal que

$$S(a) = \sum_1^\infty a_n x_n \qquad (a = (a_n)_1^\infty)$$

para todo $a \in c_{00}$.

Cuando $T: E \longrightarrow F$ es débilmente continua se tiene la siguiente generalización análoga del teorema de Bessaga-Pelczyński (véase Diestel y Uhl [3], 22).

25. TEOREMA.—*Sean E y F e. l. c. s. y F secuencialmente completo. Si* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación débilmente continua y F no contiene a* c_0, *entonces para toda serie* $\sum_1^\infty x_n$ *tal que* $\sum_1^\infty |x' x_n| < \infty$ *para cada* $x' \in E'$, *la serie* $\sum_1^\infty T x_n$ *converge en F.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta aplicar el teorema de Bessaga-Pelczyński, teniendo en cuenta que

$$\sum_1^\infty |y' T x_n| = \sum_1^\infty |(T' y') x_n| < \infty$$

para todo $y' \in F'$, siendo T' la transpuesta de T.

Para medidas sobre un álgebra se tiene:

26. TEOREMA.—*Sean E y F e. l. c. s. y además F un espacio* $\Gamma_r(l_0^\infty(\Sigma))$ *secuencialmente completo que no contiene a* c_0, *siendo* Σ *un álgebra de subconjuntos de* Ω. *Si* $T: E \longrightarrow F$ *es una aplicación lineal con gráfica cerrada y* $m: \Sigma \longrightarrow E$ *es una medida vectorial fini-*

tamente aditiva acotada, entonces $T \circ m : \Sigma \longrightarrow F$ *es una medida fuertemente aditiva.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en el teorema 17.

Si E es secuencialmente completo se puede sustituir en el teorema anterior la condición de ser F un espacio $\Gamma_r (l_0^\infty (\Sigma))$ por la de ser un espacio $\Gamma_r (l_0^\infty (\Sigma))$.

Bibliografía

[1] BENNETT, G. y KALTON, N. J. 1972. *Addendum to «FK-spaces containing* c_0». «Duke Math. J.», **39**, 819-821.

[2] BESSAGA, C. y PELCZNSKI, A. 1958. *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces.* «Studia Math.», **17**, 151-164.

[3] DIESTEL, J. y UHL, J. J., Jr. 1977. *Vector measures.* «Amer. Math. Soc.», Providence, I. R.

[4] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. 1980. *Sobre el teorema de Dieudonné-Grothendieck.* «Rev. R. Acad. Ci. Madrid», **74**, 169-171.

[5] VALDIVIA, M. 1971. *Sobre el teorema de la gráfica cerrada.* «Collect. Math.», **22**, 51-72.

[6] — — 1979. *On certain barrelled normed spaces.* «Ann. Inst. Fourier» (Grenoble), **29**, 39-56.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid