[5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. 1978. *Las medidas atómicas y la θ-propiedad de Darboux*. N.º II. Cent. Acad. Cienc. Lisboa, 209-219.
[6] ROLEWICZ, S. 1959. *Some remarks on the space $N(L)$ and $N(l)$*. «Stud. Math.», **18**, 1-9.
[7] — — 1972. *Metric linear spaces*. Monog. Matem., 56. Varsovia.
[8] TURPIN, P:. 1976. *Convexité dans les espaces vectoriels topologiques généraux*. «Dissert. Math.», 131.
[9] WAELBROECK, L. 1973. *Topological Vector Spaces*. Summer School on T. V. S. Lect. Notes in Math., 331. Springer, 1-40.

ALGUNAS PROPIEDADES DEL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DEBILMENTE CONTINUAS SOBRE LOS SUBCONJUNTOS ACOTADOS DE UN ESPACIO DE BANACH (*)

Juan Ferrera Cuesta
Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense

This paper deals on some properties of the space $C_w(E)$ of real weakly continuous functions on bounded subsets of a Banach space E. We consider this space as a space of continuous functions on a topological space endowed with a topology that is finer than the weak topology and that is not in general a vector space topology. With this technique we are able to apply the classical results of Nachbin and Shirota to investigate when $C_w(E)$ is barreled or bornological.

We show that $C_w(E)$ is always barreled and various criteria are given under which it is bornological; specifically we show that if E is a closed subspace either of a WCG space or of the dual of a separable space, $C_w(E)$ is bornological.

E será un espacio de Banach real, $C_w(E)$ denotará el espacio de las funciones reales débilmente continuas sobre los acotados de E, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los débilmente compactos de E. X_n denotará la bola cerrada de radio n en E dotada de la topología $\sigma(E, E')$. X será el límite inductivo de los espacios topológicos X_n.

(*) Presentada en la sesión celebrada el 5 de marzo de 1980.

Un espacio de Banach E se dice débilmente compactamente generado (WCG) si existe un subconjunto débilmente compacto de tal forma que su expansión lineal es densa en E.

Un compacto Hausdorff se dice de Eberlein si es homeomorfo a un subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach.

Dado un espacio topológico Y, diremos que $C \subset Y$ es relativamente pseudocompacto si toda función continua sobre Y a valores reales, está acotada en C.

LEMA 1.—El espacio $C_w(E)$ es isomorfo al espacio $C(X)$ dotado de la topología compacto abierta.

LEMA 2.—El espacio X es completamente regular y Hausdorff.

DEMOSTRACIÓN.—Es Hausdorff trivialmente. Veamos que es completamente regular. Sea $C \subset X$ cerrado, $x \notin C$; $C_n = C \cap X_n$. $\overline{C}_n$ la adherencia en $(B''_n, \sigma(E'', E')|_{B''})$. $x \notin \overline{C}_n$. Podemos considerar que $x \in X_1$ sin perder generalidad. Como B''_1 es completamente regular se tiene que existe $\overline{f}_1 : B''_1 \longrightarrow [0, 1]$ tal que

$$\overline{f}_1(\overline{C}_1) = \{0\}, \quad \text{y} \quad \overline{f}_1(x) = \{1\}.$$

Dada $\overline{f}_1$ definimos

$$\overline{f^*}_2 : B_1'' \cup \overline{C}_2 \longrightarrow [0, 1]$$

por:

$$\overline{f^*}_2(y) = \overline{f}_1(y) \quad \text{si} \quad y \in B_1'';$$

$$\overline{f^*}_2(y) = 0 \quad \text{si} \quad y \in \overline{C}_2$$

$\overline{f^*}_2$ está bien definida y es continua; como $B''_1 \cup C_2$ es cerrado y B''_2 es normal, $\overline{f^*}_2$ se extiende a $\overline{f}_2 : B''_2 \longrightarrow [0, 1]$. Repetimos el proceso, consideramos $f_n = \overline{f}_n|_{X_n}$ y definimos

$$f : X \to [0, 1] \quad \text{por} \quad f(z) = f_n(z)$$

siendo $z \in X_n$. f es continua, y verifica: $f(C) = \{0\}$, $f(x) = \{1\}$.

PROPOSICIÓN 3.—Si E es WCG, entonces $C_w(E)$ es bornológico.

DEMOSTRACIÓN.—Si E es WCG, entonces es débilmente Lindeloff [5], de donde se sigue que X es Lindeloff y por tanto realcompacto ([3], pág. 115). Luego C_w (E) es bornológico (lemas 1 y 2, [4]).

TEOREMA 4.—Si E es dual de un espacio separable, entonces C_w (E) es bornológico.

DEMOSTRACIÓN.—Sea E = F' con F separable. Sea (x_n) una parte densa numerable de F. Por ser densa, separa puntos de E. Luego existe una función

$$\begin{aligned} f \colon X &\longrightarrow R^N \\ x' &\longmapsto (\langle x_n, x' \rangle)_{n \in N} \end{aligned}$$

que es continua e inyectiva. Por otra parte R^N es realcompacto, y los puntos de R^N son conjuntos G_δ, luego todos los subespacios de R^N son realcompactos, de donde se sigue que X es realcompacto ([3], pág. 122) y por tanto C_w (E) bornológico.

Este teorema resuelve entre otros el problema del espacio l^∞, ya que dicho espacio si bien es débilmente realcompacto, no es débilmente Lindeloff (ni siquiera débilmente normal) ([1], págs. 12-13).

LEMA 5.—Si E es tal que el espacio asociado X (X_E) es realcompacto, entonces para todo $F \subset E$ subespacio vectorial cerrado, el espacio asociado X_F es realcompacto.

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{tikzcd} X_1^E \arrow[r, hook] & X_2^E \arrow[r, hook] & \dots \arrow[r, hook] & X_E \\ X_1^F \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & X_2^F \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \dots \arrow[r, hook] & X_F \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

i es inyectiva y continua. Si $C \subset X_F$ es cerrado, entonces para cada $M \in N$, $C \cap X_n^F$ es cerrado, de donde se sigue, por ser X_n^F cerrada en X_n^E que $C \cap X_n^E = C \cap X_n^F$ es cerrado; luego C es cerrado en X_E. Es decir, X_F es un subespacio topológico cerrado de X_E. Luego si X_E es realcompacto, lo será también X_F ([3], pág. 119).

COROLARIO 6.—Sea E un subespacio vectorial cerrado de un espacio WCG o de un espacio dual de un espacio separable. Entonces C_w (E) es bornológico.

COROLARIO 7.—Sea E tal que la bola unidad del dual dotada de la topología débil estrella es un compacto de Eberlein. Entonces C_w (E) es bornológico.

DEMOSTRACIÓN.—E es un subespacio vectorial cerrado del espacio de funciones reales continuas sobre dicho compacto, que es un espacio WCG ([2], p. 146).

PROPOSICIÓN 8.—C_w (E) es tonelado.

DEMOSTRACIÓN.—Sea K relativamente pseudocompacto y cerrado en X. Al ser relativamente pseudocompacto, existe $n \in N$ tal que $K \subset X_m$, luego K es débilmente cerrado en E; además es débilmente relativamente pseudocompacto en E por ser toda función débilmente continua sobre E, continua sobre X. Luego K es débilmente compacto en E [6] y por tanto $K \subset X$ es compacto. Luego C_w (E) es tonelado [4].

Bibliografía

[1] CORSON, H. H. 1961. *The weak topology of a Banach Space*. «Trans. Amer. Math. Soc.», **101**, 1-15.

[2] DIESTEL, J. 1975. *Geometry of Banach Spaces-Selected Topics*. Lecture Notes in Math. 485, Springer-Verlag, New York.

[3] GILLMAN, L. & JERISON, M. 1960. *Rings of continuous functions*. Van Nostrand, New York.

[4] NACHBIN, L. 1954. *Topological vector spaces of continuous functions*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **40**, 471-474.

[5] TALAGRAND, M. 1975. *Sur une conjecture de H. H. Corson*. «Bull. Sci. Math.» **(2) 99**, 211-212.

[6] VALDIVIA, M. 1977. *Some new results on weak compactness*. «Journal of Funct. Anal.», **24**, 1-10.