SOBRE ESPACIOS DE ORLICZ $L^{\Phi}(X, \mu, E)$ LOCALMENTE ACOTADOS (*)

Francisco Hernández Rodríguez
Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Complutense

Let $L^{\Phi}(X, \mu, E)$ be the Orlicz space of totally measurable vector functions which are Φ-integrable on a measure space (X, μ). It is interesting to know suitable characterizations to determine when $L^{\Phi}(X, \mu, E)$ is locally bounded. If μ is finite, not atomic and Φ satisfies the Δ_2-condition, S. Rolewicz [6] characterized the locally bounded spaces $L^{\Phi}(X, \mu, K)$ by the condition $\Phi \mid \Phi(0+) = 0$. (See other conditions in [2], [8], [9]).

In this note we give a simple condition that an Orlicz function must verify for $L^{\Phi}(X, \mu, E)$ to be locally bounded when μ is a finite measure (atomic or not). We prove (cf. Th. 3) that if there exists $p > 0$ with

$$\varliminf_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\Phi(x y)}{x^{p} \Phi(y)} > 0,$$

then L^{Φ} is locally bounded. We also show that L^{Φ} is non-locally bounded provided

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\Phi(x y)}{x^{p} \Phi(y)} = 0$$

for every $p > 0$.

Sea (X, μ) un espacio de medida positiva y $(E, \|)$ un espacio de Banach. Dos funciones de X en E se identifican cuando coinciden en casi todo punto. Denotemos por T M (E) el espacio de las funciones vectoriales totalmente medibles con la topología de la convergencia en medida ([1] pág. 329). Sea Φ una función de Orlicz, es decir, una función de R^+ en R^+ no decreciente, con $\Phi(0) = 0$ con-

(*) Presentada en la sesión celebrada el 5 de marzo de 1980.

tinua por la izquierda si $t > 0$ y continua en 0. El espacio de Orlicz

$$L^{\Phi}(X, \mu, E) = L^{\Phi}(E)$$

es el espacio de las funciones de X en E totalmente medibles tales que existe $s > 0$ verificando

$$\lambda_f(s; \Phi) = \int_X \Phi\left(\frac{|f|}{s}\right) d\mu < \infty .$$

L^{Φ} (E) con la F-norma

$$\rho(f; \Phi) = \inf. \{s + \lambda_f(s; \Phi : s > 0\}$$

es un F-espacio, es decir, un espacio vectorial topológico metrizable completo ([4], [8]), que admite como base de entornos de 0 los conjuntos $r\, B^{\Phi}(r)$ para $r > 0$, donde

$$B^{\Phi}(r) = \left\{ f \in L^{\Phi}(E) : \int_X \Phi(|f|)\, d\mu < r \right\}.$$

La inclusión $L^{\Phi}(E) \subsetneq T\,M\,(E)$ es siempre continua y para Φ acotada y μ finita los espacios $L^{\Phi}(E)$ y $T\,M\,(E)$ coinciden como e. v. t. ([4]). Si Φ verifica la llamada Δ_2-condición (existe $c > 0$ y $x_0 > 1$ con $\Phi(2x) \leqslant c\,\Phi(x)$ para $x > x_0$) entonces

$$L^{\Phi}(E) = \left\{ f \in T\,M\,(E) : \int_X \Phi(|f|)\, d\mu < \infty \right\}$$

y tiene como base de entornos de 0 los conjuntos $\{B^{\Phi}(r)\}_{r>0}$.

Un e. v. t. separado se dice localmente acotado (o cuasi-normable) cuando posee un entorno de 0 acotado. Se sabe ([7] pág. 61) que todo e. v. t. localmente acotado es localmente p-convexo para un $p > 0$. Si (X, μ) es finita existe una descomposición $X = X_0 \cup H$ en dos conjuntos medibles donde X_0 es la parte no atómica y H es unión numerable de átomos A_n disjuntos dos a dos, es decir:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup X_0$$

(No consideraremos el caso cuando el número de átomos es finito). Diremos que μ es puramente atómica si todo subconjunto medible que no contiene átomos tiene medida nula. Para Φ y Ψ dos funciones de Orlicz denotaremos, siguiendo a [8], por

$$\Phi \mid \Psi (u) = \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{\Phi (x)}{\Psi (x u)}$$

y por

$$\Phi \mid \Psi (0+) = \inf_{u > 0} \Phi \mid \Psi (u).$$

PROPOSICIÓN 1.—*Sea μ finita. Si Φ y Ψ son dos funciones de Orlicz con $\Phi \mid \Psi (0+) < \infty$ entonces $L^{\Psi}(E) \subsetneq L^{\Phi}(E)$ con continuidad.*

PROPOSICIÓN 2.—*Sea μ finita y*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup X_0$$

con A_n μ-átomos de medida α_n. Si μ no es puramente atómica o

$$\underline{lim}_{n \to \infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} > 0,$$

donde

$$\beta_n = \sum_{k \geq n+1} \alpha_k,$$

entonces $L^{\Psi}(E) \subsetneq L^{\Phi}(E)$ con continuidad si y sólo si

$$\Phi \mid \Psi (0+) < \infty .$$

La proposición 1 se deduce del teorema de la gráfica cerrada y de verificarse la inclusión conjuntista ([4], [8]). La proposición 2 se obtiene de la proposición 1 y utilizando que en ambos casos μ posee la θ-propiedad de Darboux (R.-Salinas [5]).

TEOREMA 3.—*Si μ es finita y existe $p > 0$ tal que*

$$\underline{lim}_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\Phi (x y)}{x^p \Phi (y)} > 0$$

entonces $L^{\Phi}(E)$ es localmente acotado.

Demostración.—Podemos suponer sin restricción que existe $p > 0$ tal que

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\Phi(x y)}{x^p \Phi(y)} = \infty ;$$

existirá entonces $t_0 > 1$ tal que $\Phi(x y) > x^p \Phi(y)$ [A] para $x y > y > t_0$. Consideremos la función $\Psi(t)$ definida por

$$\Psi(t) = \begin{cases} \Phi(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^p & \text{si} \quad t \in [0, t_0] \\ \Phi(t_0^{n+1})\left(\frac{t}{t_0^{n+1}}\right)^p & \text{si} \quad t \in (t_0^n, t_0^{n+1}] \quad \text{para} \quad n \in \mathrm{N}. \end{cases}$$

Ψ es una función de Orlicz ya que es continua por la izquierda en $t > 0$, y es no decreciente; pues por [A] para $t_0^n < t$ se tiene que

$$\Psi(t) = \Phi(t_0^{n+1})\left(\frac{t}{t_0^{n+1}}\right)^p \geq \Phi(t_0^n)\left(\frac{t}{t_0^{n+1}}\right)^p t_0^p > \Psi(t_0^n).$$

Ψ verifica $\Psi(x y) > x^p \Psi(y)$ [B] si $x y > y > 0$; pues para

$$t_0^n < y \leq t_0^{n+1}, \qquad t_0^s < x y \leq t_0^{s+1}$$

con $s = n + r \geqslant n$, como

$$\Phi(t_0^{s+1}) \geq t_0^{rp} \Phi(t_0^{n+1})$$

se tiene que

$$\Psi(x y) > \Phi(t_0^{n+1})\, t_0^{rp} \left(\frac{x y}{t_0^{s+1}}\right)^p = x^p \Phi(t_0^{n+1})\left(\frac{y}{t_0^{n+1}}\right)^p = x^p \Psi(y)$$

Además se verifica que

$$\Phi \mid \Psi(1) < t_0^p \quad \text{y} \quad \Psi \mid \Phi(t_0) < 1;$$

luego se sigue de la proposición 1 que $L^\Phi(E) = L^\Psi(E)$ como e. v. t. Sea ahora

$$\{V_r = r\, B^\Psi(r)\}_{r > 0}$$

la base de entornos de 0 de $L^\Psi(E)$. Dado un V_r, cualquier entorno de la forma V_{xpr} con $x > 1$ es absorbido por V_r; pues si $f \in V_{xpr}$, es decir,

$$\int_X \Psi\left(\frac{|f|}{x^p r}\right) d\mu < x^p r$$

como por [B],

$$\Psi\left(\frac{|f|}{x^p r}\right) \geq x^p \Psi\left(\frac{|f|}{x^{1+p} r}\right)$$

se tiene que

$$\int_X \Psi\left(\frac{|f|}{r x^{1+p}}\right) d\mu \leq \int_X \frac{1}{x^p} \Psi\left(\frac{|f|}{r x^p}\right) d\mu < r.$$

Luego $f \in x^{p+1} V_r$, es decir, $V_{xpr} \subset x^{p+1} V_r$ para $x > 1$ y $r > 0$. Se tiene entonces que V_r absorbe cualquier entorno V_ε de 0 y $V_\varepsilon = \varepsilon B^{\Psi}(\varepsilon)$ es acotado.

El siguiente resultado es un recíproco del teorema anterior. Para demostrarlo hemos usado el concepto de «galbe» G (F), o convexidad generalizada, de un e. v. t. F desarrollado por P. Turpin en [8]. G (F) es el espacio de todas las sucesiones $a = (a_n) \in K^N$ tales que para cada entorno U de 0 existe un entorno V de 0 con

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n V = \bigcup_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n V \subset U$$

Si F es localmente p-convexo entonces $l^p \subset G(F)$ ([8] pág. 59).

TEOREMA 4.—*Si* μ *es finita y*

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\Phi(xy)}{x^p \Phi(y)} = 0$$

para todo $p > 0$ *entonces* $L^\Phi(E)$ *no es localmente acotado.*

DEMOSTRACIÓN.—Consideremos la función

$$\gamma(u) = \inf_{x \geq 1} \frac{\Phi(x)}{\Phi(x/u)}, \qquad \text{si} \quad u > 0$$

$$\gamma(0) = 0$$

Se verifica que G (L^{Φ}) está contenido en el espacio de sucesiones de Orlicz l^{Υ} para Φ no acotada. Se puede demostrar también que l^{Υ} está contenido en $\bigcap_{p>0} l^p$; el resultado se sigue del teorema de Aoki-Rolewicz ([7], pág. 61). Cuando Φ está acotada es conocido que T M (E) no es localmente acotado ([6], [8]).

COROLARIO 5.—*Sea* μ *finita no puramente atómica y* Φ *verifica la* Δ_2-*condición. Si*

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\Phi(x y)}{x^p \Phi(y)} = 0$$

para todo p > 0 *entonces* L^{Φ} (*E*) *no es localmente seudoconvexo.*

DEMOSTRACIÓN.—Se sigue del teorema anterior y de ([7], pág. 72).

Cuando μ es puramente atómica y en las hipótesis del teorema 4, se tiene, (por [3], pág. 65), que L^{Φ} (E) no es localmente convexo a excepción de cuando Φ está acotada que entonces L^{Φ} (E) es el espacio $\prod_{1}^{\infty}$ E localmente convexo. Nosotros no conocemos (creemos que no) si puede existir una función de Orlicz y un (X, μ) puramente atómico y finito verificando

$$\varliminf_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{\Phi(x y)}{x^p \Phi(y)} = 0$$

para todo $p > 0$ y L^{Φ} (X, μ, E) localmente acotado.

Referencias

[1] DUNFORD, J. y SCHWARTZ, J. 1958. *Linear Operators*. Part I. Intersc.

[2] FISCHER, W. y SCHOLER, U. 1976. *A characterization of non-locally bounded Orlicz spaces by power series with finite domain of convergence*. «Comm. Math.», **19**, 67-72.

[3] HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, F. 1978. *Espacios de Orlicz de funciones vectoriales sin convexidad local. Dualidad*. Tesis doctoral, Madrid.

[4] PEREDA-VINUESA, P. 1975. *Espacios de Orlicz. Convexidad local*. Tesis doctoral, Madrid.

[5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. 1978. *Las medidas atómicas y la θ-propiedad de Darboux*. N.° II. Cent. Acad. Cienc. Lisboa, 209-219.
[6] ROLEWICZ, S. 1959. *Some remarks on the space $N(L)$ and $N(l)$*. «Stud. Math.», **18**, 1-9.
[7] — — 1972. *Metric linear spaces*. Monog. Matem., 56. Varsovia.
[8] TURPIN, P:. 1976. *Convexité dans les espaces vectoriels topologiques généraux*. «Dissert. Math.», 131.
[9] WAELBROECK, L. 1973. *Topological Vector Spaces*. Summer School on T. V. S. Lect. Notes in Math., 331. Springer, 1-40.

ALGUNAS PROPIEDADES DEL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DEBILMENTE CONTINUAS SOBRE LOS SUBCONJUNTOS ACOTADOS DE UN ESPACIO DE BANACH (*)

Juan Ferrera Cuesta
Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense

This paper deals on some properties of the space $C_w(E)$ of real weakly continuous functions on bounded subsets of a Banach space E. We consider this space as a space of continuous functions on a topological space endowed with a topology that is finer than the weak topology and that is not in general a vector space topology. With this technique we are able to apply the classical results of Nachbin and Shirota to investigate when $C_w(E)$ is barreled or bornological.

We show that $C_w(E)$ is always barreled and various criteria are given under which it is bornological; specifically we show that if E is a closed subspace either of a WCG space or of the dual of a separable space, $C_w(E)$ is bornological.

E será un espacio de Banach real, $C_w(E)$ denotará el espacio de las funciones reales débilmente continuas sobre los acotados de E, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los débilmente compactos de E. X_n denotará la bola cerrada de radio n en E dotada de la topología $\sigma(E, E')$. X será el límite inductivo de los espacios topológicos X_n.

(*) Presentada en la sesión celebrada el 5 de marzo de 1980.