

**METHODE UNITAIRE D'ETUDE DES DIFFERENTES
CLASSES DE PROBLEMES «BIEN POSES» CONCERNANT
CERTAINS SYSTEMES INTEGRO-DIFFERENTIELS
NON LINEAIRES AUX OPERATEURS POLYVIBRANTS
ET AUX AUTOCONTROLES DANS LES LIMITES
D'INTEGRATION**

Ubiratan D'Ambrosio (1), Léonid E. Krivochéine (2),
Démètre J. Mangeron (3) et Masaru Shimbo (4)

Dédié aux Écoles de Mathématiques de l'Espagne,
de Portugal et de l'Amérique Latine, dont les fruits
surpassent d'or et déjà la promesse des fleurs.

Recibido: 10-X-79

PRÉSENTÉ PAR L'ACADÉMICIEN DARIÓ MARAVALL

Se exponen investigaciones sobre sistemas polivibrantes, caracterizados por la presencia de operadores de orden superior en las derivadas parciales, mediante un método unitario de ecuaciones integrales que conduce a teoremas de existencia, unicidad, determinación de soluciones aproximadas, valoración de errores cometidos, estabilidad de soluciones, para toda una clase de problemas «bien planteados».

Lors de ces quinze dernières années a été publié un assez grand nombre de travaux, dûs aux divers auteurs, [1]-[5], consacrés aux études théoriques et aux différentes applications. concernant cer-

(1) Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil.

(2) Université d'État de la R. S. S. de Kirgizie, Frunze, U. R. S. S.

(3) Institut Polytechnique de Jassy-Iasi, Roumanie. A présent: Professor Visitante, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas-SP, Brasil.

The author wishes to express his warmest thanks to the IMECC da UNICAM for the invaluable conditions offered to him to develop his work in.

(4) Division of Information Engineering. Hokkaido University, Sapporo, Japan.

taines classes d'équations aux dérivées partielles ou bien d'équations intégrodifférentielles, linéaires ou non linéaires, caractérisées dans des champs de m variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_m par la présence des opérateurs différentiels d'ordre supérieur, à savoir :

$$M_m^{(n)} \equiv \partial^{m n} / \partial x_1^n \partial x_2^n \dots \partial x_m^n \quad (5).$$

Ces opérateurs, appelés *opérateurs polyvibrants* (6) dans les études initiés par l'un des auteurs il y a presque un demi-siècle, [6]-[9], et consacrées à la résolution, pour la première fois dans la littérature mathématique, des problèmes à la frontière « bien posés » pour les équations aux caractéristiques réelles et multiples, dont le prototype est le système

$$\begin{aligned} & M_m^{(1)} [A(x) M_m^{(1)} u(x) + \lambda B(x) u(x)] + \\ (*) & + \lambda [B(x) M_m^{(1)} u(x) + C(x) u(x)] = 0, \\ & u(x) \Big|_{\partial R} = 0, \end{aligned}$$

ou bien son équivalent variationnel

$$\begin{aligned} D[f(x)] &= \min_f \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} A(x) [M_m^{(1)} f(x)]^2 dx, \quad f(x) \Big|_{\partial R} \\ (**) & \\ \mathcal{J}[f(x)] &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} [2B(x) f(x) M_m^{(1)} f(x) + C(x) f^2(x)] dx = 1, \end{aligned}$$

(5) Évidemment, l'opérateur $M_m^{(n)}$ se réduit pour $m = 2$ et $n = 1$ à l'opérateur de la propagation des ondes et figure par suite dans les modèles mathématiques de très nombreux phénomènes de la nature, que l'on continue à approfondir de nos jours. Voir, par ex., pour n'en citer que des plus récents, sauf toute une série de volumes dus à l'Acad. Dario Maravall, les volumes: «7.º Seminário Brasileiro de Análise», Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1978 et «Travaux du Premier Colloque National de Mécanique des fluides», Institut Polytechnique de Passy, 1978.

(6) Somme toute, les opérateurs polyvibrants, appelés aussi «polywave», «polyvibrating», «poliondose», «polivibranti» etc., selon les langues utilisées dans la rédaction des travaux respectifs, ont été nommés par différents auteurs, [18]-[22], «opérateurs de Mangeron» et les «équations correspondantes», «équations de Mangeron», [23]-[24].

et dont la nouveauté consiste dans le fait que $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$,

$$R = \{ a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \} \quad \text{et} \quad M_m^{(1)} \equiv \partial^m / \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m,$$

ont conduit, entre autres, à l'extension du problème de Sturm-Liouville (7) à l'édification d'une *théorie unitaire des fonctions spéciales polyvibrantes*, [10]-[11], qui en constitue une généralisation de la méthode des fonctions «F» de Truesdell, à la construction automatique des surfaces de forme quelconque, [12]-[14], à l'étude de certains phénomènes électriques qui ont lieu dans le plasma [15], ou bien à l'établissement d'une nouvelle classe d'inégalités variationnelles, [16]-[17].

1. Considérons, de tout un ensemble de problèmes qui s'encadrent dans le titre de la présente Note et tout en nous bornant aux espaces à deux variables indépendantes, le système suivant constitué de l'équation intégré-différentielle non linéaire aux opérateurs polyvibrants et aux autocontrôles dans les limites d'intégration

$$\begin{aligned} M_2^{(2)} [u(x, t)] &= \\ &= f \left\{ x, t, u(x, t), \quad M_2^{(1)} [u(x, t)], \quad M_2^{(2)} [u(x, t)], \right. \\ &\quad \int_a^{r(x, u, M_2^{(2)} [u])} \mathcal{K}(x, t, \xi, u(\xi, t), u'_\xi(\xi, t), u'_t(\xi, t), \\ &\quad \left. M_2^{(1)} [u(\xi, t)], \quad M_2^{(2)} [u(\xi, t)]) d\xi \right\} \equiv E [u], \end{aligned} \tag{1}$$

(7) Il vaut la peine de souligner le fait que le travail [6], dû à l'un des auteurs de cette Note, a été mis à la base non seulement de l'étude des *extensions polyvibrantes* du problème de Sturm-Liouville (*) ou bien de son équivalent variationnel (**), mais aussi à des *extensions ultérieures polyharmoniques et polycaloriques*, dont les fondements ont été mis, respectivement, par Mauro Picone [27] —Maître à nous tous— et par Miron Nicolescu [27] et continués de nos jours surtout par B. A. Bondarenko et ses collaborateurs, [28]-[29], tandis que l'on doit à l'École Kirgize, L. E. Krivochéine et ses collaborateurs en tête, l'étude systématique de différents systèmes intégré-différentiels, linéaires ou non linéaires, aux arguments retardés et aux opérateurs polyvibrants, polyharmoniques ou bien polycaloriques [30].

En ce que regarde le problème de Sturm-Liouville proprement dit, on trouve nombre de contribution remarquables de M. Picone, dont quelques uns ont été exposés lors de ses conférences tenues auprès des universités brésiliennes (voir,

et des conditions à la frontière

$$u_i^{(i)}(x, \alpha) = \varphi_i(x), \quad (2) \quad u_z^{(i)}(\alpha, t) = \psi_i(t), \quad (3)$$

$$\varphi_i^{(i)}(\alpha) = \psi_i^{(i)}(\alpha) = q_i = \text{const}, \quad i = 0, 1, \quad (4)$$

où l'on a mis

$$r(x, u, M_2^{(2)}[u]) \equiv r\left(x, \int_{\alpha}^{\gamma} N(x, \bar{t}, u(x, \bar{t}), M_2^{(2)}[u(x, \bar{t})]) d\bar{t}\right),$$

$$M_2^{(1)}[u(x, t)] \equiv \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t}, \quad M_2^{(2)}[u(x, t)] \equiv \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2},$$

et où les fonctions données

$$f(x, t, l_1, \dots, l_4), \quad K(x, t, \xi, l_5, \dots, l_9),$$

$$r(x, l_1, l_{10}), \quad N(x, \bar{t}, l_{11}, l_{12}),$$

sont continues, respectivement, dans les domaines

$$D_1 = D \times [a_i \leq l_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, 4], \quad D = [a \leq x \leq b] \times [a \leq t \leq \gamma],$$

$$D_2 = D \times [a \leq \xi \leq r(x, l_1, l_{10}) \leq b] \times [a_i \leq l_i \leq b_i, \quad i = 5, \dots, 9],$$

$$D_3 = [a \leq x \leq b] \times [a_{10} \leq l_{10} \leq b_{10}] \times [a_i \leq l_i \leq b_i],$$

$$D_4 = [a \leq x \leq b] \times [a \leq \bar{t} \leq \gamma] \times [a_i \leq l_i \leq b_i, \quad i = 11, 12],$$

et y satisfont, par rapport aux l_i les conditions de Lipschitz, ayant pour coefficients respectifs des fonctions continues et non négatives

$$L_{if}(x, t), \quad i = 1, \dots, 4, \quad L_{iK}(x, t, \xi), \quad i = 1, \dots, 5, \quad L_{ir}(x), \quad i = 1, 2,$$

et

$$L_{iN}(x, \bar{t}), \quad i = 1, 2,$$

par ex. M. Picone, dans le volume: *Duodecim doctorum virorum vitae et operum notitia*. Pont. Acad. Scien., Città del Vaticano, MCMLXX, tandis que'une extension remarquable de ce problème est donnée par Yu. D. Salmanov: *The Sturm-Liouville problem for a general linear differential equation*. *Differensial'nye Uravneniya*, Vol. 1, No. 10, 1965, pp. 1321-1337.

tandis que les fonctions $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(t)$, $i = 0, 1$, sont supposées continues, données et douées de dérivées continues de deux premiers ordres, par rapport aux arguments $x \in [a, b]$ et $t \in [a, \gamma]$, respectivement.

Notre méthode unitaire d'étude de la résolution univoque du problème (1)-(4) dans la classe de fonctions $C^{(2,2)}(D)$ et de la construction effective des solutions approchées, de l'évaluation des erreurs commises et de la stabilité de ces solutions consiste dans la transformation du système considéré dans un système équivalent d'équations intégrales, à savoir

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \\
 & \varphi_0(x) + \psi_0(t) - g_0 + [\varphi_1(x) - \varphi_1(a)](t - a) + [\psi_1(t) - \psi_1(a)](x - a) - \\
 & - g_1(x - a)(t - a) + \int_a^x \int_a^t (x - \xi)(t - \tau) v(\xi, \tau) d\tau d\xi \equiv A[v], \quad (5)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 v(x, t) = f \left\{ x, t, A[v(x, t)], M_2^{(1)}(A[v(x, t)]), v(x, t), \right. \\
 \left. \int_a^{\tau(x, A[v], v)} \mathcal{K}(x, t, \xi, A[v(\xi, t)], A'_\xi[v(\xi, t)], A'_t[v(\xi, t)], v(\xi, t)) d\xi \right\} \equiv B[v], \quad (6)
 \end{aligned}$$

et dans l'étude de celui-ci dans le cadre des espaces fonctionnels adéquats.

Il est bien claire que si l'équation intégrale (6) possède une solution unique $v = v(x, t) \in C(D)$, le système intégré-différentiel (1)-(4) possède lui aussi, tout en tenant compte de l'équation intégrale (5), une solution unique $u = u(x, t) \in C^{2,2}(D)$ et vice versa, si l'équation intégrale (6) ne possède pas de solutions dans la classe de fonctions $C(D)$, le problème (1)-(4) n'admet pas de solution dans la classe de fonctions $C^{2,2}(D)$.

2. On aboutit dans ce qui suit à l'étude de la capacité de détermination des solutions du système intégré-différentiel considéré (1)-(4), tant qu'à la construction des solutions approchées et à l'évaluation des erreurs commises, dans le cadre des restrictions qui suivent. 1.° On suppose que les opérateurs A et B transforment les

domaines de leurs définitions dans ces domaines mêmes, à savoir

$$\begin{aligned} \forall (x, t) \in \mathcal{D}, v_*(x, t) \in C(\mathcal{D}), \quad a_3 \leq v_*(x, t) \leq b_3 &\Rightarrow \\ \Rightarrow A[v_*] \in C^{2,2}(\mathcal{D}), \quad a_1 \leq A[v_*] \leq b_1; & \\ B[v_*] \in C(\mathcal{D}), \quad a_2 \leq B[v_*] \leq b_3, & \end{aligned}$$

et

$$2^\circ \cdot k = \|B\| < 1, \quad \text{ou l'on a mis} \quad \|\cdot\| = \max_D |\cdot|. \quad (7)$$

Il s'ensuit en vertu du principe de Banach le suivant :

THÉORÈME 1.—*Les conditions 1.° et 2.° ci-dessus étant satisfaites, l'équation intégrale (6) possède une solution et une seule*

$$v = v(x, t) \in C(D),$$

et donc, tout en tenant compte de l'équation (5), le système intégral-différentiel (1)-(4) possède une solution unique

$$u = u(x, t) \in C^{2,2}(D),$$

que l'on obtient comme limite de la succession $\{u_i(x, t)\}_{0^\infty}$, où les fonctions approchées $u_i(x, t)$ s'obtiennent des relations

$$u_i(x, t) = A[v_i], \quad (8)$$

et

$$v_{i+1}(x, t) = B[v_i], \quad i = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

tandis que l'évaluation de l'erreur commise si l'on prend pour la solution exacte $u(x, t)$ du système (1)-(4) sa solution approchée $u_i(x, t)$ s'exprime par l'inégalité

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u_i(x, t)| &\leq \\ &\leq [(x-a)(t-a); 2]^2 k^i \|v_0(x, t) - B[v_0(x, t)]\| : (1-k), \\ \forall (x, t) \in \mathcal{D}, \quad v_0(x, t) \in C(\mathcal{D}), \quad a_3 \leq v_0(x, t) \leq b_3. & \quad (10) \end{aligned}$$

3. Passons maintenant, toujours dans le cadre de la valabilité des restrictions 1.^o et 2.^o ci-dessus, à l'étude de la stabilité de la solution du système intégré-différentiel (1)-(4) si l'on suppose, pour fixer les idées, qu'au lieu des fonctions données à la frontière $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(t)$ du problème (1)-(4) on prenne, respectivement, des fonction perturbées

$$h_i(x) \in C^3[a, b], \quad \lambda_i(t) \in C^3[\alpha, \gamma],$$

telles que les inégalités

$$\begin{aligned} |\varphi_i(x) - h_i(x)| &\leq \varepsilon_i = \text{const}, & |\psi_i(t) - \lambda_i(t)| &\leq \delta_i = \text{const}, & i = 0,1, \\ x \in [a, b], & \quad t \in [\alpha, \gamma], & h_i^{(i)}(a) = \lambda_i^{(i)}(a) = p_i = \\ & = \text{const}, & i = 0,1 & \quad |q_i - p_i| = \sigma_i, & i = 0, \end{aligned}$$

soient satisfaites. On parvient de la sorte au système intégré-différentiel non linéaire suivant, où $w(x, t)$ est la nouvelle fonction inconnue :

$$M_2^{(2)} [w(x, t)] = E[w], \tag{11}$$

$$w_x^{(i)}(x, \alpha) = h_i(x), \tag{12} \quad w_x^{(i)}(a, t) = \lambda_i(t), \tag{13}$$

$$h_i^{(i)}(a) = \lambda_i^{(i)}(a) = m_i, \quad i = 0,1, \tag{14}$$

qui correspond au système d'équations intégrales

$$\begin{aligned} w(x, t) = & \\ = h_0(x) + \lambda_0(t) - p_0 + [h_1(x) - h_1(a)](t - \alpha) + [\lambda_1(t) - \lambda_1(\alpha)](x - a) - \\ - p_1(x - a)(t - \alpha) + \int_a^x \int_\alpha^t (x - \xi)(t - \tau) z(\xi, \tau) d\tau d\xi \equiv A_1[z], \end{aligned} \tag{15}$$

et

$$\begin{aligned} z(x, t) = f \left\{ x, t, A_1[z(x, t)], M_2^{(1)}(A_1[z(x, t)]), z(x, t), \right. \\ \left. \int_a^{r(x, A_1[z], z)} K(x, t, \xi, A_1[z(\xi, t)], A'_{1\xi}[z(\xi, t)], A'_{1t}[z(\xi, t)], z(\xi, t)) d\xi \right\} \equiv B_1[z], \end{aligned} \tag{16}$$

et donc: 3.^o Si les opérateurs non linéaires A_1 et B_1 transforment les domaines de leurs définitions dans ces domaines mêmes et 4.^o Si l'inégalité

$$\psi_1 = \|B_1\| < 1, \quad (17)$$

a lieu, il s'ensuit le théorème suivant concernant l'existence et l'unicité de la solution $w(x, t)$ du système perturbé (11)-(14) et la construction effective de cette solution provenant d'une suite de solutions approchées.

THÉORÈME 2.—*Une fois assurée la validité des restrictions 3.^o et 4.^o et par suite la valabilité du principe de point fixe de Banach, le problème perturbé (11)-(14) possède une solution et une seule*

$$w = w(x, t) \in C^{2,2}(D),$$

qui s'obtient comme limite de la succession $\{w_i(x, t)\}_{i=0}^{\infty}$, où l'on a mis

$$w_i(x, t) = A_1[z_i], \quad (18) \quad z_{i+1}(x, t) = B_1[z_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad (19)$$

tandis que l'ordre du voisinage de la solution $w(x, t)$ et de la solution $w_i(x, t)$ de ce problème s'exprime par l'inégalité

$$\begin{aligned} & |w(x, t) - w_i(x, t)| \leq \\ & \leq [(x-a)(t-a) : 2]^2 k_1^i \|z_0(x, t) - B_1[z_0]\| : (1 - k_1) \equiv R_{2i}(x, t) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \quad (20) \end{aligned}$$

4. Passons maintenant à l'évaluation des modules des différences

$$u(x, t) - w(x, t) \quad \text{et} \quad u(x, t) - w_i(x, t) \quad \text{pour} \quad \forall (x, t) \in D.$$

On obtient de suite des équations intégrales (5) et (15) la relation

$$\begin{aligned} u(x, t) - w(x, t) &= \varphi_0(x) - h_0(x) + \psi_0(t) - \lambda_0(t) - (g_0 - p_0) - \\ & [\varphi_1(x) - h_1(x) - \varphi_1(a) + h_1(a)](t-a) + [\psi_1(t) - \lambda_1(t) - \psi_1(a) + \lambda_1(a)](x-a) - \\ & - (g_1 - p_1)(x-a)(t-a) + \int_a^x \int_a^t (x-\xi)(t-\tau) [v(\xi, \tau) - z(\xi, \tau)] d\tau d\xi \equiv \\ & \equiv g(x, t) + \int_a^x \int_a^t (x-\xi)(t-\tau) [v(\xi, \tau) - z(\xi, \tau)] d\tau d\xi, \quad (21) \end{aligned}$$

et par suite l'inégalité

$$\begin{aligned} & | u(x, t) - w(x, t) | \leq \\ & \leq | g(x, t) | + [(x - a)(t - \alpha) : 2]^2 \| v(x, t) - z(x, t) \| . \end{aligned} \quad (22)$$

On obtient ensuite, tout en tenant compte des restrictions ci-dessus, tant que des évaluations exprimées par les inégalités

$$\begin{aligned} & | A'_x [v(x, t)] - A'_x [z(x, t)] | \leq \\ & \leq | g'_x(x, t) | + [(x - a)(t - \alpha) : 2] \| v(x, t) - z(x, t) \| , \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & | A'_t [v(x, t)] - A'_t [z(x, t)] | \leq \\ & \leq | g'_t(x, t) | + [(x - a)^2 (t - \alpha) : 2] \| v(x, t) - z(x, t) \| \end{aligned} \quad (24)$$

et

$$\begin{aligned} & | M_2^{(1)} (A [v(x, t)]) - M_2^{(1)} (A [z(x, t)]) | \leq \\ & \leq | M_2^{(1)} [g(x, t)] | + (x - a)(t - \alpha) \| v(x, t) - z(x, t) \| , \end{aligned} \quad (25)$$

des équations intégrales (6) et (16), l'inégalité

$$\| v(x, t) - z(x, t) \| \leq \beta_1 + \beta_2 \| v(x, t) - z(x, t) \| ,$$

où β_1 et β_2 sont nombres positifs déterminés. Et donc, on peut conclure par le suivant :

THÉORÈME 3.—*Dans l'hypothèse que l'on a $\beta_2 < 1$ et par suite*

$$\| v(x, t) - z(x, t) \| \leq \beta_1 : (1 - \beta_2) \equiv R_1 , \quad (26)$$

les modules cherchés des différences $u(x, t) - w(x, t)$ et $u(x, t) - w_1(x, t)$ s'expriment par les inégalités

$$| u(x, t) - w(x, t) | \leq | g(x, t) | + [(x - a)(t - \alpha) : 2]^2 R_1 , \quad (27)$$

et

$$\begin{aligned} | u(x, t) - w_1(x, t) | & \leq R_{2i}(x, t) + | g(x, t) | + [(x - a)(t - \alpha) : 2]^2 R_1 , \\ \mathbf{v}(x, t) & \in \mathcal{D} , \end{aligned} \quad (28)$$

respectivement.

REMARQUES.—1. Il est bien claire que l'on peut parvenir à la construction des solutions approchées du systèmes intégral-différentiel (1)-(4) ou bien du système perturbé (11)-(14) par d'autres méthodes que celle des approximations successives de Picard-Picone, utilisée ci-dessus. La succession des relations ci-dessous cristallise l'application de l'une de nos autres méthodes concernant ce sujet. En effet, construisons les solutions approchées $u_i(x, t)$ du système intégral-différentiel (1)-(4) suivant la règle

$$u_i = A [s_i], \quad (29)$$

où l'on a mis

$$s_{i+1} = p B [s_i + q r_i] + d B [s_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad r_i = s_i - B [s_i] \quad (30)$$

et où encore les fonctions p, q, d sont telles que l'on a $p, q, d \in C(D)$ et $p + q \equiv 1$. Il. s'ensuit la succession des inégalités

$$\begin{aligned} \|s_{i+1} - s_i\| &\leq [\|p\| k (\|1 + q\| + k \|q\|) + k \|d\|] \|s_i - s_{i-1}\| \equiv \\ &\equiv k_2 \|s_i - s_{i-1}\| \leq \dots \leq k_2^i \|s_1 - s_0\| \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{k_2 < 1} 0, \end{aligned} \quad (31)$$

dès que l'on aie $k_2 < 1$. On obtient en outre

$$\|v - s_{i+1}\| \leq k_2^{i+1} \|v - s_0\| \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{} 0, \quad (32)$$

et par suite, en définitif,

$$|u(x, t) - u_i(x, t)| \leq [(x - a)(t - a) : 2]^2 k_2^i \|v - s_0\| \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{} 0, \quad (33)$$

2. Il serait intéressant de choisir au lieu des restrictions 1.^o et 2.^o ou bien 3.^o et 4.^o ci-dessus quelques-unes d'autres capables à assurer, dans des espaces fonctionnels adéquats la valabilité de l'un des principes du point fixe de nos jours et par suite conduire aux théorèmes d'existence, d'unicité et de construction des solutions approchées de nos systèmes intégral-différentiels non-linéaires aux opérateurs polyvibrants et aux différents contrôles dans les limites d'intégration. L'un des approches dans cet égard, élaboré lors de nos séminaires à l'IMECC, dans l'esprit de l'exposition actuelle

non classique de l'analyse classique, [25], [26], fera partie d'un travail proposé pour l'insertion dans le *Bulletin de l'Institut Polytechnique de Jassy* (*Buletinul Institutului politehnic din Iași*).

Bibliographie

- [1] NIELSEN, G. M.: *A Mangeron Type Theorem for a triangular domain*. SIAM 1976 Fall Meeting. Abstracts. Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, pp. 18-20.
- [2] LEUNG, K. V. and OGUZTORELI: *Numerical solution of a mixed problem for a polywave equation of Mangeron*. «*Collectanea Mathematica*», vol. XXV, fasc. 3, 1974, pp. 1-11. Seminario Matemático de Barcelona.
- [3] KRIVOCHEÏNE, L. E., LEUNG, K. V. et OGUZTORELI, M. N.: *Problèmes concernant différentes classes d'équations intégré-différentielles non linéaires de Mangeron*. «*Rend. Accad. Naz. dei Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat.*», (8) 56 (1954), pp. 151-156.
- [4] EASWARAN, S.: *A study on certain higher order partial differential equations of Mangeron*. Doctoral Dissertation. Dept. of Math., University of Alberta, 1972.
- [5] FAVARD, J.: *Quelques théorèmes concernant les équations polyvibrantes de Mangeron*. «*Bull. Inst. Polytechn. Jassy, N. S.*» (15) 19, fasc. 1-2, 1965, pp. 17-20.
- [6] MANGERON, D.: *Problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. Conférence donnée à l'Institut pour les applications du Calcul de Mauro Picone. Université de Naples, 1930.
- [7] — — *Problemi al contorno non lineari per equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple*. «*Rend. Accad. Naz. Lincei. Cl. sci. fis., mat. e nat.*» (6) 16 (1932), pp. 305-310.
- [8] — — *Problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*. «*Rend. Accad. sci. fis. e nat. Napoli*» (4) 2 (1932), pp. 29-40.
- [9] — — *Problèmes à la frontière non caractéristiques pour les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. «*C. r. Acad. Sci. Paris*», 204 (1937), pp. 94-96, 544-546, 1022-1024.
- [10] — — et OGUZTORELI, M. N.: *Solutions de certains systèmes polyvibrants exprimées par les fonctions «F» de Truesdell*. «*Bull. Acad. R. Sci. Belgique*» (5), 56 (1970), 449-452. Voir aussi: «*Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*», 67, 1970, pp. 1488-1492.
- [11] — — and OGUZTORELI, M. N.: *Systems of polynomials in several variables. Particular solutions of polywave equations*. «*Soviet Math. Dokl.*», Vol. 13 (1972), No. 5, 1238-1241.

- («Dokl. Akad. Nauk SSSR», Tom 206 (1972), No. 3);
 Vol. 14 (1973), No. 1, 122-126 (Tom 208 (1973), No. 3);
 Vol. 14 (1973), No. 1, 176-181 (Tom 208 (1973), No. 4).
- [12] GORDON, W.: *Automatic Design of free form surfaces*. General Motors Research studies. Warren, Mich., 1968.
- [13] BIRKHOFF, G. and GORDON, W.: *On the draftsman and related equations*. «Intern. J. Approx. Theory», **1**, 1968, 199-208.
- [14] HUIU, C.: *Nouvelles méthodes graphiques et analytiques et applications*. (En Roumain). Thèse de doctorat. Institut Polytechnique de Jassy, 1971.
- [15] OGUZTORELI, M. N.: *Electrostatic oscillations in cold inhomogeneous plasmas with compact support*. «Plasma Physics», **18**, **1**, 1976, 41-50.
- [16] MANGERON, D.: *Problèmes variationnels concernant les équations polyvibrantes*. «C. r. Acad. Sci. Paris», **266**, 1968, 870-873, 976-979, 1050-1052, 1103-1106, 1121-1124.
- [17] MITRINOVIĆ, D.: *Inégalités variationnelles*. Izd. Nauka, Beograd, On y trouve indiquées «inégalités de Mangeron».
- [18] OGUZTORELI, M. N.: *Su un problema misto concernente un'equazione polivibrante d'ordine superiore di Mangeron*. «Rend. Accad. Naz. dei XL, Serie IV-Vol. XX-92° dall'anno di fondazione (1782), Roma, 1973, pp. 3-8.
- [19] EASWARAN, S.: *Mangeron's Polyvibrating Operators and Their Eigenvalues*. «Bull. Acad. Roy. Sci. Belgique» (**5**) **LIX** (1973), pp. 1011-1015.
- [20] MANARESI, F.: *Applicazione di un procedimento variazionale...* «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova», **23** (1954), 163-213.
- [21] BEREZANSKI, YU. M.: *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*. «Amer. Math. Soc. Transl. Monographs», Chap. IV & Addenda, pp. 756, 787, 195....
- [22] SALVADORI, M.: *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*. «Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa» (**2**) **5** (1936), pp. 51-72.
- [23] ROSSI, F. S.: *Sul metodo di Mangeron concernente certi sistemi non lineari alle derivate parziali*. «Bull. Polytechn. Inst. Jassy, N. S.», Vol. 9 (13), fasc. 3-4 (1963), 55-60.
- [24] KAMYTOV, T.: *Applicazione del metodo di Mangeron nello studio di alcuni sistemi integro-differenziali* (en Russe). Trudy I MezHVUZ Konf. Kirg SSR, Frunze, 1966, 23-28.
- [25] D'AMBROSIO, U.: *Uma introdução não clássica à análise clássica*. «Conctato», No. 13, Rio de Janeiro, 1977, pp. 5-8.
- [26] FERNÁNDEZ, D. L.: *Problemas da teoria de aproximação e cálculo das variações*. En cours d'élaboration.
- [27] PICONE, M.: *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali di Fisica Matematica*. «Ann. Sci. Univ. Jassy», Sec. I, **26**, 183-232 (1940) et **27**, 18-26 (1941).

- [28] BONDARENKO, B. A.: *Reseniia teplovogo uravnenia i ego iteratsii*. «Izv. Akad. Nauk UzSSR», Ser. Fiz.-Mat. Nauk, **18, 5** (1974), 18-24.
- [29] — — LEUNG, K. V., MANGERON, D. J. et OGUZTORELI, M. N.: *Operational representation of solutions of a class of polynomial equations*. «Notices Amer. Math. Soc.», Febr. 1977, A-244.
- [30] MANGERON, D. and KRIVOSHEIN, L. E.: *New methods of numerical calculation of various integro-differential equations*. I, II, III. «Revue Roumaine des Sciences Techniques». Série de Mécanique Appliquée, **9**, 1195-1221 (1964); **10**, 3-34 (1965); **11**, 733-756 (1966).