EL ESPACIO DE LA CONVERGENCIA EN MEDIDA Y SU DUAL

José L. Rubio de Francia

Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Ciencias. Zaragoza

Recibido: 1-II-78

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS PALERO

The convergence in measure is studied as the convergence in a suitably defined metric linear space $L^0(m)$ without any restriction on the measure m. A general description of the dual space of $L^0(m)$ is given.

En este trabajo nos proponemos estudiar la convergencia en medida desde el punto de vista del Análisis Funcional, sin ninguna restricción sobre la medida. Sea (X, m) un espacio de medida. Cuando m es finita es bien sabido que el espacio $L^0(m)$ de todas las funciones medibles con la topología de la convergencia en medida es un espacio lineal métrico completo, y su métrica puede definirse mediante cualquiera de estas F-normas:

$$\|f\| = \int_X |f| (1 + |f|)^{-1} \, dm$$

$$\|f\|' = \int_X \inf (1, |f|) \, dm$$

$$\|f\|_0 = \inf \} s > 0 : \lambda_f(s) < s \{$$

donde $\lambda_f(s) = m(\{x \in X : |f(x)| > s\})$ es la función de distribución de f. Si m es finita y no-atómica, $L^0(m)$ proporciona uno de los ejemplos más conocidos de espacio vectorial topológico cuyo dual se reduce a $\{0\}$. Esto es fácil consecuencia del hecho de que el rango de una medida real no atómica es un intervalo, resultado probado por Sierpinski [15] y extendido a medidas finito-dimensionales por Lyapounoff [7] (véanse otras demostraciones de Halmos [4] y Lindenstrauss [6], así como extensiones a medidas vectoriales de Artstein [1], Knowles [5], Olech [11] y Uhl [16]). Cuando m es finita pero tiene átomos, cada uno de ellos define un funcional lineal continuo en $L^0(m)$, y estos funcionales forman una base de Hamel del espacio dual $L^0(m)'$, como fue probado por Marcellán y Rubio [8] e independientemente por Mukherjee y Summers [10].

La convergencia en medida cuando $m(X) = \infty$ ha merecido mucha menor atención, y presenta diferencias significativas con el caso de medida finita. Así, el conjunto de todas las funciones medibles no es ya un espacio vectorial topológico para la convergencia en medida, y entre las F-normas mencionadas anteriormente, sólo $\|\cdot\|_0$ es adecuada ahora. Otra peculiaridad ya observada en [8], es que siempre existen funcionales continuos no nulos sobre $L^0(m)$ en este caso.

Los conceptos básicos sobre el espacio $L^0(m)$ se estudian en la sección 1. La sección 2 contiene una descripción completa de $L^0(m)'$, después de la cual se estudian algunos casos particulares. En las secciones 3 y 4 (*) se estudia $L^0(m)$ como álgebra metrizable (homomorfismos complejos, espectro y cálculo simbólico); como subproducto se obtiene una nueva representación para $L^0(m)'$. Todas las funciones consideradas serán complejas, y dos funciones medibles sobre X se identifican cuando coinciden en casi todas partes. Llamaremos átomo a un subconjunto medible A de X tal que

$$0 < m(A) < \infty$$

y para todo subconjunto medible

$$B \subset A, \quad m(B) = 0 \quad \text{ó} \quad m(B) = m(A).$$

En particular, los conjuntos localmente nulos no se consideran átomos.

(*) Estas secciones aparecerán en un trabajo posterior.

1. El espacio de la convergencia en medida

Dado el espacio de medida (X, m), definimos $\| f \|_0$ como se hizo anteriormente para toda función medible f. Sea S (m) el espacio vectorial de todas las funciones medibles que se anulan fuera de un conjunto de medida finita, y definamos nuestro espacio como

$$L^0(m) = L^\infty(m) + S(m)$$

Obsérvese que, cuando $m(X) < \infty$, es $S(m) = L^0(m) =$ {todas las funciones medibles}.

(1.1) TEOREMA.—*L^0 (m) es el conjunto de todas las* f *tales que* $\| f \|_0 < \infty$, *y* $\| \cdot \|^0$ *es una F-norma en L^0 (m) que lo convierte en un espacio lineal métrico completo. La convergencia en (L^0 (m), $\| \cdot \|_0$) es precisamente la convergencia en medida, y L^0 (m) es el más amplio espacio vectorial topológico para el que esto es cierto.*

DEMOSTRACIÓN.—Las condiciones de F-norma para $\| \cdot \|_0$ se verifican fácilmente, así como la equivalencia

$$\| f_n - f \|_0 \longrightarrow 0 \iff f_n \longrightarrow f \quad \text{en medida}$$

El hecho de que toda sucesión de Cauchy en medida es convergente en medida es conocido, y el resto de las afirmaciones del teorema se deduce de la equivalencia de estas propiedades:

i)

$$\| f \|_0 < \infty$$

ii)

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{con} \quad \| f_1 \|_\infty < \infty \quad \text{y} \quad m(\{ x \in X: \ f_2(x) \neq 0 \}) < \infty$$

iii)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon f = 0 \quad \text{en medida}$$

Ahora bien, i) significa que, para algún

$$s > 0, \quad \lambda_f(s) < \infty,$$

de modo que, designando por f^s la función f truncada a altura s, podemos definir

$$f_1 = f^s \quad \text{y} \quad f_2 = f - f^s$$

probando así ii). Para funciones acotadas, iii) es trivialmente cierto, y también lo es para funciones de S (m) porque la convergencia puntual en un conjunto de medida finita implica la convergencia en medida sobre este conjunto; por tanto: ii) $\Longrightarrow$ iii). Finalmente, si se cumple iii)

$$m(\{x \in X: \varepsilon |f(x)| > 1\}) < 1$$

para algún $0 < \varepsilon < 1$, de manera que

$$\lambda_f(1/\varepsilon) < 1 < 1/\varepsilon, \quad \text{y} \quad \|f\|_0 < 1/\varepsilon, \qquad \text{Q. E. D.}$$

(1.2) Corolario.—*L^∞ (m) es denso en L^0 (m).*

Demostración.—La condición iii) anterior es equivalente a

$$\lim_{s \to \infty} f^s = f \quad \text{en medida}$$

y cada f^s pertenece a $L^\infty(m)$, q. e. d.

Sea $\mathcal{F}$ el filtro en X engendrado por los conjuntos medibles cuyos complementarios tienen medida finita. Una importante seminorma en $L^0(m)$ es la definida por

$$q(f) = \lim \sup_{\mathcal{F}} |f(x)| =$$

$$= \inf \{\sup_{x \notin E} |f(x)| : m(E) < \infty\}$$

Es fácil comprobar que q es una seminorma, y además es continua, pues

$$q(f) \leq \|f\|_0 \leq \|f\|_\infty$$

Obsérvese también que

$$q(f) < \infty \Longleftrightarrow f \in L^0(m).$$

(1.3) TEOREMA.—*La clausura de* S (m) *en* L^0 (m) *es* $q^{-1}(0)$, *y en el espacio cociente* L^0 (m)/$q^{-1}(0)$ *la F-norma inducida por* $\|\cdot\|_0$ *es idéntica a la norma inducida por* q.

DEMOSTRACIÓN.—Es obvio que $\overline{S(m)} \subset q^{-1}(0)$ por la continuidad de q. Por otra parte

$$q(f) \leq \inf\{q(f-h) : h \in \overline{S(m)}\} \leq \inf\{\|f-h\|_0 : h \in \overline{S(m)}\} \leq$$

$$\leq \inf\{\|f-h\|_\infty : h \in \overline{S(m)}\} \leq \inf\{\|f - f\chi_E\|_\infty : m(E) < \infty\} = q(f),$$

por lo que se tiene la igualdad

$$q(f) = \inf\{\|f-h\|_0 : h \in \overline{S(m)}\}$$

que prueba la inclusión $q^{-1}(0) \subset \overline{S(m)}$ a la vez que la última afirmación del teorema, q. e. d.

Cuando m (X) es finita, se tiene $q = 0$ y $S(m) = L^0(m)$ como ya habíamos observado. Para el caso de medida infinita, el interés de la seminorma q es claro a partir de (1.3), pues si m es no-atómica todos los funcionales lineales continuos sobre $L^0(m)$ se anulan en $S(m)$, mientras que para cada $f \notin \overline{S(m)}$ la continuidad de q y el teorema de Hahn-Banach implican la existencia de algún $F \in L^0(m)'$ tal que $F(f) \neq 0$. Así hemos probado lo siguiente:

(1.4) COROLARIO.—*Sea* m $(X) = \infty$. *Entonces* L^0 (m)$'$ *no se reduce a* $\{0\}$ *y, más exactamente, si* $(H_i)_{i \in I}$ *es la familia de todos los hiperplanos cerrados de* L^0 (m), *se tiene*

$$\overline{S(m)} = q^{-1}(0) \supset \bigcap_{i \in I} H_i$$

y cuando m *es no-atómica*

$$\overline{S(m)} = q^{-1}(0) = \bigcap_{i \in I} H_i$$

(1.5) TEOREMA.—*Toda aplicación continua* $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *transforma cualesquiera funciones* $f_1, \ldots, f_n \in L^0$ (m) *en otra función*

$$F(f_1, \ldots, f_n)(x) = F(f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

también perteneciente a L^0 (m). *Además, si* $\mathcal{C}$ ($\mathbb{C}^n$) *representa el espacio de las funciones complejas continuas definidas en* $\mathbb{C}^n$ *con la topología de la convergencia compacta, la aplicación*

$$(F, (f_1, \ldots, f_n)) \longmapsto F(f_1, \ldots, f_n)$$

de $\mathcal{C}(\mathbb{C}^n) \times L^0(\mathrm{m})^n$ *en* $L^0(\mathrm{m})$ *es continua.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$g = \mathrm{F}(f_1, \ldots, f_n)$$

con F continua y

$$f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{L}^0(m).$$

Tomemos $s > 0$ tal que el siguiente conjunto tenga medida finita

$$\mathrm{A} = \bigcup_{n=1}^{n} \{ x \in \mathrm{X} : | f_j(x) | > s \}$$

Entonces, siendo

$$\mathrm{M} = \sup \{ | \mathrm{F}(z) | : | z_1 | \leq s, \ldots, | z_n | \leq s \},$$

se tiene

$$| g(x) | \leq \mathrm{M} \quad \text{para todo} \quad x \notin \mathrm{A}$$

Por tanto, $g \in \mathrm{L}^0(m)$.

Probaremos la segunda parte para $n = 1$ por simplicidad. Supongamos que $\mathrm{F}_j \longrightarrow \mathrm{F}$ en $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ y que $f_j \longrightarrow f$ en $\mathrm{L}^0(m)$. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\mathrm{R} > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$m(\mathrm{A}) < \varepsilon \quad \text{con} \quad \mathrm{A} = \{ x \in \mathrm{X} : | f(x) | \geq \mathrm{R} \}$$

$$| \mathrm{F}_j(z) - \mathrm{F}_j(w) | < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad | z | \leq \mathrm{R}, \quad | w - z | < \delta$$

lo cual es posible por ser $(\mathrm{F}_j)_{j \in \mathrm{N}}$ una sucesión equicontinua. Sean

$$\mathrm{A}_j = \{ x \in \mathrm{X} : | f(x) - f_j(x) | \geq \delta \} \qquad (j \in \mathrm{N})$$

y tomemos j_0 tal que, para todo $j \geqslant j_0$, se tenga

$$m\,(A_j) < \varepsilon$$

$$\sup_{|z| \leqq R} |F_j(z) - F(z)| < \varepsilon$$

Entonces, si $j \geqslant j_0$ y $x \notin A \cup A_j$, tendremos

$$|F_j(f_j(x)) - F(f(x))| \leqq |F_j(f_j(x)) - F_j(f(x))| +$$
$$+ |F_j(f(x)) - F(f_x))| < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon,$$

es decir,

$$\|F_j(f_j) - F(f)\|_0 < 2\,\varepsilon$$

para todo $j \geqslant j_0$, q. e. d.

Dadas dos funciones $f, g \in L^0(m)$, su producto también pertenece a $L^0(m)$, y la aplicación $(f, g) \longrightarrow f\,g$ es continua por (1.5). El mismo teorema implica que, dada la función entera

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n,$$

para toda $f \in L^0(m)$

$$\sum_0^{\infty} a_n\, f(x)^n = F(f(x))$$

en medida, siendo $F(f) \in L^0(m)$, y lo mismo es cierto para funciones enteras en $\mathbb{C}^n$. Así se tiene:

(1.6) Corolario.—*L^0 (m) es un álgebra topológica metrizable sobre la que operan las funciones enteras de una o varias variables.*

Mencionemos para terminar esta sección que $L^0(m)$ no es localmente convexo ni localmente acotado a menos que la medida m verifique la siguiente condición:

$$\inf \{ m(A) : m(A) \neq 0 \} > 0$$

Cuando esto se verifica (i. e. cuando 0 es un punto aislado del rango de m), $L^0(m)$ es precisamente el espacio de Banach $L^\infty(m)$.

2. Funcionales continuos en L^0 (m)

La inclusión de $L^\infty(m)$ en $L^0(m)$ es continua y con imagen densa, por lo que su adjunta puede considerarse como una inclusión de $L^0(m)'$ en $L^\infty(m)' = M(X, m) = \{$medidas complejas finitamente aditivas, de variación acotada y m-continuas$\}$. Cada $\sigma \in M(X, m)$ está definida para los conjuntos m-medibles con valores en $\mathbb{C}$, y satisface lo siguiente:

$$\sigma(A \cup B) = \sigma(A) + \sigma(B) \quad \text{si} \quad A, B \quad \text{son disjuntos}$$
$$\sigma(A) = 0 \quad \text{siempre que} \quad m(A) = 0$$
$$\|\sigma\| = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\sigma(A_j)| \ : A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ disjuntos} \right\} < \infty$$

Definiendo la integración con respecto a σ del modo habitual ([2], Ch. III), designamos por $L(\sigma)$ el espacio de las funciones integrables con respecto a σ. Si normamos a $M(X, m)$ mediante: $\sigma \longmapsto \|\sigma\|$, se cumplen los siguientes resultados:

(I) Para toda

$$\sigma \in M(X, m), \quad \phi_\sigma(f) = \int f \, d\sigma$$

es un funcional lineal continuo en $L^\infty(m)$.

(II) La correspondencia: $\sigma \longmapsto \phi_\sigma$ es una isometría de $M(X, m)$ sobre $L^\infty(m)'$.

(III) $L^\infty(m) = \cap \{L(\sigma) : \sigma \in M(X, m)\}$.

(Véanse [2], [3] o [17]). Queremos obtener resultados similares para $L^0(m)$ y un subespacio adecuado de $M(X, m)$ que designaremos $M^0(X, m)$ y consta de todas las medidas $\sigma \in M(X, m)$ tales que

$$\inf \{ m(A) : \sigma(A) \neq 0 \} > 0$$

es decir, $\sigma(A) = 0$ para todos los conjuntos A de medida (m) suficientemente pequeña. Cuando m es no-atómica, el ínfimo mencionado más arriba, si es mayor que cero, debe ser infinito. En particular, cualquier $\sigma \in M^0(X, m)$ se anula sobre cualquier conjunto de medida finita que no contenga átomos.

(2.1) TEOREMA.—(0) *$L^0(m) \subset L(\sigma)$ si y sólo si $\sigma \in M^0(X, m)$.*

(1) *Para cada*

$$\sigma \in M^0(X, \mathrm{m}), \quad \phi_\sigma(\mathrm{f}) = \int \mathrm{f}\, d\sigma$$

es un funcional lineal continuo en L^0 (m).

(2) *La correspondencia*: $\sigma \longmapsto \phi_\sigma$ *es un isomorfismo algebraico de* M^0 $(X$, m) *sobre* L^0 $(X$, m)$'$.

(3)

$$L^0(\mathrm{m}) = \bigcap \{ L(\sigma) : \sigma \in M^0(X, \mathrm{m}) \}$$

DEMOSTRACIÓN DE (0).—Sea $\sigma \in M^0$ (X, m) con

$$r = \inf \{ m(A) : \sigma(A) \neq 0 \},$$

y sea $f \in S(m)$. El complementario de $f^{-1}(0)$ tiene medida finita y puede escribirse como

$$\{ x \in X : f(x) \neq 0 \} = \left[\bigcup_j A_j \right] \cup B$$

donde (A_j) es una colección contable de átomos disjuntos y B no contiene ningún átomo. Tomemos n suficientemente grande para que

$$\sum_{j > n} m(A_j) < r$$

y definamos el conjunto

$$E = \left[\bigcup_{j>n} A_j \right] \cup B.$$

Entonces

$$|\sigma|(E) = |\sigma|(B) + |\sigma| \left(\bigcup_{j>n} A_j \right) = 0$$

lo que implica que $f \cdot \chi_E \in L(\sigma)$ con integral respecto de σ nula, y también

$$f = f \cdot \chi_B + \sum_{j=1}^{n} f(A_j)\, \chi_{A_j} \in L(\sigma)$$

donde $f(A_j)$ es el valor constante (a. e.) de f en el átomo A_j. Así hemos probado lo siguiente:

$$L^0(m) = L^\infty(m) + S(m) \subset L(\sigma) + L(\sigma) = L(\sigma)$$

Recíprocamente, sea

$$\sigma \in M(X, m) \setminus M^0(X, m).$$

Existen conjuntos medibles A_k tales que

$$m(A_k) < 2^{-k}, \quad \sigma(A_k) \neq 0 \qquad (k \in N)$$

Definamos entonces la función

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\sigma|(A_k)} \chi_{A_k}(x)$$

que es finita a. e. (porque $\{x : h(x) = \infty\} \subset \lim\sup A_k$ que tiene medida nula) y está concentrada en un conjunto de medida finita, por lo que $h \in L^0(m)$. Sin embargo $h \notin L(\sigma)$, ya que en otro caso se tendría

$$\int h\, d|\sigma| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\sigma|(A_k)} \int_{A_k} d|\sigma| = \infty \qquad \text{Q. E. D.}$$

Demostración de (1).—Dada $\sigma \in M^0(X, m)$ con

$$r = \inf\{m(A) : \sigma(A) \neq 0\}$$

probaremos lo siguiente:

$$\|f\|_0 < r \qquad |\phi_\sigma(f)| \leq \|f\|_0 \, \|\sigma\|$$

En efecto, para una tal función f, definamos los conjuntos

$$A = \{x \in X : |f(x)| \leq \|f\|_0\}; \qquad B = X \setminus A$$

de modo que, por definición de $\|\cdot\|_0$, $m(B) < r$ y $|\sigma|(B) = 0$. Por tanto

$$|\phi_\sigma(f)| = \left|\int_A f\, d\sigma\right| \leq \|f \cdot \chi_A\|_\infty \, \|\sigma\| \leq \|f\|_0 \, \|\sigma\| \qquad \text{Q. E. D.}$$

DEMOSTRACIÓN DE (2).—Solamente necesitamos probar que todos los funcionales lineales continuos en $L^0(m)$ son de la forma ϕ_σ. Dado cualquier $\phi \in L^0(m)'$, definimos la medida

$$\sigma(A) = \phi(\chi_A)$$

que evidentemente pertenece a $M(X, m)$. Supongamos que

$$\sigma \notin M^0(X, m).$$

Entonces podemos tomar conjuntos A_k como anteriormente con

$$m(A_k) < 2^{-k} \quad \text{y} \quad \sigma(A_k) \neq 0.$$

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma(A_k)} \chi_{A_k}$$

converge en medida a una función $f \in L^0(m)$, porque converge a. e. sobre un conjunto de medida finita fuera del cual la serie es nula. Por consiguiente

$$\phi(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma(A_k)} \phi(\chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

lo que es absurdo. Es decir, $\sigma \in M^0(X, m)$, y los funcionales ϕ y ϕ_σ coinciden sobre las funciones simples. Estas son densas en $L^0(m)$, puesto que son uniformemente densas en $L^\infty(m)$, luego $\phi = \phi_\sigma$, q. e. d.

Obsérvese que esta parte (2) junto con el corolario (1.4) implican que $M^0(X, m) \neq \{0\}$ cuando $m(X) = \infty$.

DEMOSTRACIÓN DE (3).—Dada una función medible $f \notin L^0(m)$, tenemos que encontrar una medida $\sigma \in M^0(X, m)$ tal que $f \notin L(\sigma)$. Podemos suponer $m(X) = \infty$, pues en otro caso no hay nada que probar. Supongamos también que f es real. Entonces, o bien

$$m(\{x \in X : f(x) > s\}) = \infty \quad \text{para todo} \quad s > 0$$

o la misma propiedad es satisfecha por $-f$. Supondremos que ocurre la primera posibilidad. En estas condiciones, hacemos la siguiente:

AFIRMACIÓN.—«Existen conjuntos medibles disjuntos $(E_k)_{k \in N}$, y medidas $(\sigma_k)_{k \in N}$ pertenecientes a $M^0(X, m)$ tales que:

i) $\sigma_k \geqslant 0$ y $\| \sigma_k \| = \sigma_k(E_k) = k^{-2}$.

ii) $\sigma_k(A) = 0$ siempre que $m(A) < \infty$.

iii) $f(x) \geqslant k$ siempre que $x \in E_k$».

Suponiendo esta afirmación cierta, definimos la medida

$$\sigma = \sum_k \sigma_k \in M^0(X, m)$$

mediante

$$\sigma(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(A \cap E_k)$$

Si f fuese integrable con respecto a σ, se tendría

$$\int f \, d\sigma = \int \Big(f \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k} \Big) d\sigma \geq \sum_{k=1}^{\infty} k\, \sigma(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty$$

lo que es absurdo. Para probar ahora nuestra afirmación anterior, sea (n_j) una sucesión creciente de enteros positivos tales que

$$m(\{x \in X : n_j \leq f(x) < n_{j+1}\}) \geq 1$$

y dividamos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ en una sucesión (H_k) de conjuntos numerables disjuntos con min $H_k \geqslant k$. Definamos entonces

$$E_k = \bigcup_{j \in H_k} \{x \in X : n_j \leq f(x) < n_{j+1}\}$$

Los conjuntos $(E_k)_{k \in N}$ son disjuntos y con $m(E_k) = \infty$, luego

$$\chi_{E_k} \notin \overline{S(m)} = q^{-1}(0).$$

Por la continuidad de q y el teorema de Hahn-Banach, podemos encontrar un funcional $\phi_k \in L^0(m)'$ que se anule en $S(m)$ pero tal que $\phi_k(\chi_{E_k}) \neq 0$. Si σ'_k es la medida de $M^0(X, m)$ asociada a ϕ_k sólo tenemos que definir

$$\sigma_k(A) = \frac{|\sigma'_k|(A \cap E_k)}{k^2 |\sigma'_k|(E_k)} \qquad \text{Q. E. D.}$$

El hecho de ser $\sigma \longmapsto \phi_\sigma$ una isometría entre $M(X, m)$ y $L^\infty(m)'$ no puede tener un análogo para la correspondencia entre $M^0(X, m)$ y el dual de $L^0(m)$ mientras que no demos alguna topología a este último. A partir de ahora consideraremos a $L^0(m)'$ como espacio vectorial topológico con la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos acotados de $L^0(m)$ (topología fuerte). Entonces tenemos

(2.2) TEOREMA.—*Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) *inf* $\{m(A) : A$ *es un átomo*$\} > 0$ (*se incluye aquí el caso de ser la medida m no-atómica*).

ii) $M^0(X, m)$ *es un subespacio cerrado de* $M(X, m)$.

iii) $L^0(X, m)'$ *es un espacio de Banach y su topología viene definida por la norma:*

$$\|\phi_\sigma\| = \|\sigma\|$$

DEMOSTRACIÓN.—i) $\Longrightarrow$ iii). Sea $r = \inf\{m(A) : A$ es un átomo$\} > 0$. Entonces $\sigma(E) = 0$ siempre que $\sigma \in M^0(X, m)$ y que $m(E) < r$. La demostración de 2.1(1) muestra que si $\sigma \in M^0(X, m)$

$$|\phi_\sigma(f)| \leq \|\sigma\| \; \|f\|_0 \quad \text{siempre que} \quad \|f\|_0 < r.$$

Pero ahora r no depende de σ, y entonces, $\|\sigma_j\| \longrightarrow 0$ implica

$$|\phi_{\sigma_j}(f)| \longrightarrow 0$$

uniformemente para $\|f\|_0 \leq r$, y por consiguiente uniformemente sobre cada conjunto acotado de $L^0(m)$. Recíprocamente, si

$$\phi_{\sigma_j} \longrightarrow 0 \quad \text{en} \quad L^0(m)',$$

teniendo en cuenta que

$$B = \{ f \in L^{\infty}(m) : \|f\|_{\infty} \leq 1 \}$$

es un subconjunto acotado de $L^0(m)$, se obtiene:

$$\|\sigma_j\| = \sup \{ |\phi_{\sigma_j}(f)| : f \in B \} \longrightarrow 0$$

Finalmente, $L^0(m)'$ debe ser completo por ser el dual fuerte de un espacio lineal métrico.

iii) $\Longrightarrow$ ii). Inmediato.

ii) $\Longrightarrow$ i). Supongamos que i) es falso, es decir, que existen átomos A_k con

$$m(A_k) < 2^{-k} \quad (k \in N).$$

Definamos las medidas

$$\sigma_n(E) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k \cap E) \qquad (n \in N)$$

$$\sigma(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k \cap E)$$

Entonces $\sigma_n \in M^0(X, m)$ mientras que $\sigma \notin M^0(X, m)$. Como

$$\|\sigma_n - \sigma\| \longrightarrow 0,$$

resulta que $M^0(X, m)$ no es cerrado, q. e. d.

En otras palabras, el único caso en que la norma

$$\|\phi_\sigma\| = \|\sigma\|$$

no define la topología fuerte de $L^0(m)'$ es cuando existe una sucesión de átomos

$$(A_j)_{j \in N} \quad \text{con} \quad \lim_j m(A_j) = 0$$

(2.3) COROLARIO.—*Sea* m *no-atómica. Entonces*

$$L^0(m)' = (L^0(m) / \overline{S(m)})'$$

como espacios de Banach, y para cualquier $\phi_\sigma \in L^0(\mathrm{m})'$ *se tiene*

$$\|\phi_\sigma\| = \|\sigma\| = \sup \{ |\phi_\sigma(f)| : \|f\|'_0 \leq 1 \} =$$
$$= \sup \{ |\phi_\sigma(f)| : q(f) \leq 1 \}$$

DEMOSTRACIÓN.—El argumento usado en la demostración de 2.1(1) puede usarse ahora con $r = \infty$, obteniéndose para toda $f \in L^0(m)$

$$|\phi_\sigma(f)| \leq \|\sigma\| \quad \|f\|_0$$

Esto prueba la igualdad

$$\|\sigma\| = \sup \{ |\phi_\sigma(f)| : \|f\|_0 \leq 1 \},$$

y el resto es consecuencia inmediata de (1.3) y (1.4), q. e. d.

Cuando $m(X) < \infty$, toda medida $\sigma \in M^0(X, m)$ está concentrada en la unión de un número finito de átomos, por lo que el teorema (2.1) da en este caso la conocida representación de $L^0(m)'$:

(2.4) COROLARIO.—*Si* $\mathrm{m}(X) < \infty$, *todo funcional lineal continuo en* $L^0(\mathrm{m})$ *es de la forma*

$$\phi(f) = \sum_{i=1}^{n} c_j f(A_j)$$

para ciertos átomos $A_1, \ldots, A_n$ *y constantes* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

Referencias

[1] ARTSTEIN, Z.: *Lyapounov convexity theorem and Riemann-type integral.* «Indiana Univ. Math. J.», **25** (1976), 717-724.

[2] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J. T.: *Linear Operators. Part I.* «Interscience», New York (1958).

[3] FICHTENHOLZ, G. and KANTOROVIC, L.: *Sur les operations linéaires dans l'espace des fonctions bornées.* «Studia Math.», **5** (1934), 69-98.

[4] HALMOS, P. R.: *The range of a vector measure.* «Bull. Amer. Math. Soc.», **54** (1948), 416-421.

[5] KNOWLES, G.: *Liapounov vector measures.* «Math. Systems Theory», **13** (1975), 294-303.

[6] LINDENSTRAUSS, J.: *A short proof of Liapounoff's convexity theorem.* «J. Math. Mech.», **15** (1966), 971-972.

[7] LYAPOUNOFF, A.: *Sur les fonctions-vecteurs completement additives.* «Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math.», **4** (1940), 465-478.

[8] MARCELLÁN, F. y RUBIO, J. L.: *Funcionales continuos para la convergencia en medida.* «II Jornadas Matem. Hispano-Lusitanas», Madrid (1973).

[9] MITIAGIN, B., ROLEWICZ, S. and ZELAZKO, W.: *Entire functions in B_0-algebras.* «Studia Math.», **21** (1962), 291-306.

[10] MUKHERJEE, T. K. and SUMMERS, W. H.: *Continuous linear functionals arising from convergence in measure.* «Amer. Math. Monthly», **81** (1974), 63-66.

[11] OLECH, C.: *On the range of an unbounded vector-valued measure.* «Math. Systems Theory», **2** (1968), 251-256.

[12] PHELPS, S.: *Lectures on Choquet's theorem.* Van Nostrand. Princeton (1966).

[13] ROLEWICZ, S.: *Metric linear spaces.* «Monografie Matematyczne», **56**, Warszawa (1972).

[14] RUDIN, W.: *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill. New York (1966).

[15] SIERPINSKI, W.: *Sur les fonctions d'ensemble additives et continues.* «Fund. Math.», **3** (1922), 240-246.

[16] UHL, J. J.: *The range of a vector-valued measure.* «Proc. Amer. Math. Soc.», **23** (1969), 158-163.

[17] YOSIDA, K. and HEWITT, E.: *Finitely additive measures.* «Trans. Amer. Math. Soc.», **72** (1952), 46-66.