DESCOMPOSICION DE MEDIDAS FINITAMENTE ADITIVAS EN ESPACIOS TOPOLOGICOS (*)

G. Vera Botí

Recibido: 5-IV-78

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Let S be a non-empty set and Ω its Stone-Čech compactification for the discrete topology. Given a finite and non-negative finitely additive measure μ, defined on all the subsets of S, we represent it as a Radon measure $\hat{\mu}$ on Ω. Since the elements of Ω can be identified with ultrafilters in S, when a topology τ is given on S, the subset Ω_τ of Ω formed by the ultrafilters convergent for this topology, is determined.

Thus we characterise certain topological properties of μ (relative to its behaviour over the open sets and over the bounded continuous functions) in terms of the «degree of concentration» of $\hat{\mu}$ over Ω_τ.

In particular we study σ-additive, τ-additive, purely finitely additive and purely σ-additive measures and we obtain descomposition theorems analogous to Hewitt-Yosida (1952). The method we have adopted in this paper by considering the Stone-Čech compactification of S for the discrete topology, has allowed to obtein similar results to those of Knowles (1967) and Badrikian (1970) without the added requeriment that the τ-topology for S to be completely regular.

Sea S un conjunto no vacío y Ω su compactificación de Stone-Čech para la topología discreta. Dada una medida finitamente aditiva μ, finita y no negativa, definida sobre todos los subconjuntos de S, la representamos como una medida de Radon $\hat{\mu}$ sobre Ω. Puesto que los elementos de Ω se pueden identificar con ultrafiltros en S, cuando se dota a S de una topología τ, queda determinado el subconjunto Ω_τ de Ω formado por los ultrafiltros convergentes para esta topología. Entonces caracterizamos ciertas propiedades topológicas de μ (referentes a su comportamiento sobre los abiertos y sobre las funciones continuas acotadas) en términos del grado de concentración de $\hat{\mu}$ sobre Ω_τ.

En particular estudiamos las medidas σ-aditivas, τ-aditivas, puramente finita-

(*) Trabajo realizado en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias. Universidad de Murcia.

mente aditivas y puramente σ-aditivas y obtenemos teoremas de descomposición análogos al de Hewitt-Yosida (1952).

El método que hemos adoptado en este trabajo, considerando la compactificación de Stone-Čech de S para la topología discreta nos ha permitido obtener resultados análogos a los de Knowles (1967) y Badrikian (1970) sin exigir en varios de ellos que la topología τ de S sea completamente regular.

1. Introducción

Sea S un conjunto no vacío, $\mathcal{M}(S)$ el conjunto de todas las medidas finitas no negativas y finitamente aditivas sobre el álgebra de todas las partes de S, y $\mathcal{M}_1(S)$ el subconjunto de $\mathcal{M}(S)$ formado por las medidas μ que cumplen $\mu(S) = 1$.

Si B (S) es el espacio vectorial de todas las aplicaciones acotadas $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$, dotado de la norma de la convergencia uniforme, entonces $\mathcal{M}_1(S)$ es un subconjunto convexo y débil*-compacto de de la bola unidad cerrada del dual $B(S)'$.

Es sabido que el conjunto Ω formado por los puntos extremales de $\mathcal{M}_1(S)$ también es compacto para la topología débil*, y que $\alpha \in \Omega$ si y sólo si $\{A \subset S : \alpha(A) = 1\}$ es un ultrafiltro.

En lo sucesivo frecuentemente identificaremos Ω con el conjunto de todos los ultrafiltros sobre S, asociando a cada ultrafiltro $\mathcal{U}$ la medida $\alpha \in \mathcal{M}_1(S)$, definida por $\alpha(A) = 1$ si $A \in \mathcal{U}$ y $\alpha(A) = 0$ si $A \notin \mathcal{U}$.

Para cada $x \in S$ sea $\delta_x \in \mathcal{M}_1(S)$ la evaluación en x, ($\delta_x(f) = f(x)$, para todo $f \in B(S)$). El conjunto de todas las evaluaciones $\tilde{S} = \{\delta_x : x \in S\}$ es denso en Ω y homeomorfo a S (con la topología discreta) mediante la biyección $x \longrightarrow \delta_x$.

Resulta así que Ω se puede considerar como la compactificación de Stone-Čech de S para la topología discreta, y por consiguiente, después de identificar S con $\tilde{S}$, cada función acotada $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ se extiende de modo único a una función continua $\hat{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\hat{f}(\alpha) = \alpha(f)$ para cada $\alpha \in \Omega$.

A cada $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ se le puede asociar una única medida de Radon $\hat{\mu}$ sobre el espacio compacto Ω, verificando que $\hat{\mu}(\hat{f}) = \mu(f)$ para cada $f \in B(S)$. Evidentemente $\hat{\mu}(\Omega) = 1$.

En particular, si $f = \chi_A$ es la función característica de un subconjunto $A \subset S$, se deduce que $\mu(A) = \hat{\mu}(\hat{A})$ donde

$$\hat{A} = \{\alpha \in \Omega : \alpha(A) = 1\}.$$

La familia de conjuntos $\{\hat{A}: A \subset S\}$ es una base de la topología de Ω y se verifica que un subconjunto $\theta \subset \Omega$ es abierto y cerrado si y sólo si $\theta = \hat{A}$ para algún $A \subset S$.

Nos remitimos al libro de G. Choquet ([3]) para los resultados expuestos en esta sección.

2. Descomposición de medidas finitamente aditivas

En lo que sigue $\mathfrak{D}$ designará siempre una familia no vacía de subconjuntos de S, filtrante creciente.

1. DEFINICIÓN.—*Una medida finitamente aditiva* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *diremos que es débilmente* $\mathfrak{D}$*-regular si* $\mu(S) = \sup\{\mu(D) : D \in \mathfrak{D}\}$ *y diremos que es fuertemente* $\mathfrak{D}$*-singular si* $\mu(D) = 0$ *para cada* $D \in \mathfrak{D}$.

2. PROPOSICIÓN.—*Una medida finitamente aditiva* $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ *es débilmente* $\mathfrak{D}$*-regular si y sólo si* $\hat{\mu}$ *está soportada por el abierto* $\omega(\mathfrak{D}) = \bigcup\{D : D \in \mathfrak{D}\}$.

DEMOSTRACIÓN.—La familia de abiertos $\{\hat{D}: D \in \mathfrak{D}\}$ es filtrante creciente. Entonces

$$\hat{\mu}(\omega(\mathfrak{D})) = \sup\{\hat{\mu}(\hat{D}) : D \in \mathfrak{D}\} = \sup\{\mu(D) : D \in \mathfrak{D}\}$$

y la condición $\hat{\mu}(\omega(\mathfrak{D})) = 1 = \mu(S)$ equivale a que μ sea débilmente $\mathfrak{D}$-regular.

3. COROLARIO.—*Si* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *es débilmente* $\mathfrak{D}$*-regular se verifica:*

3.1) $\mu(A) = \sup\{\mu(A \cap D) : D \in \mathfrak{D}\}$ *para cada* $A \subset S$.

DEMOSTRACIÓN.—Bastará probarlo cuando $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. Para cada $A \subset S$ la familia de abiertos $\{(A \cap D)^\wedge : D \in \mathfrak{D}\}$ es filtrante creciente y su unión es $\hat{A} \cap \omega(\mathfrak{D})$.

Como $\hat{\mu}$ está soportada por $\omega(\mathfrak{D})$ se deduce 3.1.

4. PROPOSICIÓN.—*Una condición necesaria y suficiente para que* $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ *sea fuertemente* $\mathfrak{D}$*-singular es que* $\hat{\mu}$ *esté soportada por el compacto* $\Omega \backslash \omega(\mathfrak{D})$.

Demostración.—Si $\hat{\mu}$ está soportada por el compacto $\theta = \Omega \backslash \omega (\mathcal{D})$ y $D \in \mathcal{D}$ se obtiene que $\mu (D) = \hat{\mu} (\hat{D}) = \hat{\mu} (\hat{D} \cap \theta) = 0$, pues $\hat{D} \cap \theta = \varnothing$.

Recíprocamente, si μ es fuertemente $\mathcal{D}$-singular, como $\hat{\mu} (\hat{B}) = 1$ cuando $S \backslash B = B^c$ pertenece a $\mathcal{D}$, y $\{B : \hat{B}^c \in \mathcal{D}\}$ es una familia filtrante decreciente de compactos cuya intersección es θ, se obtiene que $\hat{\mu} (\theta) = 1$.

5. Proposición.—*Sea* $\mu = \lambda + \nu$ *donde* $\lambda \in \mathcal{M} (S)$ *es fuertemente* $\mathcal{D}$*-singular y* $\nu \in \mathcal{M} (S)$ *es débilmente* $\mathcal{D}$*-regular. Entonces se verifica:*

5.1) $\lambda (A) = inf \{\mu (A \cap D^c) : D \in \mathcal{D}\}$.

5.2) $\nu (A) = sup \{\mu (A \cap D) : D \in \mathcal{D}\}$.

para cada $A \in S$.

Demostración.—Como λ es fuertemente $\mathcal{D}$ singular se deduce que μ y ν coinciden sobre los subconjuntos de cada $D \in \mathcal{D}$.

De esta observación y del corolario 3 se deduce 5.2. Como $\mu (S) < + \infty$ la fórmula 5.1 es consecuencia inmediata de 5.2.

6. Teorema.—*Cada medida finitamente aditiva* $\mu \in \mathcal{M} (S)$ *se puede descomponer de modo único en la forma* $\mu = \lambda + \nu$ *donde* $\lambda \in \mathcal{M} (S)$ *es fuertemente* $\mathcal{D}$*-singular y* $\nu \in \mathcal{M} (S)$ *es débilmente* $\mathcal{D}$*-regular.*

Demostración.—Bastará demostrarlo suponiendo que $\mu \in \mathcal{M}_1 (S)$. En este caso, sea $\theta = \Omega \backslash \omega (\mathcal{D})$, y para cada $A \subset S$ definamos

$$\lambda (A) = \hat{\mu} (\hat{A} \cap \theta) \quad y \quad \nu (A) = \hat{\mu} (\hat{A} \cap \omega (\mathcal{D})),$$

y sea $a = \lambda (S)$. Si $a = 0$ entonces $\lambda = 0$ y $\nu = \mu$ es débilmente $\mathcal{D}$-regular en virtud de la proposición 2. Si $a = 1$ entonces $\nu = 0$ y $\lambda = \mu$ es fuertemente $\mathcal{D}$-singular en virtud de la proposición 4.

Supongamos pues que $0 < a < 1$ y sea

$$b = 1 - a, \quad \alpha = \frac{1}{a} \lambda \quad y \quad \beta = \frac{1}{b} \nu.$$

Evidentemente, $\alpha, \beta \in \mathcal{M}_1(S)$. Como

$$\{\hat{B} : B^c \in \mathcal{D}\} \quad \text{y} \quad \{\hat{B} \cap \theta : B^c \in \mathcal{D}\},$$

son sendas familias filtrantes decrecientes de compactos en Ω cuya intersección es θ se deduce:

$$\hat{\alpha}(\theta) = \inf\{\hat{\alpha}(\hat{B}) : B^c \in \mathcal{D}\} = \inf\{\alpha(B) : B^c \in \mathcal{D}\} =$$
$$= \inf\left\{\frac{1}{a}\,\hat{\mu}(\hat{B} \cap \theta) : B^c \in \mathcal{D}\right\} = \frac{1}{a}\,\hat{\mu}(\theta) = \frac{1}{a}\,\lambda(S) = 1$$

y por lo tanto, según la proposición 4, α es fuertemente $\mathcal{D}$-singular, y λ también lo es. Un razonamiento análogo permite probar que $\hat{\beta}(\omega(\mathcal{D})) = 1$, de donde se sigue que $\nu = b\beta$ es débilmente $\mathcal{D}$-regular. La unicidad de la descomposición es consecuencia de la proposición 5.

En lo sucesivo designaremos siempre por $\mathcal{H}$ una familia no vacía de partes de S, estable por uniones e intersecciones finitas, tal que $S = \cup\,\mathcal{D}$ para alguna familia filtrante creciente $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$.

7. DEFINICIÓN.—*Una medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ diremos que es $\mathcal{H}$-regular si para cada familia filtrante creciente $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ que cumpla $\cup\,\mathcal{D} = S$, se verifica $\mu(S) = \sup\{\mu(D) : D \in \mathcal{D}\}$.*

Diremos que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es $\mathcal{H}$-singular si para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia filtrante creciente $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ tal que $\cup\,\mathcal{D} = S$ y $\mu(D) \leqslant \varepsilon$ para todo $D \in \mathcal{D}$.

Con el fin de caracterizar las medidas finitamente aditivas $\mathcal{H}$-regulares y $\mathcal{H}$-singulares conviene introducir la siguiente terminología: Llamaremos $L(\mathcal{H})$ a la familia de subconjuntos abiertos de Ω formada por el conjunto vacío y por los subconjuntos $M = \omega(\mathcal{E})$, donde $\omega(\mathcal{E}) = \cup\,\{\hat{E} : E \in \mathcal{E}\}$, con $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ y $\cup\,\mathcal{E} = S$.

Es inmediato que $L(\mathcal{H})$ es estable frente a uniones arbitrarias e intersecciones finitas. También es evidente que cada $M \in L(\mathcal{H})$ se puede poner en la forma $M = \omega(\mathcal{D})$, donde $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ es filtrante creciente y $\cup\,\mathcal{D} = S$. (Basta llamar $\mathcal{D}$ a la familia de las uniones de un número finito de conjuntos de $\mathcal{E}$.)

8. TEOREMA.—*Una condición necesaria y suficiente para que*

$\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ sea $\mathcal{H}$-regular es que para todo $M \in L(\mathcal{H})$ sea $\hat{\mu}(M) = 1$.

Una condición necesaria y suficiente para que $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ sea $\mathcal{H}$-singular es que

$$\inf\{\hat{\mu}(M) : M \in L(\mathcal{H})\} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—La primera parte se deduce de la proposición 2, teniendo en cuenta que μ es $\mathcal{H}$-regular si y sólo si es débilmente $\mathcal{D}$-regular para cada familia filtrante creciente $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ con $\cup \mathcal{D} = S$. La segunda parte del teorema es consecuencia inmediata de la definición de medida $\mathcal{H}$-singular.

9. OBSERVACIÓN.—Si para cada $\theta \subset \Omega$ se define

$$\mu^*(\theta) = \inf\{\hat{\mu}(M) : \theta \subset M \in L(\mathcal{H})\}$$

es fácil probar que μ^* es una medida exterior sobre Ω. El conjunto $\mathcal{H}^* = \cap L(\mathcal{H})$ no es vacío pues contiene todas las evaluaciones δ_x, $(x \in S)$. Entonces el teorema 8 se puede reformular diciendo que μ es $\mathcal{H}$-regular si y sólo si $\mu^*(\mathcal{H}^*) = 1$, y que μ es $\mathcal{H}$-singular si y sólo si $\mu^*(\mathcal{H}^*) = 0$.

10. TEOREMA.—*Cada medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu = \lambda + \nu$, donde λ es $\mathcal{H}$-singular y ν es $\mathcal{H}$-regular.*

DEMOSTRACIÓN. — Bastará probarlo cuando $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. Utilizaremos las notaciones introducidas en la observación 9. Sea $a = \mu^*(\mathcal{H}^*)$. Si $a = 0$ basta tomar $\lambda = \mu$ y $\nu = 0$, para tener una descomposición del tipo indicado. Supongamos entonces que $a > 0$.

Como la familia $L(\mathcal{H})$ es estable por intersecciones finitas se deduce la existencia de una sucesión decreciente $M_n \in L(\mathcal{H})$ tal que para cada $n \in N$ se verifica $\hat{\mu}(M_n) \leqq a + \frac{1}{n}$.

El conjunto de Borel $\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ contiene a $\mathcal{H}^*$ y verifica $\hat{\mu}(\theta) = a$. Si $M \in L(\mathcal{H})$ se tiene $M \cap M_n \in L(\mathcal{H})$ para todo $n \in N$ y, por lo tanto, $\hat{\mu}(M \cap \theta) = \lim_n \hat{\mu}(M \cap M_n) \geqq a$.

Sea β la medida de Radon en el espacio compacto Ω que en cada conjunto de Borel $A \subset \Omega$ toma el valor $\beta(A) = \hat{\mu}(A \cap \theta)$.

La única medida $\gamma \in \mathcal{M}_1(S)$ que cumple $\hat{\gamma} = \frac{1}{a}\,\beta$ verifica

$$\hat{\gamma}(M) = \frac{1}{a}\,\beta(M) = \frac{1}{a}\,\hat{\mu}(M \cap \theta) \geqq 1$$

para cada $M \in L(\mathcal{H})$.

El teorema 8 permite asegurar que γ es $\mathcal{H}$-regular. Entonces la medida $\nu = a\,\gamma$ también es $\mathcal{H}$-regular.

Como $0 \leqq a\,\hat{\gamma} \leqq \hat{\mu}$, se deduce que $0 \leqq \nu \leqq \mu$ y por lo tanto la medida $\lambda = \mu - \nu$ es positiva. Si $a = 1$ es evidente que $\lambda = 0$ es $\mathcal{H}$-singular. Supongamos entonces que $a \neq 1$, y sea $b = 1 - a$.

Entonces $\mu = a\,\gamma + b\,\delta$ donde $\delta = \frac{1}{b}\,\lambda$, y se tiene

$$a = \inf\{a\,\hat{\gamma}(M) + b\,\hat{\delta}(M) : M \in L(\mathcal{H})\} \geqq a\,\gamma^*(\mathcal{H}^*) + b\,\delta^*(\mathcal{H}^*) = a + b\,\delta^*(\mathcal{H}^*)$$

pues γ es $\mathcal{H}$-regular y $\gamma^*(\mathcal{H}^*) = 1$ en virtud de la observación 9. Se deduce entonces que $\delta^*(\mathcal{H}^*) = 0$, lo cual implica, nuevamente por la observación 9, que δ es $\mathcal{H}$-singular. Entonces $\lambda = b\,\delta$ también es $\mathcal{H}$-singular.

Finalmente probaremos la unicidad de la descomposición. Sea $\mu = \lambda_1 + \nu_1 = \lambda_2 + \nu_2$, donde λ_1, λ_2 son $\mathcal{H}$-singulares y ν_1, ν_2 son $\mathcal{H}$-regulares.

Dado $\varepsilon > 0$ existen dos familias filtrantes crecientes $\mathcal{D}' \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{H}$, tales que $\cup\,\mathcal{D}' = S$, $\cup\,\mathcal{D}'' = S$, $\lambda_1(D') < \varepsilon/6$ para cada $D' \in \mathcal{D}'$ y $\lambda_2(D'') < \varepsilon/6$ para cada $D'' \in \mathcal{D}''$.

La familia $\mathcal{D} = \{D' \cap D'' : D' \in \mathcal{D}', D'' \in \mathcal{D}''\}$ es filtrante creciente y $\cup\,\mathcal{D} = S$. Para cada $D \in \mathcal{D}$ se verifica $\lambda_1(D) < \varepsilon/6$ y $\lambda_2(D) < \varepsilon/6$, y por tanto

$$|\mu(D \cap A) - \nu_1(D \cap A)| = \lambda_1(D \cap A) < \varepsilon/6$$
$$|\mu(D \cap A) - \nu_2(D \cap A)| = \lambda_2(D \cap A) < \varepsilon/6$$

cualquiera que sea $A \subset S$. De aquí se deduce que para cada $A \subset S$ y cada $D \in \mathcal{D}$ es $|\nu_1(D \cap A) - \nu_2(D \cap A)| < \varepsilon/3$.

Como ν_i es débilmente $\mathcal{D}$-regular, aplicando el corolario 3 se deduce que existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $\nu_1(A) - \nu_1(D \cap A) < \varepsilon/3$ y $\nu_2(A) - \nu_2(D \cap A) < \varepsilon/3$. Entonces $|\nu_1(A) - \nu_2(A)| < \varepsilon$ para cada $A \subset S$, luego $\nu_1 = \nu_2$ y $\lambda_1 = \lambda_2$.

Sea ahora $\mathcal{N}$ una familia no vacía de partes de S, estable frente a uniones e intersecciones finitas, tal que existe en $\mathcal{N}$ una sucesión creciente $\{D_n : n \in N\} = \mathcal{D}$ que cumple $\cup \mathcal{D} = S$.

11. DEFINICIÓN.—*Una medida finitamente aditiva* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *diremos que es secuencialmente* $\mathcal{N}$*-regular si para cada sucesión creciente en* $\mathcal{N}$, $\mathcal{D} = \{D_n : n \in N\}$ *que cumpla* $S = \cup \mathcal{D}$, *se verifica*

$$\mu(S) = sup\{\mu(D_n) : n \in N\}.$$

Diremos que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *es secuencialmente* $\mathcal{N}$*-singular si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una sucesión creciente en* $\mathcal{N}$, $\mathcal{D} = \{D_n : n \in N\}$ *tal que* $\cup \mathcal{D} = S$ *y* $\mu(D_n) < \varepsilon$ *para cada* $n \in N$.

Con el fin de obtener una caracterización análoga a la obtenida en el teorema 8 es conveniente introducir la familia $L_\sigma(\mathcal{N})$ formada por el conjunto vacío y todos los conjuntos abiertos $M \subset \Omega$ que son de la forma $M = \omega(\mathcal{E})$ donde $\mathcal{E} \subset \mathcal{N}$ es numerable y $\cup \mathcal{E} = S$.

Es inmediato que $L_\sigma(\mathcal{N})$ es estable por intersecciones finitas y uniones numerables. Cada $M \in L_\sigma(\mathcal{N})$ se puede poner en la forma $M = \omega(\mathcal{D})$ donde $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$ es una sucesión creciente con $\cup \mathcal{D} = S$.

12. TEOREMA.—*Una condición necesaria y suficiente para que* $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ *sea secuencialmente* $\mathcal{N}$*-regular es que para todo* $M \in L_\sigma(\mathcal{N})$ *sea* $\hat{\mu}(M) = 1$.

Una condición necesaria y suficiente para que $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ *sea secuencialmente* $\mathcal{N}$*-singular es que se cumpla*

$$inf\{\hat{\mu}(M) : M \in L_\sigma(\mathcal{N})\} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—Es análoga a la del teorema 8.

13. OBSERVACIÓN.—Si para cada $\theta \subset \Omega$ se define

$$\mu^*(\theta) = \inf\{\hat{\mu}(M) : \theta \subset M \in L_\sigma(\mathcal{N})\}$$

es fácil probar que μ^* es una medida exterior sobre Ω. El conjunto $\mathcal{N}^* = L_\sigma(\mathcal{N})$ no es vacío, pues contiene a $\check{S}$. Entonces el teorema 12 se puede enunciar diciendo que μ es secuencialmente $\mathcal{N}$-regular si y sólo si $\mu^*(\mathcal{N}^*) = 1$ y que μ es secuencialmente $\mathcal{N}$-singular si y sólo si $\mu^*(\mathcal{N}^*) = 0$.

14. TEOREMA.—*Cada medida finitamente aditiva* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *se puede descomponer de modo único en la forma* $\mu = \lambda + \nu$, *donde* $\nu \in \mathcal{M}(S)$ *es secuencialmente* $\mathcal{N}$*-regular y* $\lambda \in \mathcal{M}(S)$ *es secuencialmente* $\mathcal{N}$*-singular.*

DEMOSTRACIÓN.—Es análoga a la del teorema **10**, aplicando ahora el teorema 12 en vez del teorema 8 y razonando con la medida exterior $\mu^{\cdot}$ en lugar de μ^*.

3. Medidas finitamente aditivas en espacios topológicos

En este apartado supondremos siempre que S está dotado de una topología separada τ. Denotaremos por Ω_τ el subconjunto de Ω formado por todas las medidas $\alpha \in \Omega$ tales que el ultrafiltro asociado es convergente para la topología τ.

Como es habitual, $\mathcal{V}_x$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{B}$ designarán las clases de los subconjuntos de S que son, respectivamente, entornos de x, abiertos, cerrados, compactos y de Borel.

Finalmente, C (S) será el espacio vectorial de todas las aplicaciones continuas acotadas $f : S \longrightarrow R$.

15. DEFINICIÓN.—*Diremos que* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *es* σ*-aditiva si para cada sucesión decreciente* $f_n \in C(S)$ *que verifique* $\lim_n f_n(x) = 0$ *para todo* $x \in S$, *se cumple que* $\lim_n \mu(f_n) = 0$. *Diremos que* $\mu \in \mathcal{M}(S)$ *es puramente finitamente aditiva si cada medida* σ*-aditiva* $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ *que verifique* $0 \leqq \gamma \leqq \mu$ *es idénticamente nula.*

Con el fin de caracterizar las medidas σ-aditivas y puramente finitamente aditivas conviene considerar la familia $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}$ formada por todos los abiertos $P \subset S$ que son de la forma

$$P = \{ x \in S : f(x) > 0 \}$$

donde $f \in C(S)$ y $f \geqq 0$. Es evidente que $\mathcal{P}$ es estable frente a intersecciones y uniones finitas y que existe en $\mathcal{P}$ una sucesión creciente $\{P_n : n \in N\}$ con $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ (basta tomar $P_n = S$ para todo $n \in N$).

Conviene introducir también la familia $\mathcal{P}(\Omega)$ formada por todos los subconjuntos abiertos $B \subset \Omega$ que son de la forma

$$B = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0\}$$

donde $f \in C(S)$ y $f \geqq 0$. Designaremos por $\mathcal{P}_0(\Omega)$ la subfamilia de $\mathcal{P}(\Omega)$ formada por los conjuntos abiertos $B = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0\}$ tales que $f \in C(S)$, y $f > 0$.

16. Lema.—*Sea* $\{P_n : n \in N\}$ *una sucesión creciente en* $\mathcal{P}$ *con* $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = S$. *Entonces existe* $f \in C(S)$, $f > 0$ *tal que*

$$\left\{x \in S : f(x) > \frac{1}{2^n}\right\} \subset P_n$$

para cada $n \in N$.

Demostración.—Sea $P_n = \{x \in S : f_n(x) > 0\}$, donde $f_n \in C(S)$ y $f_n \geqq 0$. Si $g_n = \max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ entonces también es $g_n \in C(S)$ y $g_n \geqq 0$, verificándose que $P_n = \{x \in S : g_n(x) > 0\}$. La función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \min\left\{g_n(x), \frac{1}{2^n}\right\}$$

es continua acotada y $f(x) > 0$ para todo $x \in S$.

Si se supone que $x \notin P_n$ entonces $g_n(x) = 0$, lo cual implica, por ser g_n creciente, que

$$g_{n-1}(x) = g_{n-2}(x) = \ldots = g_1(x) = 0.$$

Se deduce entonces que

$$f(x) \leqq \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2^n}.$$

17. Proposición.—*Con las notaciones introducidas anteriormente se verifica:*

17.1) $\mathcal{P}_0(\Omega) \subset L_\sigma(\mathcal{P})$.

17.2) *Para cada* $M \in L_\sigma(\mathcal{P})$ *existe* $B \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ *tal que* $B \subset M$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $B \in \mathscr{P}_0(\Omega)$, $B = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0\}$, donde $f \in C(S)$ y $f > 0$. Entonces

$$D_n = \left\{ x \in S : f(x) > \frac{1}{2^n} \right\}$$

es una sucesión creciente en $\mathscr{P}$ con $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = S$. Si

$$B_n = \left\{ \alpha \in \Omega : \alpha(f) > \frac{1}{2^n} \right\}$$

se deduce fácilmente que $B_n \subset \hat{D}_n \subset B_{n+1}$ para todo $n \in N$. Por consiguiente

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{D}_n,$$

luego $B \in L_\sigma(\mathscr{P})$, y queda probado 17.1.

Dado $M \in L_\sigma(\mathscr{P})$ puede suponerse que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{P}_n$, donde $\{P_n : n \in N\}$ es una sucesión creciente en $\mathscr{P}$ con $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = S$. El lema 16 asegura la existencia de una función $f \in C(S)$ y $f > 0$, tal que

$$D_n = \left\{ x \in S : f(x) > \frac{1}{2^n} \right\}$$

está contenido en P_n para cada $n \in N$. Si $B = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0\}$ se verifica que $B \subset M$, pues $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{D}_n$ y $\hat{D}_n \subset \hat{P}_n$ para cada $n \in N$.

18. LEMA.—*Sea* $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. *Si para cada* $\theta \subset \Omega$ *se define*

$$\hat{\mu}^*(\theta) = \inf\{\hat{\mu}(B) : \theta \subset B \in \mathscr{P}(\Omega)\},$$

entonces $\hat{\mu}^*$ *es una medida exterior sobre* Ω, *con la propiedad de que cada* $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ *es* $\hat{\mu}^*$*-medible.*

DEMOSTRACIÓN.—Bastará probar que $\hat{\mu}^*$ es numerablemente subaditiva, pues las restantes propiedades de la medida exterior son evidentes. Sea pues $\theta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \theta_n$, donde $\theta_n \subset \Omega$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \in N$ existe $f_n \in C(S)$, $0 \leqq f_n \leqq 1$, tal que el conjunto $B_n = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f_n) > 0\}$ verifica $\hat{\mu}(B_n) \leqq \hat{\mu}^*(\theta_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ y $B_n \supset \theta_n$.

Sea $f \in C(S)$ la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x).$$

Evidentemente $\theta \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$, donde $B = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0\}$. Como

$$\hat{\mu}(B) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(B_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}^*(\theta_n) + \varepsilon$$

se deduce que

$$\hat{\mu}^*(\theta) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}^*(\theta_n) + \varepsilon$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$.

Sea $M \in \mathscr{P}(\Omega)$, $M = \{\alpha \in \Omega : \alpha(\psi) > 0\}$ donde $\psi \in C(S)$, $\psi \geqq 0$. La sucesión $M_n = \{\alpha \in \Omega : \alpha(\psi) \geqq 1/n\}$ es creciente y $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ se verifica que

$$\hat{\mu}(A \cap M^c) = \lim_n \hat{\mu}(A \cap M^c_n)$$

luego dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in N$ tal que

$$\hat{\mu}(A \cap M^c_n) \leqq \hat{\mu}(A \cap M^c) + \varepsilon.$$

Como $A \cap M$ y $A \cap M^c_n$ pertenecen a $\mathscr{P}(\Omega)$ resulta

$$\hat{\mu}(A) = \hat{\mu}(A \cap M) + \hat{\mu}(A \cap M^c) \geqq \hat{\mu}(A \cap M) + \hat{\mu}(A \cap M^c_n) - \varepsilon =$$
$$= \hat{\mu}^*(A \cap M) + \hat{\mu}^*(A \cap M^c_n) - \varepsilon \geqq \hat{\mu}^*(A \cap M) + \hat{\mu}^*(A \cap M^c) - \varepsilon.$$

Si $T \subset \Omega$, para cada $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $A \supset T$, se verifica

$$\hat{\mu}(A) \geqq \hat{\mu}^{*}(T \cap M) + \hat{\mu}^{*}(T \cap M^{c})$$

de donde se deduce

$$\hat{\mu}^{*}(T) = \hat{\mu}^{*}(T \cap M) + \hat{\mu}^{*}(T \cap M^{c})$$

cualquiera que sea $T \subset \Omega$, con lo que queda probado que M es $\hat{\mu}^{*}$-medible.

19. TEOREMA.—*Sea* $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. *Las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

19.1) μ *es secuencialmente* $\mathscr{P}$*-regular.*

19.2) μ *es* σ*-aditiva.*

19.3) $\hat{\mu}^{*}(\Omega_{\tau}) = 1$.

DEMOSTRACIÓN.—Es fácil comprobar que $B \in \mathscr{P}_0(\Omega)$ si y sólo si $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ y $B \supset \Omega_{\tau}$. Se deduce entonces que

$$\hat{\mu}^{*}(\Omega_{\tau}) = \inf\{\hat{\mu}(B) : B \in \mathscr{P}_0(\Omega)\}.$$

Teniendo en cuenta la proposición 17 resulta

$$\hat{\mu}^{*}(\Omega_{\tau}) = \inf\{\hat{\mu}(B) : B \in L_{\sigma}(\mathscr{P})\}.$$

Del teorema 12 se deduce que 19.1 y 19.3 son equivalentes.

Supongamos que se cumple 19.1 y sea $f_n \in C(S)$ una sucesión decreciente, $0 \leqq f_n \leqq 1$, tal que $\lim\limits_{n} f_n(x) = 0$ para todo $x \in S$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea

$$P_n = \{x \in S : f_n(x) < \varepsilon\} = \{x \in S : \psi_n(x) > 0\}$$

donde $\psi_n(x) = \max\{\varepsilon - f_n(x), 0\}$. Es evidente que P_n es una sucesión creciente en $\mathscr{P}$ que cumple $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n = S$. Si $F_n = S - P_n$ se verifica $\lim\limits_{n} \mu(F_n) = 0$ y por lo tanto

$$0 \leqq \mu(f_n) = \mu(f_n \chi_{P_n}) + \mu(f_n \chi_{F_n}) \leqq \mu(\varepsilon \chi_{P_n}) + \mu(F_n) \leqq 2\varepsilon$$

si n es suficientemente grande, con lo que queda probado 19.3.

Finalmente probaremos que si se cumple 19.2 entonces $\hat{\mu}(B) = 1$ para todo $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ que verifique $\Omega_\tau \subset B$ (lo cual equivale a 19.3).

En efecto, en estas condiciones sabemos que $B \in \mathcal{P}_0(\Omega)$ y por lo tanto $B = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f) > 0\}$ con $f \in C(S)$ y $f > 0$.

La sucesión $f_n \in C(S)$ definida por $f_n(x) = \max\{1 - n f(x), 0\}$ es decreciente y verifica que $\lim_n f_n(x) = 0$ para cada $x \in S$.

Como $\hat{f}_n(\alpha) = \max\{1 - n \hat{f}(\alpha), 0\}$, se deduce que $\hat{f}_n$ es una sucesión decreciente que converge puntualmente hacia la función característica del compacto $Z = \Omega - B$.

Puesto que μ es σ-aditiva resulta que

$$\mu(Z) = \lim_n \hat{\mu}(\hat{f}_n) = \lim_n \mu(f_n) = 0,$$

y por lo tanto $\hat{\mu}(B) = 1$ como se quería probar.

20. Teorema.—*Sea $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$. Las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

20.1) *μ es secuencialmente $\mathcal{P}$-singular.*

20.2) *μ es puramente finitamente aditiva.*

20.3) $\hat{\mu}^{*}(\Omega_\tau) = 0$.

Demostración.—Del teorema 12 se deduce que 20.1 y 20.3 son equivalentes, pues $\hat{\mu}(\Omega_\tau) = \inf\{\hat{\mu}(B) : B \in L_\sigma(\mathcal{P})\}$.

Si μ es secuencialmente $\mathcal{P}$-singular y $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ es σ-aditiva verificando $0 \leqq \gamma \leqq \mu$, se deduce de la definición que γ también es secuencialmente $\mathcal{P}$-singular. Pero γ es secuencialmente $\mathcal{P}$-regular en virtud del teorema 19 y por consiguiente debe ser $\gamma = 0$. Queda así probado que 20.1 implica 20.2.

Recíprocamente, supongamos que se verifica 20.2 y sea $\mu = \lambda + \nu$ donde λ es secuencialmente $\mathcal{P}$-singular y ν es secuencialmente $\mathcal{P}$-regular. Como $0 \leqq \nu \leqq \mu$ y ν es σ-aditiva por el teorema 19, se deduce que $\nu = 0$ y por lo tanto $\mu = \lambda$ es secuencialmente $\mathcal{P}$-singular.

21. Corolario.—*Cada medida finitamente aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu = \lambda + \nu$, donde $\lambda \in \mathcal{M}(S)$ es puramente finitamente aditiva y $\nu \in \mathcal{M}(S)$ es σ-aditiva.*

DEMOSTRACIÓN.—Consecuencia inmediata de los teoremas 14, 19 y 20.

22. PROPOSICIÓN.—*Sea* $\mu \in \mathcal{M}(S)$. *Son equivalentes:*

22.1) μ *es* σ*-aditiva.*

22.2) $\mu(S) = \lim\limits_{n} \mu \{x \in S : f(x) > \frac{1}{2^n}\}$, *para cada* $f > 0$, $f \in C(S)$.

DEMOSTRACIÓN.—Es inmediato que 22.1 implica 22.2. Recíprocamente, aplicando el lema 16 se deduce de 22.2 que μ es secuencialmente $\mathcal{P}$-regular y por tanto σ-aditiva.

23. PROPOSICIÓN.—*Sea* $\mu \in \mathcal{M}(S)$. *Son equivalentes:*

23.1) μ *es puramente finitamente aditiva.*

23.2) *Para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $f \in C(S)$, $f > 0$, *tal que*

$$\mu \left\{ x \in S : f(x) > \frac{1}{2^n} \right\} < \varepsilon$$

para todo $n \in N$.

DEMOSTRACIÓN.—Si se cumple 23.2 entonces μ es secuencialmente $\mathcal{P}$-singular y por lo tanto se verifica 23.1. El recíproco es consecuencia inmediata del lema 16.

24. COROLARIO.—*Sea* $\mu \in \mathcal{M}(S)$. *Si existe* $f \in C(S)$, $f > 0$, *tal que* $\mu(f) = 0$, *entonces* μ *es puramente finitamente aditiva.*

DEMOSTRACIÓN.—Para cada número $c > 0$ se verifica

$$\mu \{ x \in S : f(x) > c \} = 0,$$

y se cumple 23.2.

25. OBSERVACIÓN.—Es inmediato que las proposiciones 22 y 23 siguen siendo ciertas si se sustituye la sucesión $\frac{1}{2^n}$ por cualquier otra sucesión decreciente ε_n con $\lim\limits_{n} \varepsilon_n = 0$.

26. Corolario.—*Sea S un grupo topológico localmente compacto, σ-compacto y no compacto. Toda medida invariante a la izquierda $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$ es puramente fnitamente aditiva.*

Demostración.—Es fácil probar que $\mu(\mathrm{K}) = 0$ para cada compacto $\mathrm{K} \subset \mathrm{S}$ (véase en [1] la demostración del corolario 21).

Sea (K_n) una sucesión expansiva de compactos en S tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_n = \mathrm{S}$. Para cada $n \in \mathrm{N}$ sea $f_n \in \mathrm{C}(\mathrm{S})$ tal que $0 \leqq f_n \leqq 1$, $\mathrm{M}_n = \mathrm{sop}\,(f_n)$ es compacto, y $f_n(x) = 1$ para cada $x \in \mathrm{K}_n$.

La función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

pertenece a $\mathrm{C}(\mathrm{S})$, $f(x) > 0$ para cada $x \in \mathrm{S}$ y $\mu(f) = 0$, pues $0 \leqq \mu(f_n) \leqq \mu(\mathrm{M}_n) = 0$.

Se deduce del corolario 24 que μ es puramente finitamente aditiva.

27. Definición.—*Diremos que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es τ-aditiva si para cada red decreciente $\mathrm{f_j} \in C(S)$ que verifique $\lim_{\mathrm{j}} \mathrm{f_j}(\mathrm{x}) = 0$ para todo $\mathrm{x} \in S$, se cumple que $\lim_{\mathrm{i}} \mu(\mathrm{f_j}) = 0$.*

Diremos que $\mu \in \mathcal{M}(S)$ es puramente σ-aditiva si es σ-aditiva y cada medida τ-aditiva $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ que verifique $0 \leqq \gamma \leqq \mu$ es idénticamente nula.

28. Lema.—*Para cada abierto $A \subset \Omega$ que verifique $\Omega_\tau \subset A$ existe $M \in L(\mathcal{G})$ tal que $\Omega_\tau \subset M \subset A$.*

Demostración.—Como $\{\hat{\mathrm{H}} : \mathrm{H} \subset \mathrm{S}\}$ es una base de la topología de Ω, se tendrá $\mathrm{A} = \bigcup_{n=1} \hat{\mathrm{H}}_i$, donde $\{\mathrm{H}_i : i \in \mathrm{I}\}$ es una familia de partes de S que no es restrictivo suponer filtrante creciente. Para cada $x \in \mathrm{S}$ consideremos el compacto

$$\theta_x = \{\alpha \in \Omega : \alpha(\mathrm{V}) = 1 \quad \text{si} \quad \mathrm{V} \in \mathcal{V}_x\}.$$

Como $\theta_x \subset \Omega_\tau \subset \mathrm{A}$ se deduce que $\theta_x \subset \hat{\mathrm{H}}_i$ para algún $i \in \mathrm{I}$.

Evidentemente $x \in H_i$ pues $\delta_x \in \theta_x$. Si x no fuese interior a H_i el filtro $\{V \cap H_i^c : V \in \mathcal{V}_x\}$ estaría contenido en un ultrafiltro $\mathcal{U}$, necesariamente convergente hacia x. Si $\alpha \in \Omega$ es la medida asociada a este ultrafiltro, se verificaría $\alpha \in \theta_x$ y $\alpha \notin \hat{H}_i$ en contradicción con la inclusión $\theta_x \subset \hat{\mathring{H}}_i$. Hemos probado que $\{\mathring{H}_i : i \in I\}$ es un recubrimiento abierto de S.

El conjunto $M = \bigcup_{i \in I} \hat{G}_i$, donde $G_i = \mathring{H}_i$, pertenece a $L(\mathcal{G})$ y es fácil comprobar que $\Omega_\tau \subset M \subset A$.

En lo que sigue designaremos por $\hat{\mu}^*$ la medida exterior sobre Ω asociada a la medida de Radon $\hat{\mu}$, definida para cada $\theta \subset \Omega$ por

$$\hat{\mu}^*(\theta) = \inf\{\hat{\mu}(A) : \theta \subset A,\ A \text{ abierto en } \Omega\}.$$

29. Teorema.—*Dada $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$, consideremos las tres propiedades siguientes:*

29.1) μ *es $\mathcal{G}$-regular.*
29.2) $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = 1$.
29.3) μ *es τ-aditiva.*

Entonces 29.1 y 29.2 son equivalentes y 29.2 implica 29.3.

Si S es completamente regular las tres propiedades anteriores son equivalentes.

Demostración.—Es inmediato que $M \supset \Omega_\tau$ para cada $M \in L(\mathcal{G})$. Se deduce del lema 28 que $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = \inf\{\hat{\mu}(M) : M \in L(\mathcal{G})\}$. Entonces 29.1 y 29.2 son equivalentes en virtud del teorema 8. A continuación probaremos que 29.2 implica 29.3. Sea pues $(f_j)_{j \in J}$ una red decreciente en C (S) tal que $0 \leqq f_j \leqq 1$ para cada $j \in J$ y $\lim_j f_j(x) = 0$ para cada $x \in S$. Fijado $\varepsilon > 0$ sea $F = \bigcap_{j \in J} F_j$ donde

$$F_j = \{\alpha \in \Omega : \alpha(f_j) \geqq \varepsilon\}.$$

El conjunto $A = \Omega - F$ es abierto en Ω. Se verifica que $A \supset \Omega_\tau$, pues si $\alpha \in \Omega_\tau$ y x es el límite del ultrafiltro asociado a α se cumple que $\alpha(f_j) = f_j(x) < \varepsilon$ para algún $j \in J$ y por lo tanto $\alpha \notin F$.

Si suponemos que se cumple 29.2 se deduce que $\hat{\mu}(A) = 1$ y en consecuencia $0 = \hat{\mu}(F) = \lim_j \hat{\mu}(F_j)$, pues $\{F_j : j \in J\}$ es una red decreciente de compactos en Ω.

Si $A_j = \Omega - F_j$ se tiene:

$$\mu(f_j) = \hat{\mu}(\hat{f}_j) = \hat{\mu}(\hat{f}_j^* \chi_{F_j}) + \hat{\mu}(\hat{f}_j \chi_{A_j}) \leqq \hat{\mu}(F_j) + \hat{\mu}(\varepsilon \chi_{A_j}) \leqq \mu(F_j) + \varepsilon$$

y se deduce que existe $j_0 \in J$ tal que $\mu(f_j) < 2\varepsilon$ si $j \geqq j_0$.

Finalmente, supongamos que S es un espacio topológico completamente regular. Probaremos que en este caso **29.3** implica **29.1**.

Sea $\mathcal{D}$ una familia filtrante creciente de abiertos que recubre S. Le asociamos a $\mathcal{D}$ la familia Ψ de todas las funciones $f \in C(S)$, $0 \leqq f \leqq 1$, para las que existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $f(x) = 0$ si $x \notin D$.

Es fácil comprobar que si $f_1, f_2 \in \Psi$ y $f = \min\{f_1, f_2\}$ entonces $f \in \Psi$. Por consiguiente se puede formar una red $(f_j)_{j \in J}$ donde $J = \Psi$ está dirigido en la forma natural: $i \leqq j$ si $f_i \geqq f_j$, siendo $f_j = j$.

Para cada $a \in S$ sea $D \in \mathcal{D}$ tal que $a \in D$. Como S es completamente regular, se puede asegurar la existencia de una función $f \in C(S)$ tal que $0 \leqq f \leqq 1$, $f(a) = 0$ y $f(x) = 1$ si $x \notin D$. De aquí se deduce que $\lim_j f_j(a) = 0$ para cada $a \in S$. Si suponemos que μ es τ-aditiva se deduce que $\lim_j \mu(f_j) = 0$, luego dado $\varepsilon > 0$ existe $j \in J$ tal que $\mu(f_j) < \varepsilon$.

Según la definición de la familia Ψ existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $f_j(x) = 1$ siempre que $x \notin D$. Evidentemente $\chi_{D-S} \leqq f_j$, de donde resulta que $\mu(S - D) \leqq \mu(f_j) < \varepsilon$ y por lo tanto se tiene

$$\mu(D) = 1 - \mu(S - D) \geqq 1 - \varepsilon$$

con lo cual queda probado que μ es $\mathcal{G}$-regular.

30. Teorema.—*Dada $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$, consideremos las tres propiedades siguientes:*

30.1) *μ es $\mathcal{G}$-singular.*

30.2) $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = 0$.

30.3) *μ es puramente σ-aditiva.*

Entonces 30.1 y 30.2 son equivalentes, y 30.3 implica 30.1.

Si S es completamente regular y μ es σ-aditiva, las tres propiedades anteriores son equivalentes.

Demostración.—Del teorema 8 se deduce que 30.1 y 30,2 son equivalentes, pues $\hat{\mu}^*(\Omega_\tau) = \inf\{\hat{\mu}(M) : M \in L(\mathcal{G})\}$. Probaremos que 30.3 implica 30.1.

Según el teorema 10 existe una única descomposición $\mu = \lambda + \nu$, donde λ es $\mathcal{G}$-singular y ν es $\mathcal{G}$-regular. Como $0 \leqq \nu \leqq \mu$ y ν es τ-aditiva en virtud del teorema 29, la hipótesis de que μ es puramente σ-aditiva implica que $\nu = 0$ y por lo tanto $\mu = \lambda$ es $\mathcal{G}$-singular.

Supongamos ahora que S es completamente regular y que μ es σ-aditiva. Si μ es $\mathcal{G}$-singular y $\gamma \in \mathcal{M}(S)$ verifica $0 \leqq \gamma \leqq \mu$ entonces γ es $\mathcal{G}$-singular. Si se supone además que γ es τ-aditivo resulta del teorema 29 que γ también es $\mathcal{G}$-regular y por lo tanto $\gamma = 0$. Queda probado así que 30.1 implica 30.3.

31. COROLARIO.—*Sea S un espacio topológico completamente regular. Entonces cada medida σ-aditiva $\mu \in \mathcal{M}(S)$ se puede descomponer de modo único en la forma $\mu = \lambda + \nu$, donde λ es puramente σ-aditiva y ν es τ-aditiva.*

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia inmediata de los teoremas 10, 29 y 30.

Bibliografía

[1] BOMBAL, F. y VERA, G. 1973. *Medias invariantes en espacios localmente convexos y semi-reflexividad.* «Coll. Math.», XXIV, 3-31.

[2] BADRIKIAN, A. 1970. *Séminaire sur les Fonctions. Aléatoires Linéaires et les Mesures Cylindriques. Lectures Notes.* Springer-Verlag.

[3] CHOQUET, G. 1969. *Lectures on Analysis.* Benjamin. New York.

[4] KELLEY, J. L. 1955. *General Topology.* Van Nostrand. New York.

[5] KNOWLES, J. D. 1967. *Measures on topological spaces.* «Proc. London Math. Soc.», **17**, 139-156.

[6] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. 1973. *Teoría de la medida sobre los espacios topológicos no localmente compactos.* «Rev. Mat. Hisp. Amer», XXXIII.

[7] SCHWARTZ, L. 1973. *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.* Tata Inst. of fund. research. Oxford Univ. Press.

[8] VARADARAJAN, V. S. 1965. *Measures on topological spaces*. «Amer. Math. Soc. Transl.», **48**, 161-228.

[9] VERA, G. 1979. *Medidas finitamente aditivas en espacios topológicos*. «Rev. de la Real Acad. de Ciencias Exact., Fís. y Nat.», LXXII, 3.°, 427-435.

[10] YOSIDA, K. y HEWITT, E. 1952. *Finitely additive measures*. «Trans. Amer. Math. Soc.», **72**, 46-66.