

TEORIA CUALITATIVA DE SISTEMAS HAMILTONIANOS

Enrique A. González Velasco

Recibido: 4-X-78

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO DE NÚMERO D. DARÍO MARAVALL

El propósito de este artículo es presentar algunos de los aspectos y problemas más recientes de la teoría de sistemas Hamiltonianos. Dos tipos de cuestiones recibirán la mayor parte de nuestra atención: el estudio de propiedades genéricas y el de problemas de estabilidad. En particular, la estabilidad de órbitas cerradas de sistemas con dos grados de libertad se estudia a partir del celebrado teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser.

The object of this paper is to present some of the recent aspects and problems of the theory of Hamiltonian systems. We will devote most of our attention to two types of problems: the study of generic properties and that of questions of stability. In particular, the study of the stability of closed orbits of systems with two degrees of freedom is based on the celebrated theorem of Kolmogorov-Arnold-Moser.

1. Conceptos básicos

Es necesaria una cierta cantidad de prerequisites matemáticos para los que no hay espacio aquí. Especialmente en lo que se refiere a la teoría de variedades diferenciales. Hay dos referencias excelentes que utilizaremos continuamente: los capítulos I y II de [1], o bien el capítulo 9, secciones 1 y 3 del capítulo 11 y sección 1 del capítulo 13 de [8].

Consideremos un campo vectorial de clase C^r en \mathbb{R}^n , es decir, una función $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuyas derivadas parciales de orden menor o igual a r son continuas. Este campo define la ecuación diferencial $\dot{x} = X(x)$ en \mathbb{R}^n . Sea $\varphi(x, t)$ la solución de esta ecuación que pasa por x para $t = 0$, y supongamos que está definida para

todo t en un intervalo I . Según la teoría de ecuaciones diferenciales, φ es de clase C^r y además:

(1) Para todo $t \in I$ la aplicación $\varphi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ es un difeomorfismo de clase C^r .

(2) $\varphi(x, 0) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

(3) $\varphi(\varphi(x, t), s) = \varphi(x, t + s)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ si

$$t, s, t + s \in I.$$

Si, además, cada solución está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces se dice que $\dot{x} = X(x)$ define un flujo o sistema dinámico en \mathbb{R}^n . Esta misma idea se puede generalizar a una variedad diferenciable M que supondremos de clase C^k ($1 \leq k \leq \infty$), compacta, conexa y de dimensión finita.

1.1. DEFINICIÓN.—Un *sistema dinámico diferenciable* o *flujo* de clase C^r , $1 \leq r \leq k$, es una aplicación $\varphi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ de clase C^r que satisface a las propiedades siguientes:

(1) Para todo $t \in \mathbb{R}$ la aplicación $\varphi_t: M \rightarrow M$ definida por $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$ es un difeomorfismo de clase C^r .

(2) $\varphi(x, 0) = x$ para todo $x \in M$.

(3) $\varphi(\varphi(x, t), s) = \varphi(x, t + s)$ para todo $x \in M$ y para todo par $t, s \in \mathbb{R}$.

Un flujo en M define un campo vectorial o ecuación diferencial en M , y viceversa. En efecto, si $x \in M$ y φ es un flujo, sea $\varphi_x: \mathbb{R} \rightarrow M$ la función dada por $\varphi_x(t) = \varphi(x, t)$. Como $\varphi_x(0) = x$, φ_x representa una curva en M que pasa por x . Su vector tangente en x , $X(x)$, pertenece al espacio tangente a M en x , $T_x(M)$. La función $x \mapsto X(x)$ es un *campo vectorial* en M llamado *generador infinitesimal* de φ . Este campo, considerado como una aplicación de M en su fibrado tangente, $X: M \rightarrow T(M)$, es de clase C^r si $r < k$ y de clase C^{r-1} si $r = k$ [8, p. 379]. A su vez, un campo vectorial define una ecuación diferencial local del siguiente modo: si (U, α) es un sistema de coordenadas en x , la función $\alpha \circ \varphi_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva en \mathbb{R}^n . Llamando $X_\alpha(v)$ a su vector tangente en $v = \alpha(x)$, se puede escribir la ecuación $\dot{v} = X_\alpha(v)$, $v \in \alpha(U)$.

Supongamos, por el contrario, que se da un campo vectorial en M . Si $\phi(v, t)$ es la solución de su ecuación diferencial local en $\alpha(U)$ que pasa por v para $t = 0$, sabemos que ϕ satisface a las propiedades de la Definición 1.1. Así pues, por cada $v \in \alpha(U)$ pasa una

curva $\phi_v(t)$, y $\alpha^{-1} \circ \phi_v(t)$ es una curva en M que designamos por $\varphi(x, t)$ y pasa por $\alpha^{-1}(\phi_v(0)) = \alpha^{-1}(v) = x$ para $t = 0$. Puede demostrarse que cuando M es compacta, como hemos supuesto, $\varphi(x, t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y satisface a las propiedades de la Definición 1.1 [8, p. 381; 1, p. 41]. Por estas razones, usaremos los términos sistema dinámico, flujo y campo vectorial como equivalentes entre sí.

1.2. DEFINICIÓN.—La *órbita* o *trayectoria* de un flujo φ a través de un punto $x \in M$ es el conjunto $\gamma(x) = \{\varphi(x, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Una órbita consistente en un solo punto se llama *punto crítico* de φ . Una órbita γ de φ que no es punto crítico se llama *cerrada* ssi (1) para cada $p \in \gamma$ existe un número $T > 0$ tal que $\varphi_p(T) = \varphi(p, T) = p$.

Es fácil demostrar que T no depende de p . El menor número T con esta propiedad se denomina el *período* de γ . De modo global, nos referiremos a los puntos críticos y órbitas cerradas de un flujo como los *elementos críticos* del flujo. Los siguientes conceptos desempeñan un papel fundamental en la teoría genérica de sistemas dinámicos.

1.3. DEFINICIÓN.—Si φ es un flujo en M , designemos por $\varphi_t: M \rightarrow M$ a la aplicación $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$. Los autovalores de la derivada de φ_1 en p , $T_p \varphi_1: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$, se conocen con el nombre de *multiplicadores característicos* de φ en p .

Si γ es una órbita cerrada de un flujo φ , X es el campo correspondiente a φ y $p \in \gamma$, una *sección transversal local* de X en p es una subvariedad S de M de codimensión uno y tal que si $q \in S$ entonces $X(q) \notin T_q(S)$. Se demuestra [1, p. 159] que existen dos vecindades abiertas de p en S , V_1 y V_2 , y un difeomorfismo $\Phi: V_1 \rightarrow V_2$, que llamaremos *transformación de Poincaré* en p , tal que $\Phi(q) = \varphi(q, t_1)$, en donde t_1 es el primer valor de t para el cual $\varphi(q, t_1) \in V_2$. En particular, $\Phi(p) = \varphi(p, T)$ en donde T es el período de γ .

1.4. DEFINICIÓN.—Si γ es una órbita cerrada de φ y Φ es la transformación de Poincaré en $p \in \gamma$, los autovalores de $T_p \Phi$ se denominan los *multiplicadores característicos* de φ en γ , o simplemente de γ .

(1) Hemos adoptado el símbolo «ssi» con el significado de «sí y sólo sí».

Esta definición es independiente de $p \in \gamma$ [1, p. 165]. Los autovalores de $T_p \Phi$ están relacionados con los de

$$T_p \varphi_T : T_p(M) \longrightarrow T_p(M),$$

que sería el equivalente de $T_p \varphi_1$ para órbitas cerradas. Es obvio que

$$T_p \varphi_T(X(p)) = X(p),$$

y esto implica que $T_p \varphi_T$ tiene un autovalor igual a uno. Se puede demostrar que los restantes autovalores de $T_p \varphi_T$ son los multiplicadores característicos de φ en γ [1, p. 165].

1.5. DEFINICIÓN.—Sea γ un elemento crítico de un flujo φ . Los conjuntos

$$W^+(\gamma) = \{x \in M \mid \varphi_t(x) \longrightarrow \gamma \text{ para } t \longrightarrow \infty\}$$

y

$$W^-(\gamma) = \{x \in M \mid \varphi_t(x) \longrightarrow \gamma \text{ para } t \longrightarrow -\infty\}$$

se denominan las *variedades estable e inestable* de γ respectivamente.

Se demuestra [1, p. 166] que $W^+(\gamma)$ y $W^-(\gamma)$ son, en un entorno de γ , subvariedades de dimensiones iguales al número de multiplicadores característicos de γ de valor absoluto menor y mayor que uno respectivamente, y su intersección es precisamente γ .

1.6. DEFINICIÓN.—Si S_1 y S_2 son subvariedades de M y $x \in M$, se dice que S_1 y S_2 son *transversales en x* , en símbolos

$$S_1 \pitchfork_x S_2, \quad \text{ssi } x \notin S_1 \cap S_2,$$

o bien

$$x \in S_1 \cap S_2 \quad \text{y} \quad T_x(M) = T_x(S_1) + T_x(S_2).$$

Se dice que S_1 y S_2 son *transversales*, en símbolos

$$S_1 \pitchfork S_2, \quad \text{ssi } S_1 \pitchfork_x S_2$$

para todo $x \in M$.

Para tener una imagen gráfica de la idea de transversalidad basta decir que, en el espacio tridimensional, los planos $x = 0$ y $z = 0$

son transversales, mientras que dos ejes coordenados no lo son porque sus espacios tangentes en el origen generan a \mathbb{R}^2 en vez de a \mathbb{R}^3 .

Por último, el conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^r en una variedad compacta M puede ser dotado de una topología del siguiente modo: Si X es un campo en M y (U, α) es un sistema de coordenadas, el representante local de X es una función $X_\alpha: \alpha(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ (véase arriba). Si X e Y son dos campos en M y K es un conjunto compacto en U , se hallan todas las derivadas parciales de cada componente de $X_\alpha - Y_\alpha$ hasta el orden r inclusive, y se calculan los máximos que los valores absolutos de cada una de ellas alcanzan en K . El máximo de todos estos valores se denomina la distancia entre X e Y y se designa por $d(X, Y; K)$. Si $\{K_i\}$ es una cubierta finita de M con cada K_i compacto y contenido en el dominio de un sistema de coordenadas, se define

$$d(X, Y) = \max_i d(X, Y; K_i).$$

Se puede demostrar que d es una métrica con la cual el conjunto de todos los campos de clase C^r se convierte en un espacio métrico completo, y que la topología inducida no depende de $\{K_i\}$. Designamos a este espacio por $\mathcal{X}^r(M)$.

2. Sistemas Hamiltonianos

Hay dos formas diferenciales definidas en el fibrado cotangente de una variedad que juegan un papel fundamental. Una de ellas permite establecer una correspondencia biunívoca entre campos vectoriales y formas diferenciales lineales. Definiremos los sistemas Hamiltonianos como campos correspondientes a determinadas formas lineales a través de la identificación que acabamos de mencionar.

Sean $T^*(M)$ el fibrado cotangente de una variedad M , $\pi: T^*(M) \rightarrow M$ la proyección canónica, $z \in T^*(M)$ y $T^*_{\pi(z)}(M)$ el espacio cotangente a M en $\pi(z)$. Si la derivada de π en z es

$$T_z \pi: T_z(T^*(M)) \rightarrow T_{\pi(z)}(M)$$

y si $v \in T_z(T^*(M))$ es un vector tangente a $T^*(M)$ en z , entonces

$T_z \pi(v)$ es un vector tangente a M en $\pi(z)$. Como $z \in T^*_{\pi(z)}(M)$, se puede definir una aplicación

$$\omega_z : T_z(T^*(M)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

por medio de la expresión $\omega_z(v) = \langle T_z \pi(v), z \rangle$. ω_z es claramente lineal.

2.1. DEFINICIÓN.—La forma diferencial lineal ω definida en $T^*(M)$ por $z \mapsto \omega_z$ se denomina *forma lineal canónica* en $T^*(M)$. Su primera derivada exterior tomada con signo negativo, $\Omega = -d\omega$ se denomina la *dos-forma canónica* en $T^*(M)$.

Obsérvese que $d\Omega = 0$ puesto que $d^2 = 0$ [1, p. 61; 8, p. 439].

Si ω denota ahora a una forma lineal cualquiera y X es un campo vectorial en una variedad M , se puede definir una aplicación $\omega(X) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por la ecuación $\omega(X)(x) = \langle X(x), \omega(x) \rangle$. Análogamente, si Ω es una dos-forma y X e Y son dos campos vectoriales, se define $\Omega(X, Y) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por la ecuación

$$\Omega(X, Y)(x) = \Omega(x)(X(x), Y(x)),$$

puesto que $\Omega(x)$ es una forma bilineal en $T_x(M)$.

2.2. DEFINICIÓN.—Si X es un campo vectorial, ω una forma diferencial lineal y Ω una dos-forma en una variedad M , el *producto interior de X y ω* , designado por $i_X \omega$, es una función real definida por $i_X \omega = \omega(X)$, el *producto interior de X y Ω* es una forma diferencial lineal definida por

$$i_X \Omega(Y) = 2 \Omega(X, Y),$$

y, por último, el *producto interior de X y $d\Omega$* se define por

$$i_X d\Omega(Y, Z) = 3 d\Omega(X, Y, Z).$$

Necesitaremos las siguientes propiedades del producto interior y de la derivada de Lie, que se define más abajo en el momento de su utilización.

2.3. LEMA ([1, p. 65; 8, p. 456]).—Si f es una función real, X

un campo vectorial y Ω una dos-forma en una variedad, y L_X indica derivada de Lie, entonces:

$$(1) \quad L_X \Omega = i_X d\Omega + d(i_X \Omega),$$

$$(2) \quad L_X f = i_X df.$$

Todo esto permite enunciar la correspondencia ya mencionada entre campos y formas.

2.4. PROPOSICIÓN ([8, p. 518]).—La dos-forma canónica Ω establece una correspondencia biunívoca, $X \leftrightarrow i_X \Omega$, entre campos vectoriales y formas lineales en $T^*(M)$.

Designaremos por ω_X a la forma lineal correspondiente al campo X y por X_ω al campo correspondiente a la forma ω . Diremos que una forma diferencial es *exacta* ssi es la derivada exterior de otra forma diferencial.

2.5. DEFINICIÓN.—Un *campo Hamiltoniano* en $T^*(M)$ es un campo correspondiente a una forma diferencial lineal exacta, es decir, un campo de la forma X_{dH} , en donde H es una función $H: T^*(M) \rightarrow \mathbb{R}$ llamada la *energía*.

Esta definición parece caprichosa por haber escogido como espacio base no una variedad sino su fibrado cotangente. Conviene explicar por qué aunque sea muy brevemente. Supondremos que en los sistemas de la mecánica el espacio de posibles configuraciones del sistema es una variedad diferenciable M . Por ejemplo, si una partícula se mueve sobre la superficie de la esfera, $M = S^2$. Ahora bien, la posición de la partícula, en general la configuración del sistema en función del tiempo, no queda determinada para todo t por la configuración inicial. Depende, además, de su velocidad inicial y de su masa. Se supone, sin embargo, que existe una función del tiempo, denominada *estado del sistema*, cuyo conocimiento en un instante determina el estado para todo t . El estado del sistema ha de ser más general que la configuración, pero debe contener a esta última. Supondremos también que el conjunto de estados posibles del sistema es otra variedad diferenciable, llamémosla N , y que la proyección canónica $\pi: N \rightarrow M$, que asocia a cada estado su configuración correspondiente, es una función diferenciable. Por último, se supone que la función $\varphi: N \times \mathbb{R} \rightarrow N$, que asocia a cada estado inicial s y a cada tiempo t el estado $\varphi(s, t)$, es un flujo en N .

En los sistemas de la mecánica el estado consiste en la configuración del sistema en un instante dado y en el momento en ese instante. El conocimiento de estas variables determina el estado para todo t . La velocidad en un punto $x \in M$ es un vector en $T_x(M)$, y el momento, que es una función lineal de la velocidad, es un vector cotangente, es decir, un elemento del espacio dual $T_x^*(M)$ de $T_x(M)$. Por esta razón, resulta natural definir un sistema mecánico como un campo o flujo en

$$T^*(M) = \bigcup_{x \in M} T_x^*(M),$$

el fibrado cotangente.

El concepto de campo Hamiltoniano se puede generalizar del siguiente modo: lo que permitió la identificación de campos y formas lineales en $T^*(M)$ fue la existencia de una dos-forma Ω tal que $d\Omega = 0$ y tal que la condición $i_X \Omega = 0$ implica que $X = 0$ (invertibilidad de $X \leftrightarrow i_X \Omega$). Una dos-forma Ω en una variedad M se llama *no degenerada* ssi la condición $\Omega(z)(u, v) = 0$ para todo $v \in T_z(M)$ implica que $u = 0$. Para tal Ω , si X es un campo en M , $i_X \Omega = 0$ implica que

$$\Omega(z)(X(z), Y(z)) = 0$$

para todo $z \in M$ y todo campo Y en M , y entonces $X(z) = 0$ para todo $z \in M$. Esta Ω establece, pues, una correspondencia biunívoca entre campos y formas lineales en M .

Una forma diferencial cuya derivada exterior es nula se llama *cerrada*.

2.6. DEFINICIÓN.—Una *forma simpléctica* en una variedad es una dos-forma cerrada y no degenerada. Una *variedad simpléctica* (M, Ω) es una variedad M con una forma simpléctica Ω definida en M . Si (M, Ω) es una variedad simpléctica y $X \in \mathcal{X}^r(M)$ se dice que X es un *campo Hamiltoniano* ssi existe una función $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^{r+1} , llamada la *energía*, tal que X es el campo correspondiente a dH . Es decir, si este campo se designa por X_{dH} , entonces $dH = i_{X_{dH}} \Omega$. El conjunto de todos los campos Hamiltonianos de clase C^r en M con la topología de $\mathcal{X}^r(M)$ se denota por $\mathcal{X}_H^r(M)$.

2.7. **TEOREMA** (Principio de conservación de la energía).—Si X_{dH} es un campo Hamiltoniano, entonces la energía H es constante a lo largo de sus trayectorias.

DEMOSTRACIÓN.—Si φ es el flujo correspondiente a X_{dH} hay que demostrar que la función $H \circ \varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es constante. La derivada de Lie de H con respecto a φ es

$$L_X H(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H \circ \varphi_x(t) - H \circ \varphi_x(0)}{t},$$

por definición [8, p. 383]. Por tanto, basta demostrar que $L_X H = 0$. Como X_{dH} es Hamiltoniano, $i_{X_{dH}} \Omega = dH$, y el Lema 2.3.(2) implica que

$$L_{X_{dH}} H = i_{X_{dH}} dH = i_{X_{dH}} i_{X_{dH}} \Omega.$$

Aplicando la Definición 2.2 con $\omega = i_{X_{dH}} \Omega$ se obtiene

$$i_{X_{dH}} i_{X_{dH}} \Omega = i_{X_{dH}} \Omega(X_{dH}) = 2 \Omega(X_{dH}, X_{dH}),$$

y como Ω es antisimétrica el segundo miembro es nulo, q e. d.

2.8. **DEFINICIÓN**.—Si γ es una trayectoria de un campo Hamiltoniano X_{dH} , el valor constante $H(\gamma)$ se llama la *energía* de γ . Si $e \in \mathbb{R}$, una componente conexa, Σ_e , de $H^{-1}(e)$ se llama *superficie regular de energía* ssi $dH(x) \neq 0$ para todo $x \in \Sigma_e$.

Σ_e resulta ser una subvariedad de codimensión uno [1, p. 111].

3. Propiedades genéricas y estructura local de trayectorias

Trataremos de encontrar ahora propiedades que son satisfechas por un conjunto lo suficientemente grande de campos en $\mathcal{X}_H^r(M)$, a ser posible abierto y denso. Tales propiedades se llaman genéricas. De modo más preciso:

3.1. **DEFINICIÓN** (Smale).—Una propiedad satisfecha por un conjunto de flujos S en $\mathcal{X}^r(M)$ o $\mathcal{X}_H^r(M)$ se llama *genérica* ssi S contiene un conjunto residual, consistente en la unión denumerable de conjuntos que son abiertos y densos en $\mathcal{X}^r(M)$ o $\mathcal{X}_H^r(M)$.

En el caso general de $\mathcal{X}^r(M)$ las propiedades genéricas más importantes son las siguientes (para la demostración véase [15]):

- (1) Los multiplicadores característicos de todo elemento crítico no tienen valor absoluto igual a la unidad.
- (2) Para todo par γ_1, γ_2 de elementos críticos

$$W^+(\gamma_1) \cap W^-(\gamma_2) = \emptyset.$$

En el caso de $\mathcal{X}_H^r(M)$, la existencia de una forma simpléctica en M impone severas restricciones en los valores de los multiplicadores característicos de un elemento crítico. Para ver esto necesitamos una definición y un lema preliminares.

3.2. DEFINICIÓN.—Sea V un espacio vectorial de dimensión $2n$ dotado de una dos-forma simpléctica Ω . Una transformación lineal $T: V \rightarrow V$ se llama *simpléctica* ssi

$$\Omega(Tu, Tv) = \Omega(u, v)$$

para todo par (u, v) .

3.3. LEMA (Poincaré-Liapunov [1, p. 88]).—Si $T: V \rightarrow V$ es una transformación lineal simpléctica, entonces $\det T = 1$ y si λ es un autovalor de T , entonces $\bar{\lambda}$, $1/\lambda$ y $1/\bar{\lambda}$ son también autovalores de T de la misma multiplicidad que λ . Por otra parte, si 1 ó -1 son autovalores de T sus multiplicidades son pares.

Pues bien, si φ es el flujo correspondiente a un campo Hamiltoniano X_{dH} y γ es una órbita cerrada de período T , entonces $T_x \varphi_T$ es una transformación simpléctica para todo $x \in \gamma$. En efecto, el Lema 2.3.(1) implica que

$$i_{X_{dH}} \Omega = d(i_{X_{dH}} \Omega) = d(dH) = 0.$$

Recordemos que la derivada de Lie de una dos-forma está definida por

$$L_X \Omega(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T_x \varphi_t)^* \Omega(\varphi_x(t)) - \Omega(x)}{t},$$

en donde la estrella en el numerador se explica del siguiente modo: si

$$A: T_p(M) \rightarrow T_q(M)$$

es una transformación lineal, entonces

$$(A^* \Omega(q))(u, v) = \Omega(q)(A u, A v)$$

para todo par $u, v \in T_p(M)$. Pues bien, si tenemos en cuenta que en nuestro caso $L_{X_{dH}} \Omega = 0$ y que

$$\Omega(x) = (T_x \varphi_0)^* \Omega(\varphi_x(0)),$$

resulta que

$$(T_x \varphi_t)^* \Omega(\varphi_x(t))$$

es constante a lo largo de las trayectorias de X_{dH} . Para $t = 0$,

$$(T_x \varphi_T)^* \Omega(x) = \Omega(x),$$

es decir,

$$\Omega(x)(T_x \varphi_T u, T_x \varphi_T v) = \Omega(x)(u, v),$$

con lo que resulta que $T_x \varphi_T$ es una transformación simpléctica. De acuerdo con el comentario que sigue a la Definición 1.4, los autovalores de $T_x \varphi_T$ son los multiplicadores característicos de X_{dH} en γ más $\lambda = 1$. Según el Lema 3.3 el autovalor 1 tiene multiplicidad impar al menos igual a la unidad. Resulta, pues, que la propiedad (1) mencionada arriba no sólo no es genérica en $\mathcal{X}^r_H(M)$, sino que no es satisfecha por ninguna órbita cerrada.

En el caso de puntos críticos $T_x \varphi_t$ es simpléctica y los multiplicadores característicos aparecen en cuádruplos según el Lema 3.3. Si un punto crítico de un sistema Hamiltoniano tiene sus multiplicadores característicos en el círculo unidad, una perturbación ligera de este sistema en $\mathcal{X}^r_H(M)$ no basta para desplazarlos del círculo pues, de lo contrario, se crearía un cuádruplo por cada pareja

$$\lambda = 1/\lambda, \quad \bar{\lambda} = 1/\lambda.$$

Como la dimensión de la variedad es inalterable, esto no puede ser. Resulta así que la propiedad (1) tampoco es genérica para puntos críticos de sistemas Hamiltonianos. Para desarrollar una teoría genérica Abraham ha introducido un nuevo tipo de elemento crítico.

3.4. DEFINICIÓN.—Sea γ un elemento crítico de un sistema Hamiltoniano, y \mathcal{M} el conjunto formado por aquellos multiplicadores característicos $\lambda = \alpha + i\beta$ tales que

$$\lambda > 1 \quad \text{ó} \quad |\lambda| = 1 \quad \text{y} \quad \beta > 0,$$

más la mitad de aquellos que son iguales a 1 ó a -1 (en el caso de una órbita cerrada en que $\lambda = 1$ tiene multiplicidad impar, tómese $\lambda(m-1)/2$ veces). γ se denomina *elemental* ssi la condición $\prod \lambda_i^{n_i} = 1$ con $n_i \in \mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} denota a los enteros) y $\lambda_i \in \mathcal{M}$ implica que $n_i = 0$ para todo i .

Los teoremas siguientes nos dan información acerca de la estructura local de trayectorias en la vecindad de un elemento crítico.

3.5. TEOREMA (Kelley [5]).—Si γ es un elemento crítico de $X \in \mathcal{X}^r(M)$ con multiplicadores característicos de valor absoluto igual a uno, entonces existen subvariedades C , C^+ y C^- de M de clase C^r , denominadas *central*, *central-estable* y *central-inestable*, tales que:

- (1) γ está contenida en cada una de ellas.
- (2) C , C^+ y C^- están compuestas totalmente de trayectorias de X .
- (3) Si $x \in M$, $T_x C$ (o bien $T_x C^+$, $T_x C^-$) es igual a la suma de $T_x(\gamma)$ y el subespacio de $T_x(M)$ generado por los multiplicadores de módulo uno (o bien ≤ 1 , ≥ 1).

Cuando γ es un punto crítico elemental de un sistema Hamiltoniano, Liapunov descubrió que la variedad central se desdobra en variedades bidimensionales llamadas *subcentrales*.

3.6. TEOREMA (Liapunov-Kelley [6]).—Sea X_{dH} un sistema Hamiltoniano en M de clase C^r , $p \in M$ un punto crítico elemental y $e^{i\theta}$ un multiplicador característico de X_{dH} en p . Entonces existe una subvariedad bidimensional C_θ de M compuesta totalmente de órbitas cerradas y tal que $p \in C_\theta$ y $T_p C_\theta$ es el espacio generado por los exponentes $\pm i\theta$. Además, existe un difeomorfismo f de C_θ en el disco unidad tal que $f(p) = 0$ y f establece una correspondencia biunívoca entre órbitas de C_θ y círculos de centro en el origen. Si γ_r es la órbita correspondiente al círculo de radio r y T_r es su período, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} T_r = 2\pi/\theta.$$

Aunque no existe un teorema análogo para órbitas cerradas, se tiene:

3.7. TEOREMA (Abraham [1, p. 178]).—Si γ es una órbita cerrada de X_{dH} con energía $H(\gamma)$, y si el multiplicador 1 tiene multiplicidad uno, entonces existe un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contiene a $H(\gamma)$ y tal que para todo $e \in I$ existe una órbita cerrada de X_{dH} con energía e . El conjunto de todas estas órbitas es una superficie difeomorfa a un cilindro.

La demostración se basa en el hecho de que toda transformación de Poincaré restringida a la superficie de energía que pasa por γ es una transformación simpléctica [1, p. 178]. Sean $\Phi: S \rightarrow S$ una transformación de Poincaré en $x \in \gamma \cap S$, Σ la superficie de energía que contiene a γ y $\Sigma_x = \Sigma \cap S$. Entonces, como $\lambda = 1$ tiene multiplicidad uno, $T_x \Phi$ restringida a $T_x(\Sigma_x)$ no tiene ningún autovalor igual a la unidad, pues la multiplicidad de sus autovalores ha de ser par. Así pues, si $v \in T_x(\Sigma_x)$ está en el núcleo de $T_x(\Phi) - I$, entonces $v = 0$. En otras palabras, como Σ_x es de codimensión uno en S , el núcleo de $T_x \Phi - I$ tiene dimensión menor o igual a uno. Por último, el hecho de que $\lambda = 1$ es un multiplicador característico implica que esta dimensión es exactamente igual a uno. Es decir, $T_x \Phi = I$ en un subespacio unidimensional. Resulta natural esperar, y se puede demostrar, que Φ es igual a la identidad en una subvariedad unidimensional de S que pasa por x . Las órbitas que pasan por puntos de esta subvariedad son, pues, cerradas y forman una familia cilíndrica que contiene a γ . Obsérvese que la existencia de esta familia cilíndrica se puede demostrar aun si se sustituye la hipótesis de que $\lambda = 1$ tiene multiplicidad uno por la condición de que

$$(T_x \Phi - I)(T_x(S)) = T_x(\Sigma_x),$$

pues, como $T_x(\Sigma_x)$ es de codimensión uno en $T_x(S)$, el núcleo de $T_x \Phi - I$ resulta ser unidimensional como anteriormente. Lo que no se puede concluir, bajo esta nueva hipótesis, es que la familia de órbitas cerradas está parametrizada por la energía.

Volviendo al estudio de propiedades genéricas, si designamos por \mathcal{E}^r al subconjunto de $\mathcal{X}_{rH}^r(M)$ formado por los campos Hamiltonianos cuyos puntos críticos son elementales, se tiene:

3.8. TEOREMA (Abraham [1, p. 180]).— \mathcal{E}^r es residual en $\mathcal{X}_{rH}^r(M)$.

La demostración puede verse en Robinson [16], quien, además, ha observado que, modificando levemente la definición de elementalidad, se pueden obtener resultados más precisos.

3.9. DEFINICIÓN.—Un elemento crítico de un campo Hamiltoniano se llama *N-elemental*, $N \geq 1$, ssi sus multiplicadores característicos satisfacen a la condición de la Definición 3.4 para

$$n_i \in \mathbb{Z} \cap [-N, N]$$

en vez de $n_i \in \mathbb{Z}$.

Designemos entonces por $\mathcal{E}^r(N)$ al subconjunto de campos en $\mathcal{X}_H^r(M)$ cuyos puntos críticos son todos *N-elementales*. Evidentemente,

$$\mathcal{E}^r = \bigcap_N \mathcal{E}^r(N).$$

3.10. TEOREMA (Robinson [16]).— $\mathcal{E}^r(N)$ es abierto y denso en $\mathcal{X}_H^r(M)$.

El caso de órbitas cerradas es más complicado. La conjetura original de que la elementalidad de estas órbitas es una propiedad genérica no es válida [10]. Esta situación ha sido salvada por Robinson de la siguiente manera.

3.11. DEFINICIÓN.—Una órbita γ de $X \in \mathcal{X}_H^r(M)$ se denomina *0-elemental* ssi para toda transformación de Poincaré $\Phi: S \rightarrow S$ en un punto $x \in \gamma \cap S$ se tiene

$$(T_x \Phi - I)(T_x(S)) = T_x(\Sigma_x),$$

en donde Σ es la superficie de energía que contiene a γ y $\Sigma_x = \Sigma \cap S$.

Como se advirtió en el comentario que sigue al Teorema 3.7, la hipótesis enunciada lleva consigo la existencia de la familia cilíndrica de órbitas cerradas a la cual pertenece γ . Pues bien, designemos por $\mathcal{G}^r(T)$ al subconjunto de campos en \mathcal{E}^r cuyas órbitas de período menor o igual que T son *0-elementales* y tales que, si γ es una de ellas, entonces:

(1) γ admite una sección transversal S en que los puntos fijos de $\Phi: S \rightarrow S$ representan, excepto por un número finito, órbitas cerradas elementales.

(2) Si \mathcal{F} es la familia cilíndrica asociada a γ , $\mathcal{F} \cap S$ se repre-

senta por medio de una función $g: R \rightarrow S$ y M_t designa a la restricción de $T_{g(t)} \Phi$ a $T_{g(t)}(\Sigma_s)$, entonces M_t , considerada como una curva en el conjunto de las transformaciones simplécticas, es transversal al conjunto de las transformaciones no elementales (aquellas cuyos autovalores no satisfacen a la condición de la Definición 3.4).

Con todo esto, si $\mathcal{G}^r = \Omega_T \mathcal{G}^r(T)$, se tiene:

3.12. TEOREMA (Robinson [16, 17]).— \mathcal{G}^r es residual en $\mathcal{X}^r_H(M)$ si $2 \leq r \leq \infty$.

La segunda propiedad que mencionamos como genérica en $\mathcal{X}^r(M)$ se refiere a la transversalidad de las variedades estable e inestable de dos elementos críticos. Debe hacerse notar que, como la energía se conserva a lo largo de las trayectorias, las variedades estables e inestables caen, cada una, dentro de una superficie de energía. Así pues, cuando se hable de transversalidad de estas variedades, lo natural es hablar de transversalidad en la superficie de energía. Por tanto, dada una familia de órbitas 1-elementales, se define su *variedad estable* como la unión de las variedades estables de cada uno de sus miembros. La 1-elementalidad de éstos implica que todas las variedades en la unión tienen la misma dimensión. Consideremos ahora el subconjunto \mathcal{G}^r_T de campos en \mathcal{G}^r tales que:

(1) Los puntos críticos de $X \in \mathcal{G}^r_T$ caen en distintas superficies de energía.

(2) Si x es un punto crítico de $X \in \mathcal{G}^r_T$, entonces

$$W^+(x) \pitchfork W^-(x)$$

en la superficie de energía.

(3) Para un tal punto crítico x , $W^+(x) [W^-(x)]$ es transversal en la superficie de energía a todas las variedades inestables [estables].

(4) Todas las variedades estables e inestables de familias de órbitas 1-elementales son transversales.

(5) Las variedades estables e inestables son, excepto para un conjunto denumerable de órbitas, transversales a la superficie de energía.

(6) Las órbitas cerradas del conjunto denumerable de (5) son 1-elementales.

3.13. TEOREMA (Robinson [18]).—Para $2 \leq r \leq \infty$, \mathcal{G}^r_T es residual en $\mathcal{X}^r_H(M)$.

4. Estabilidad de órbitas

El concepto que nos ocupa a continuación es el de estabilidad orbital en la variedad central de una órbita cerrada. Este concepto fue introducido por Birkhoff [4] y planteado de nuevo más tarde por Kolmogorov [7]. Posteriormente, Arnold [2] y Moser [11, 12] obtuvieron resultados más generales que los de Kolmogorov.

Para definir este concepto de estabilidad, supondremos que la variedad M está dotada de una métrica con distancia d . Si A y B son dos subconjuntos de M se define la distancia entre A y B de la siguiente manera. Si A y B son vacíos se define $\rho(A, B) = 0$, si sólo uno de ellos es vacío se define $\rho(A, B) = \infty$, y si ninguno de ellos es vacío se define

$$d(a, B) = \inf \{d(a, b) \mid b \in B\},$$

y

$$\rho(A, B) = \max \{ \sup \{d(a, B) \mid a \in A\}, \sup \{d(b, A) \mid b \in B\} \}.$$

4.1. DEFINICIÓN.—Si φ es un flujo en M y γ es una órbita cerrada de φ , se dice que γ es *orbitalmente estable* ssi para todo $\varepsilon > 0$ se puede hallar un $\delta > 0$ tal que si $d(x, \gamma) < \delta$ entonces

$$\rho(\gamma(x), \gamma) < \varepsilon.$$

en donde $\gamma(x)$ es la órbita que pasa por x .

Si γ es una órbita cerrada con un multiplicador característico de valor absoluto mayor que uno, es fácil deducir de la existencia de la variedad inestable que γ es inestable. En el caso de sistemas Hamiltonianos, sabemos que si λ es un multiplicador característico de un elemento crítico, $1/\lambda$ también lo es, de modo que si hay multiplicadores dentro del círculo también los hay fuera, y un elemento crítico que posee una variedad estable también posee una inestable. Por tanto, todo elemento crítico de un sistema Hamiltoniano es inestable a menos que todos sus multiplicadores característicos estén en el círculo unidad, en cuyo caso el elemento crítico se llama *elíptico*.

Enunciaremos el teorema de Moser para sistemas Hamiltonianos de dos grados de libertad, es decir, sistemas en el fibrado cotangente de una variedad bidimensional, y de clase C^∞ . Si γ es una órbita

cerrada contenida en una superficie regular de energía Σ , entonces Σ es de dimensión tres, puesto que es de codimensión uno en la variedad simpléctica. Si S es una sección transversal local en Σ en un punto $x \in \gamma$, entonces S es bidimensional y, por tanto, la transformación de Poincaré $\Phi: S \rightarrow S$ se puede considerar como un difeomorfismo en \mathbb{R}^2 que preserva el origen. $T_x \Phi$ es un difeomorfismo lineal en \mathbb{R}^2 , y γ es elíptica ssi los autovalores de $T_x \Phi$ son $e^{\pm i\alpha}$, es decir, $T_x \Phi$ es una rotación. Si identificamos \mathbb{R}^2 con el plano complejo, Φ está dada por

$$\Phi(z) = z e^{i\alpha} + F(z, \bar{z}),$$

en donde F contiene términos de orden superior a uno.

Generalizando un teorema de Birkhoff, Moser ha demostrado que si $\alpha \neq 0$ y $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ y 4α no son múltiplos enteros de 2π , entonces existe un cambio de variable $z \mapsto w$ tal que

$$\Phi(w) = w e^{i(\alpha + \beta |w|^2)} + G(w),$$

en donde $|G(w)| \leq K |w|^4$ y β es igual a 0 ó ± 1 [13]. Tomemos ahora un anillo $a \leq |w| \leq 2a$, con a suficientemente pequeño. Poniendo

$$r = |w|/a \quad \text{y} \quad \theta = \arg w,$$

la ecuación anterior toma la forma

$$\begin{aligned} \theta_1 &= a r g \Phi(r, \theta) = \theta + \alpha + \beta a^2 r^2 + f(a^3), \\ r_1 &= \frac{|\Phi(r, \theta)|}{a} = r + g(a^3) \end{aligned}$$

en el anillo $1 \leq r \leq 2$. Observemos que la parte «lineal» de esta transformación,

$$\theta_1 = \theta + \alpha, \quad r_1 = r,$$

deja invariantes a todos los círculos en $1 \leq r \leq 2$ con centro en el origen, y no resulta descabellado conjeturar que la transformación perturbada posee un círculo invariante. Poniendo $\beta \neq 0$, basándose en el hecho, ya conocido por Birkhoff [4], de que Φ es una transformación que preserva áreas, y demostrando previamente un lema

referente a este último tipo de transformaciones, Moser ha demostrado el:

4.2. TEOREMA (Moser [12]).—Si $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y α no es un múltiplo entero de $\pi/2$ ó de $2\pi/3$, entonces:

(1) En cada anillo $a \leq |w| \leq 2a$ con a suficientemente pequeño existe una curva cerrada C alrededor del origen que es invariante para Φ y no contiene puntos periódicos. Es decir,

$$\Phi(C) = C \quad \text{y} \quad \Phi^k(p) \neq p$$

para todo $p \in C$ y $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que el conjunto de todas las curvas invariantes descritas en (1) y contenidas en el disco de radio δ con centro en el origen es de medida mayor de $(1 - \varepsilon)/2\pi\delta^2$.

El significado de (1) es que, si consideramos las trayectorias que comienzan en una de las curvas C de S y las seguimos a lo largo del tiempo, cada una de ellas vuelve a C al cabo de un tiempo finito. Así pues, el conjunto de todas estas trayectorias forma una superficie bidimensional homeomorfa al toro. Esta superficie toroidal es, evidentemente, invariante, pero ninguna de sus órbitas es periódica. Más aún, la existencia de una tal superficie toroidal está garantizada en cualquier vecindad tubular de la órbita cerrada, que actúa, así, como eje común de una familia infinita de toros. La condición (2) dice que la medida del conjunto de curvas cerradas invariantes se aproxima a la medida total del disco, $2\pi\delta^2$, cuando el radio δ es muy pequeño. Interesa hacer notar que si una órbita comienza en una de las capas intertoroidales, entonces debe permanecer para siempre en esta capa debido a la invariancia de los toros. Como éstos existen en cualquier vecindad de la órbita cerrada, se obtiene inmediatamente:

4.3. TEOREMA (Moser).—Sea M una variedad simpléctica de dimensión cuatro, X_{dH} un campo Hamiltoniano de clase C^∞ en M , γ una órbita cerrada de X_{dH} contenida en una superficie de energía Σ y Φ una transformación de Poincaré de X_{dH} en $x \in \gamma$ restringida a Σ . Si los autovalores de $T_x\Phi$ son $e^{\pm i\alpha}$, con $\alpha \neq 0$, $k\alpha/2\pi$ no es entero para $k = 1, 2, 3, 4$, y $\beta \neq 0$ (véase el cambio de variables mencionado arriba), entonces γ es orbitalmente estable en Σ y en M .

La estabilidad en Σ es obvia por el teorema anterior. La demostración de la estabilidad en M se puede ver en [1, p. 184]. La aplicabilidad del Teorema 4.3 en la práctica se desprende del hecho de que sólo hay que calcular α y β de modo aproximado, y ver si están lo suficientemente lejos de los valores prohibidos.

Las versiones de los teoremas de Arnold y Moser en dimensiones más altas pueden verse en el capítulo 4 de [3]. Es posible continuar el estudio de estos temas de mecánica clásica, y como muestra basta un botón no de despreciar: la condición $\beta \neq 0$ del Teorema 4.3 es una propiedad genérica [17]. Para un estudio más detallado de los temas expuestos aquí y de otros muchos, el lector puede consultar [1, 8, 9, 14, 19, 20, 21].

5. Punto final

Según un comentario de René Thom [9, II, p. 46], hay dos teorías de la mecánica. Una de ellas, o mecánica reversible con el tiempo, está basada en el *principio de conservación de la energía* y su objeto es el estudio de sistemas *Hamiltonianos*. La otra, más ajustada a la realidad de la naturaleza, o irreversible con el tiempo, se basa en el *principio de aumento de la entropía* y estudia sistemas *casi gradientes*. El principio de aumento de la entropía consiste en la existencia de una función $E: M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, si φ es un flujo en M , entonces $E \circ \varphi_x$ es una función monótona creciente.

Pero la existencia de agujeros negros en el universo lleva consigo una contradicción del principio de aumento de la entropía. En efecto, al caer la materia en un agujero negro puede desaparecer en una singularidad del espacio-tiempo. Por otra parte, estudios recientes indican la posibilidad de creación de nueva materia en la vecindad de agujeros negros cosmológicos de pequeño tamaño [22]. Si esto ocurre, representa una violación del teorema del área de la relatividad general, pues el área superficial de un agujero negro decrece durante esta creación de materia. Todo esto indica que puede ser necesario un nuevo concepto de entropía generalizado, como suma de la entropía de toda la masa del universo y (salvo un factor multiplicativo) la suma de las áreas superficiales de todos los agujeros negros del universo. La nueva ley de la termodinámica exigiría que la entropía generalizada fuera una función monótona creciente.

Bibliografía

- [1] ABRAHAM, R. y MARSDEN, J.: *Foundations of mechanics*, W. A. Benjamin, New York, 1967.
- [2] ARNOL'D, VLADIMIR I.: *Dokazatel'stvo teorem'i A. N. Kolmogorova o sohranenii uslovperiodičeskikh dvizenij pri malom izmenenii funkcii Gamil'tona*, «Uspekhi Mat. Nauk», **18** (1963), 13-40.
- [3] — — y AVEZ, A.: *Théorie ergodique des systèmes dynamiques*, Gauthier-Villars, París, 1967.
- [4] BIRKHOFF, GEORGE D.: *Dynamical systems*, «Amer. Math. Soc. Colloquium Pubs.», vol. 9, New York, 1927; edición revisada, 1966.
- [5] KELLEY, AL: *The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds*, «J. Diff. Eqns.», **3** (1967), 546-570.
- [6] — — *On the Liapunov subcenter manifold*, «J. Math. Anal. Appl.», **18** (1967), 472-478.
- [7] KOLMOGOROV, ANDREJ N.: *Obščaja teorija dinamičeskikh sistem i klasičeskaja mehanika*, Proc. 1954 Intern. Congr. Math., vol. 1, North Holland, Amsterdam, pp. 315-333 (traducido al inglés en el Apéndice D de [1]).
- [8] LOOMIS, L. H. y STERNBERG, S.: *Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Reading, 1968.
- [9] MACLANE, SAUNDERS: *Geometrical mechanics*, vols. I, II, Dept. of Math. Notes, Univ. of Chicago, 1968.
- [10] MEYER, K. R. y PALMORE, J. I.: *A generic phenomenon in conservative Hamiltonian systems*, en «Proc. of Symposia in Pure Math.», vol. 14: Global Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, 1970, pp. 185-189.
- [11] MOSER, JÜRGEN K.: *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys., Kl. IIa (1962), 1-20.
- [12] — — *Stability and nonlinear character of ordinary differential equations*, en «Nonlinear Problems», Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1963, pp. 139-149.
- [13] — — *Stabilitätsverhalten kanonischer Differentialgleichungssysteme*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys., Kl. IIa (1955), 89-120.
- [14] — — *Lectures on Hamiltonian systems*, «Memoirs Amer. Math. Soc.», **81** (1968), 1-60.
- [15] PEIXOTO, MAURICIO M.: *On an approximation theorem of Kupka and Smale*, «J. Diff. Eqns.», **3** (1967), 214-227.
- [16] ROBINSON, R. CLARK: *A global approximation theorem for Hamiltonian systems*, en «Proc. of Symposia in Pure Math.», vol. 14: Global Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, 1970, pp. 233-243.

- [17] ROBINSON, R. CLARK: *Generic properties of conservative systems*, «Amer. J. Math.», **92** (1970), 562-603.
- [18] — — *Generic properties of conservative systems*, «Amer. J. Math.», **92** (1970), 897-905.
- [19] — — *Lectures on Hamiltonian systems*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Río de Janeiro, 1971.
- [20] SMALE, STEPHEN: *Topology and mechanics. I*, «Invent. Math.», **10** (1970), 303-331.
- [21] — — *Topology and mechanics. II: The planar n-body problem*, «Invent. Math.», **11** (1971), 45-64.
- [22] WALD, ROBERT: *Particle creation near black holes*, «Amer. Sci.», **65** (1977), 585-589.

University of Lowell, Lowell, Massachusetts 01854