CONTRIBUCION A LA TEORIA DEL PENDULO ESTOCASTICO

M.ª Dolores Maravall Gómez-Allende

Recibido: 5-IV-78

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. FEDERICO GODED

Se obtiene la función característica de las variables aleatorias, soluciones de un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, a partir de la función característica inicial. Se aplica este resultado al péndulo estocástico y se obtienen un teorema de equipartición de la energía y otro de invariancia de la distribución de probabilidad de la posición y de la velocidad.

The Characteristic functions of the random variables, solutions of a two differential equations linear system of constant coefficients, is obteined starting from the initial characteristic functions. And this result is applied to the stochastic pendulum, and a theorem of equipartition of the energy is obteined and another of the unchange of the distribution of probability of the position and of the speed.

Dado el sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de coeficientes constantes o variables en el tiempo:

$$\frac{d\,\bar{\xi}(t)}{d\,t} = \mathrm{A} \cdot \xi(t) \tag{1}$$

donde A es la matriz de elemento genérico a_{ij}, las variables aleatorias (v. a.) $\xi(t)$ soluciones de (1) que para $t = 0$ tienen la función característica (fc) $\varphi(z_1, \ldots, z_m)$, tenga o no tenga esta función derivadas parciales de primer orden, en el instante t tienen por fc la solución formal de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ji}(t)\, z_j \tag{2}$$

que para $t = 0$ coincide con la antedicha φ. Este resultado ha sido obtenido por el profesor Maravall (véase bibliografía).

Vamos a aplicar la (2) al caso particular del sistema de dos ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes:

$$x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2; \quad x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \tag{3}$$

Se obtiene en este caso la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (a_{11} z_1 + a_{21} z_2) \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + (a_{12} z_1 + a_{22} z_2) \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} \tag{4}$$

cuya integral, que para $t = 0$, coincide con la fc $\varphi(z_1, z_2)$ de la distribución de probabilidad de los valores iniciales de

$$\xi_1(0) \quad \text{y} \quad \xi_2(0)$$

es

$$\varphi\left(e^{p_1 t} \frac{z_1 (p_2 - a_{11}) - z_2 a_{21}}{p_2 - p_1} + e^{p_2 t} \frac{z_2 a_{21} - z_1 (p_1 - a_{11})}{p_2 - p_1}, \right.$$
$$\left. e^{p_1 t} \frac{p_1 - a_{11}}{a_{21}} \frac{z_1 (p_2 - a_{11}) - z_2 a_{21}}{p_2 - p_1} + e^{p_2 t} \frac{p_2 - a_{11}}{a_{21}} \frac{z_2 a_{21} - z_1 (p_1 - a_{11})}{p_2 - p_1}\right) \tag{5}$$

donde p_1 y p_2 son las raíces de la ecuación característica del sistema (3).

Si p_1 y p_2 son reales y si

$$p_1 > 0 \quad \text{ó} \quad p_2 > 0 \tag{6}$$

la anterior para $t = \infty$ es $\varphi(\infty, \infty)$ que vale cero, que es la fc de una v. a. casi ciertamente igual a infinito. Lo que significa que cuando el tiempo tiende a infinito las $\xi(t)$ tienden también a infinito, como sucede en la teoría cierta (inestabilidad). Si suponemos que p_1 es mayor que p_2 la fc de las v. a.:

$$\xi_1(t)\, e^{-p_1 t}; \quad \xi_2(t)\, e^{-p_1 t} \tag{7}$$

se obtiene sustiuyendo en (5) z_1 y z_2 por:

$$z_1 e^{-p_1 t}; \quad z_2 e^{-p_1 t} \tag{8}$$

y al tender el tiempo a infinito esta nueva fc tiende a la:

$$\varphi\left(\frac{z_1(p_2 - a_{11}) - z_2 a_{21}}{p_2 - p_1}, \quad \frac{p_2 - a_{11}}{a_{21}} \frac{z_1(p_2 - a_{11}) - z_2 a_{21}}{p_2 - p_1}\right) \tag{9}$$

Se sigue pues que reduciendo a la escala exponencial definida en (7) y (8) el tamaño de las v. a. ξ se obtiene asintóticamente una distribución de probabilidad límite cuya fc es la (9).

Si siendo reales p_1 y p_2 es:

$$p_1 < 0 \quad \text{y} \quad p_2 < 0 \tag{10}$$

la (5) para $t = \infty$ es igual a $\varphi(0, 0)$ que es igual a la unidad; por tanto las $\xi(t)$ para t tendiendo a infinito tienden a v. a. casi ciertamente iguales a cero. Pero también las v. a. (7) tienen la misma fc (9). Lo que significa que amplificando a la escala exponencial definida en (7) y (8) las v. a. $\xi(t)$ cuando el tiempo tiende a infinito, tienden asintóticamente a una distribución de probabilidad límite que es la que tiene la fc la (9).

Existe pues una mayor riqueza de problemas al pasar de la teoría cierta de las ecuaciones diferenciales a la teoría probabilística, pues por ejemplo, *los resultados que acabamos de señalar en la teoría cierta serían triviales, porque para valores asintóticos, para el tiempo tendiendo a infinito, se obtendrían constantes, mientras que en la teoría probabilista se obtienen distribuciones de probabilidad.*

Si las dos raíces de la ecuación característica p_1 y p_2 son iguales (las llamamos p) entonces la fc de las $\xi(t)$ en vez de la (5) es la:

$$\varphi\left(e^{pt}(z_1(1 + (a_{11} - p)t) + z_2 a_{21} t), \quad e^{pt}(z_1 a_{12} t + z_2(1 + (a_{22} - p)t)\right) \tag{11}$$

también en este caso, si p es real cuando el tiempo tiende a infinito la fc de las v. a.:

$$\frac{\xi_1(t) e^{-pt}}{t}; \quad \frac{\xi_2(t) e^{-pt}}{t} \tag{12}$$

se obtiene sustituyendo z_1 y z_2 en la (11) por:

$$\frac{z_1 e^{-pt}}{t}; \quad \frac{z_2 e^{-pt}}{t} \tag{13}$$

con lo que se obtiene la fc:

$$\varphi\left(z_1 (a_{11} - p) + z_2 a_{21},\ z_1 a_{12} + z_2 (a_{22} - p)\right) \tag{14}$$

como solución asintótica.

Entendemos por péndulo estocástico un conjunto de péndulos cuyas posiciones y velocidades son v. a. Vamos a aplicar los resultados anteriores a este caso particular de la ecuación del péndulo lineal:

$$x'' + w^2 x = 0 \tag{15}$$

Esta ecuación diferencial lineal de segundo orden, se transforma en un sistema de primer orden, introduciendo la velocidad v:

$$x' = v; \qquad v' = -w^2 x \tag{16}$$

Identificando los coeficientes de esta última ecuación con los del sistema (3), la (5) se escribe en este caso particular:

$$\varphi\left(z \cos w t - s w \operatorname{sen} w t,\ z \frac{\operatorname{sen} w t}{w} + s \cos w t\right) \tag{17}$$

que resuelve el problema del péndulo estocástico.

Si suponemos que la fc φ es desarrollable en serie de potencias:

$$1 + i(\mu_{10} z + \mu_{01} s) - \frac{1}{2}(\mu_{20} z^2 + 2 \mu_{11} z s + \mu_{02} s^2) + \ldots \tag{18}$$

efectuando en ella la sustitución definida por:

$$z \longrightarrow z \cos w t - s w \operatorname{sen} w t; \qquad s \longrightarrow z \frac{\operatorname{sen} w t}{w} + s \cos w t \tag{19}$$

se obtiene el desarrollo en serie de la fc en el tiempo t, que es:

$$1 + i(\mu_{10}(t) z + \mu_{01}(t) s) - \frac{1}{2}(\mu_{20}(t) z^2 + 2 \mu_{11}(t) z s + \mu_{02}(t) s^2) + \ldots \tag{19 bis}$$

Se obtiene como consecuencia de efectuar la sustitución (19) en (18) e identificar los coeficientes de las potencias de primer orden de z y s con los de (19 bis) que: el movimiento de un péndulo ideal que en cada instante ocupa la posición media y está animado de la velocidad media es el mismo que el de la teoría cierta definida por la ecuación del péndulo lineal (15). A su vez es consecuencia de ésta que: la suma de las energías potencial y cinética de un péndulo ideal que en cada instante ocupa la posición media y está animado de la velocidad media es constante, durante todo el movimiento.

Se obtiene también al efectuar la sustitución (19) en (18) e identificar los coeficientes de las potencias de segundo orden de z y s, con los de (19 bis) las fórmulas:

$$\mu_{20}(t) = \mu_{20} \cos^2 w\,t + 2\,\mu_{11} \frac{\cos w\,t \operatorname{sen} w\,t}{w} + \mu_{02} \frac{\operatorname{sen}^2 w\,t}{w^2}$$

$$\mu_{11}(t) = \left(\frac{\mu_{02}}{w} - \mu_{20}\,w\right) \cos w\,t \operatorname{sen} w\,t \operatorname{sen} w\,t + \mu_{11} (\cos^2 w\,t - \operatorname{sen}^2 w\,t)$$

$$\mu_{02}(t) = \mu_{20}\,w^2 \operatorname{sen}^2 w\,t - 2\,\mu_{11}\,w \operatorname{sen} w\,t \cos w\,t + \mu_{02} \cos^2 w\,t \tag{20}$$

Sumando la primera (20) multiplicada por w^2 a la tercera (20) se obtiene:

$$w^2 \mu_{20} + \mu_{02} = w^2 \mu_{20}(t) + \mu_{02}(t) \tag{20 bis}$$

que expresa que: la suma de los valores medios de la energía cinética y de la energía potencial es constante durante todo el movimiento.

Se sigue de lo anterior que *el teorema de conservación de la energía al pasar de la teoría cierta a la probabilística, se desdobla en dos teoremas.*

Si se dan las dos condiciones iniciales siguientes:

$$\mu_{11} = \overline{x(0)\,v(0)} = 0; \qquad w^2 \mu_{20} = \mu_{02} \tag{21}$$

se tiene entonces que:

$$\left.\begin{aligned} \mu_{20}(t) &= \mu_{20} \\ \mu_{11}(t) &= \mu_{11} (\cos^2 w\,t - \operatorname{sen}^2 w\,t) \\ \mu_{02}(t) &= \mu_{02} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} w^2 \mu_{20}(t) &= \mu_{02}(t) \\ \mu_{11}(t) &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

que nos permite enunciar un *teorema de equipartición de la energía.*

Entendemos por energía equipartida que la energía cinética y la energía potencial son iguales. El enunciado de este teorema es el siguiente: *Si inicialmente la energía está equipartida y el valor medio del producto de la posición por la velocidad es nulo, durante todo el movimiento la energía permanece equipartida y el valor medio del producto de la posición por la velocidad continúa siendo nulo.*

Supongamos ahora que inicialmente la posición y la velocidad siguen una distribución normal (gaussiana) no correlacionada y de valores medios nulos, lo que significa simetría de las posiciones aleatorias iniciales respecto al punto de equilibrio, e indiferencia del signo inicial de la velocidad, en este caso la fc de la distribución inicial de la posición y de la velocidad es la:

$$e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 z^2 + \sigma_2^2 s^2)} \tag{23}$$

Las (20) se escriben:

$$\sigma_1^2(t) = \sigma_1^2 \cos^2 w\,t + \sigma_2^2 \frac{\operatorname{sen}^2 w\,t}{w^2}$$

$$\mu_{11}(t) = \left(\frac{\sigma_2^2}{w} - w\,\sigma_1^2\right) \cos w\,t \operatorname{sen} w\,t$$

$$\sigma_2^2(t) = \sigma_1^2 w^2 \operatorname{sen}^2 w\,t + \sigma_2^2 \cos^2 w\,t \tag{24}$$

que muestra que en general la *posición y la velocidad que inicialmente eran independientes se correlacionan a lo largo del movimiento.*

Si inicialmente la energía estuviera equipartida, es decir que se cumpliese:

$$\sigma_2^2 = w^2 \sigma_1^2 \tag{25}$$

las (24) se simplifican en las:

$$\sigma_1^2(t) = \sigma_1^2; \quad \sigma_2^2(t) = \sigma_2^2 \tag{26}$$

que muestran que *la distribución de probabilidades de la posición y velocidad a lo largo del tiempo sigue siendo igual a la inicial*, condición más fuerte que la de seguir sin estar correlacionadas y permanecer constantemente la energía equipartida.

Obsérvese que las fc de las distribuciones marginales de la posición y de la velocidad que se obtienen haciendo $s = 0$ y $z = 0$ respectivamente en (17) y que son:

$$\varphi\left(z \cos w\, t,\ \ z \frac{\operatorname{sen} w\, t}{w}\right); \quad \varphi(-s\, w \operatorname{sen} w\, t, s \cos w\, t) \tag{27}$$

muestran que *el argumento de la fc de la velocidad es la derivada respecto al tiempo del argumento de la fc de la posición.* Se pasa de la teoría probabilista a la teoría cierta, haciendo la función φ igual a la exponencial de exponente imaginario, y el resultado anterior tiene entonces el conocido significado de que la velocidad es la derivada con respecto al tiempo de la posición.

Obsérvese que las fc (9) y (14) son funciones de una sola variable, combinación lineal de z_1 y z_2. Por tanto la distribución de probabilidad que definen es una v. a. bivariante degenerada, por ser reductible a una v. a. univariante.

Bibliografía

A) *Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos* (Editorial Paraninfo, Madrid). Por DARÍO MARAVALL CASESNOVES. Y las memorias del mismo autor:

B) *Ecuaciones Diferenciales y Ecuaciones Integrales lineales con condiciones iniciales aleatorias* («Revista de la Real Academia de Ciencias», 1978).

C) *La integración de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con valores iniciales aleatorios* («Bulletinul Institutului Politehnic de Iași», Rumania, 1978).