EL TEOREMA DE SEPARACION EN EL CONTROL DE SISTEMAS LINEALES NO GAUSSIANOS (*)

Pilar Ibarrola Muñoz
Profesor Agregado de la Universidad Complutense

Recibido: 1-III-78

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. SIXTO RÍOS

It deals with the prove of the verification of the theorem of separation or certainty equivalence principle for linear stochastic control problems getting rid of the classical hypothesis of supposing to be normal the system noise and measurement noise.

By analogy to the theory of classical règression, in which when the hypothesis of normality of the errors of measurement is removed, the leastsquares estimator is only optimum within the class of linear estimators (Gauss-Markoff Theorem); we in our case after having got rid of thé hypothesis of normality of noises, we are going to limit ourselves to finding the optimum control within the class of linear functions of the observations Before stating the problem of optimum control we shall have to solve the filtering problem, stating an estimate of the state vector of the system which is a linear function of the observed outputs and optimum in the sense of least squares.

The solution is given by a system of recurrent equations which coincide exactly with those given by the Kalman filter, when one accepts the normality of measurement noise.

Once the problem of filtering is solved, the problem of control is to be solvēd, first in the case of complete information (there is not measurement noise) and then with incomplete information, proving the verification of the theorem of separation.

Se trata de probar la verificación del teorema de separación o principio de equivalencia para problemas de control estocástico lineales quitando la hipótesis clásica de suponer normales el ruido del sistema y el ruido de observación.

Por analogía con la teoría de Regresión clásica en que cuando se quita la hipótesis de normalidad de los errores de observación el estimador de mínimos cuadrados es sólo óptimo dentro de la clase de los estimadores lineales (Teorema de

(*) Trabajo realizado dentro del Programa March de Matemáticas de 1974.

Gauss-Markoff); nosotros en nuestro caso al haber quitado la hipótesis de normalidad de los ruidos, nos vamos a limitar a hallar el control óptimo dentro de la clase de las funciones lineales de las observaciones.

Previo al problema de hallar el control óptimo tendremos que resolver el problema del filtrado, hallando un estimador del vector de estado del sistema que sea función lineal de las observaciones y óptimo en el sentido de los mínimos cuadrados. La solución nos viene dada por un sistema de ecuaciones recurrentes que coinciden exactamente con las que proporciona el filtro de Kalman cuando se supone la normalidad del ruido de observación.

Resuelto el problema del filtrado se resuelve el problema de control, primero en el caso de información completa (no hay ruido de observación) y luego en el de información incompleta, comprobándose la verificación del teorema de separación.

Planteamiento del problema

Se trata de reconstruir la teoría del control estocástico lineal quitando la hipótesis de la normalidad del ruido del sistema y del ruido de observación.

Concretamente se va a considerar un sistema gobernado por las ecuaciones siguientes:

$$x(t+1) = \phi\, x(t) + \Gamma\, u(t) + v(t)$$
$$y(t) = \Theta\, x(t) + e(t)$$

donde

$t \in T$ conjunto numerable de índices.

x vector de estado es un vector n-dimensional.

u vector de control es un vector p-dimensional.

y vector de outputs observables es un vector r-dimensional.

$\{v(t),\, t \in T\}$ y $\{e(t),\, t \in T\}$ son sucesiones de vectores aleatorios, siendo

$$\begin{aligned} &E(v(t)) = 0 \quad t \in T \\ &E\,\}e(t)\{ = 0 \quad t \in T \\ &\operatorname{cov}[v(t), v(t)] = R_1 \\ &\operatorname{cov}[e(t), e(t)] = R_2 \\ &\operatorname{cov}[v(t), e(t)] = 0 \end{aligned}$$

Las matrices ϕ, Γ, Θ, R_1, R_2 pueden depender del tiempo. Se supone que el estado inicial $x(t_0)$ es tal que

$$\begin{aligned} &E\,\}x(t_0)\{ = m \\ &\operatorname{cov}[x(t_0), x(t_0] = R_0 \end{aligned}$$

Se adopta como función de pérdida

$$l = x^T(N)\, Q_0\, x(N) + \sum_{t=t_0}^{N-1} [x^T(t)\, Q_1\, x(t) + u^T(t)\, Q_2\, u(t)]$$

Q_0, Q_1, Q_2 matrices simétricas semidefinidas positivas.

Se trata de hallar un control admisible, $u(t)$ óptimo en el sentido de que minimice la pérdida esperada: E (l).

Puesto que la variable estado no es observable, en cada instante t consideraremos como controles admisibles $u(t)$ todas las funciones medibles de los outputs observados hasta ese instante, es decir $u(t)$ habrá de ser función de

$$Y^T_{t-1} = [y^T(t_0), \ldots, y^T(t-1)]$$

El modelo difiere del modelo clásico en que no hacemos ninguna hipótesis sobre la forma de las distribuciones de $v(t)$ y de $e(t)$, lo cual va a provocar que no podamos determinar en cada instante, la distribución a «posteriori» de $x(t)$: P $(x(t) \mid Y_{t-1})$, distribución que es necesario conocer para poder resolver el problema por el principio de inducción hacia atrás.

Sabido es que en los modelos lineales de regresión el problema se puede resolver: 1) Haciendo la hipótesis de la normalidad de los errores de observación en cuyo caso el estimador de mínimos cuadrados que resulta tiene una serie de propiedades óptimas por coincidir con el de máxima verosimilitud. 2) Sin hacer la hipótesis sobre la normalidad de los errores en cuyo caso el estimador de mínimos cuadrados es sólo óptimo dentro de la clase de los estimadores lineales.

Por analogía nosotros en nuestro caso al haber quitado la hipótesis de normalidad, nos vamos a limitar a hallar el control óptimo dentro de la clase de las funciones lineales de

$$Y^T_{t-1} = [y^T(t_0) \text{------} y^T(t-1)].$$

Previo al problema de hallar el control óptimo vamos a resolver el problema de estimar el vector estado $x(t)$ por una función lineal de Y^T_{t-1} : $\hat{x}(t)$ de forma que el estimador sea óptimo en el sentido de los mínimos cuadrados.

I. Estimación del vector de estado del sistema

Consideremos el sistema

$$x(t+1) = \phi(t)\,x(t) + \Gamma(t)\,u^*(t) + v(t)$$
$$y(t) = \theta(t)\,x(t) + e(t)$$

con las hipótesis ya expuestas y se trata de estimar en cada instante t_1, $a^T x(t_1)$ linealmente en $y(t_1 - 1)$, $y(t_1 - 2)$, ..., $y(t_0)$ y m de forma a minimizar

$$E\,[a^T x(t_1) - a^T \hat{x}(t_1)]^2$$

siendo a un vector n-dimensional.

Como el estimador es lineal tendremos

$$a^T \hat{x}(t_1) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} u^T(t)\,y(t) + b^T m$$

teniendo que determinar b, $u(t_1 - 1)$, ..., $u(t_0)$.

Introducimos los vectores $z(t)$

$$\begin{cases} z(t) = \phi^T(t+1)\,z(t+1) + \theta^T(t+1)\,u(t+1) \\ z(t_1 - 1) = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^T x(t_1) = z^T(t_1 - 1)\,x(t_1) = z^T(t_0 - 1)\,x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [z^T(t)\,x(t+1) -$$
$$- z^T(t-1)\,x(t)]$$

$$z^T(t)\,x(t+1) = z^T(t)\,\phi(t)\,x(t) + z^T(t)\,\Gamma(t)\,u^*(t) + z^T(t)\,v(t)$$
$$z^T(t-1)\,x(t) = z^T(t)\,\phi(t)\,x(t) + u^T(t)\,\theta(t)\,x(t)$$
$$\Rightarrow z^T(t)\,x(t+1) - z^T(t-1)\,x(t) = z^T(t)\,\Gamma(t)\,u^*(t) + z^T(t)\,v(t) - u^T(t)\,\theta(t)\,x(t)$$
$$a^T \hat{x}(t_1) = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} u^T(t)\,y(t) + b^T m = -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [u^T(t)\,\theta(t)\,x(t) + u^T(t)\,e(t)] + b^T m.$$

De donde

$$a^T x(t_1) - a^T \hat{x}(t_1) = z^T(t_0 - 1)\,x(t_0) - b^T m + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} z^T(t)\,\Gamma(t)\,u^*(t) +$$
$$+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} z^T(t)\,v(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} u^T(t)\,e(t).$$

Resultando

$$\mathrm{E}\,[a^{\mathrm{T}} x(t_1) - a^{\mathrm{T}} \hat{x}(t_1)]^2 = \left[z^{\mathrm{T}}(t_0 - 1)\, m - b^{\mathrm{T}} m + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} z^{\mathrm{T}}(t)\, \Gamma(t)\, u^*(t)\right]^2 +$$

$$+ z^{\mathrm{T}}(t_0 - 1)\, \mathrm{R}_0\, z(t_0 - 1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [z^{\mathrm{T}}(t)\, \mathrm{R}_1(t)\, z(t) + u^{\mathrm{T}}(t)\, \mathrm{R}_2(t)\, u(t)]$$

Para minimizar esta expresión tomaremos

$$b^{\mathrm{T}} m = z^{\mathrm{T}}(t_0 - 1)\, m + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} z^{\mathrm{T}}(t)\, \Gamma(t)\, u^*(t)$$

y elegimos u de forma a minimizar

$$\mathrm{L} = z^{\mathrm{T}}(t_0 - 1)\, \mathrm{R}_0\, z(t_0 - 1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [z^{\mathrm{T}}(t)\, \mathrm{R}_1(t)\, z(t) + u^{\mathrm{T}}(t)\, \mathrm{R}_2\, u(t)]$$

El problema actual es por tanto:

Dado el sistema

$$\begin{cases} z(t) = \phi^{\mathrm{T}}(t+1)\, z(t+1) + \theta^{\mathrm{T}}(t+1)\, u(t+1) & \text{siendo} \quad t_0 - 1 \leq t \leq t_1 - 2 \\ z(t_1 - 1) = a \end{cases}$$

minimizar

$$z^{\mathrm{T}}(t_0 - 1)\, \mathrm{R}_0\, z(t_0 - 1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [z^{\mathrm{T}}(t)\, \mathrm{R}_1(t)\, z(t) + u^{\mathrm{T}}(t)\, \mathrm{R}_2(t)\, u(t)].$$

Cambiando la variable tiempo y tomando como nueva variable $s = t_1 - 1 - t$ o número de etapas que faltan hasta el instante final se puede escribir el sistema

$$\begin{cases} z(s+1) = \phi^{\mathrm{T}}(s)\, z(s) + \upsilon^{\mathrm{T}}(s)\, u(s) & \text{siendo} \quad 0 \leq s \leq t_1 - t_0 \\ z(0) = a \end{cases}$$

$$\min z^{\mathrm{T}}(t_1 - t_0 + 1)\, \mathrm{R}_0\, z(t_1 - t_0 + 1) + \sum_{s=0}^{t_1-t_0} [z^{\mathrm{T}}(s)\, \mathrm{R}_1(s)\, z(s) + u^{\mathrm{T}}(s)\, \mathrm{R}_2(s)\, u(s)]$$

Es éste un problema de control determinístico con información perfecta cuya solución sabemos es

$$u(s) = -L(s)\, z(s) \qquad 0 \leq s \leq t_1 - t_0$$

siendo

$$\begin{aligned}
&L(s) = [R_2(s) + \theta(s)\, M(s+1)\, \theta^T(s)]^{-1}\, \theta(s)\, M(s+1)\, \phi^T(s) \\
&M(s) = \phi(s)\, M(s+1)\, \phi^T(s) + R_1(s) \\
&-(\phi(s)\, M(s+1)\, \theta^T(s)\, [R_2(s) + \theta(s)\, M(s+1)\, \theta^T(s)]^{-1} \cdot \\
&\theta(s)\, M(s+1)\, \phi^T(s)
\end{aligned}$$

y condición inicial

$$M(t_1 - t_0 + 1) = R_0$$

Pasando de nuevo a la variable t y haciendo

$$\begin{aligned}
L(s) &= K^T(t) \\
M(s) &= P(t)
\end{aligned}$$

será

$$u(t) = -K^T(t)\, z(t) \qquad t_0 \leq t \leq t_1 - 1$$

Con lo cual

$$a^T \hat{x}(t_1) = z^T(t_0 - 1)\, m + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} z^T(t)\, \Gamma(t)\, u^*(t) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} z^T(t)\, K(t)\, y(t)$$

Ahora las $z(t)$ toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
&z(t_1 - 1) = a \\
&z(t) = \prod_{j=1}^{t_1-1-t} (\phi^T(t+j) - \theta^T(t+j)\, K^T(t+j))\, a \qquad t_0 - 1 \leq t \leq t_1 - 2
\end{aligned}$$

Resultando

$$\begin{aligned}
a^T \hat{x}(t_1) = a^T m + a^T \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\prod_{j=1}^{t_1-1-t} (\phi(t_1 - j) - K(t_1 - j)\, \theta(t_1 - j)) \right] \Gamma(t)\, u^*(t) + \\
+ a^T \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\prod_{j=1}^{t_1-1-t} (\phi(t_1 - j) - K(t_1 - j)\, \theta(t_1 - j)) \right] K(t)\, y(t)
\end{aligned}$$

Puesto que a es arbitrario queda

$$\hat{x}(t_1) = m + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\prod_{j=1}^{t_1-1-t}(\phi(t_1-j) - K(t_1-j)\,\theta(t_1-j))\right]\Gamma(t)\,u^*(t) +$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\prod_{j=1}^{t_1-1-t}(\phi(t_1-j) - K(t_1-j)\,\theta(t_1-j))\right]K(t)\,y(t)$$

considerando cuál sería el estimador óptimo $\hat{x}(t_1 - 1)$ para cuya obtención habría que haber planteado $z(t_1 - 2) = a$ queda

$$\hat{x}(t_1) = \Gamma(t_1-1)\,u^*(t_1-1) + K(t_1-1)\,y(t_1-1) +$$
$$+ (\phi(t_1-1) - K(t_1-1)\,\theta(t_1-1))\,\hat{x}(t_1-1)$$

Tendremos pues que en cada instante $(t + 1)$ será

$$\hat{x}(t+1) = \phi(t)\,\hat{x}(t) + \Gamma(t)\,u^*(t) + K(t)\,[y(t) - \theta(t)\,\hat{x}(t)]$$
$$\hat{x}(t_0) \quad = m$$

con

$$K(t+1) = \phi(t+1)\,P(t)\,\theta^T(t+1)\,[R_2(t+1) + \theta(t+1)\,P(t)\,\theta^T(t+1)]^{-1}$$
$$P(t+1) = \phi(t+1)\,P(t)\,\phi^T(t+1) + R_1(t+1) -$$
$$- \phi(t+1)\,P(t)\,\theta^T(t+1)\,[R_2(t+1) + \theta(t+1)\,P(t)\,\theta^T(t+1)]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\ \theta(t+1)\,P(t)\,\phi^T(t+1)$$
$$P(t_0) = R_0$$

que son exactamente las mismas expresiones que nos proporciona el filtro de Kalman.

II. Obtención del control óptimo

1) *Caso de información completa:*

Sea el sistema

$$x(t+1) = \phi(t)\,x(t) + \Gamma(t)\,u(t) + v(t)$$

Para hallar en este caso el control óptimo podemos utilizar el siguiente desarrollo (que se usa también como prueba alternativa del procedimiento de inducción hacia atrás en el caso de la normalidad de los ruidos):

Supongamos que la ecuación en diferencias

$$S(t) = \phi^T(t)\,S(t+1)\phi(t) + Q_1 - \phi^T(t)\,S(t+1)\,\Gamma(t)\,[Q_2 + \\ + \Gamma^T(t)\,S(t+1)\,\phi(t)]$$

con la condición inicial

$$S(N) = Q_0$$

tiene una solución que es semidefinida positiva para $t_0 \leqslant t \leqslant N$. Sea la matriz L definida por

$$L(t) = [Q_2 + \Gamma^T(t)\,S(t+1)\,\Gamma(t)]^{-1}\,\Gamma^T(t)\,S(t+1)\,\phi(t).$$

Entonces

$$x^T(N)\,Q_0\,x(N) + \sum_{t=t_0}^{N-1} x^T(t)\,Q_1\,x(t) + u^T(t)\,Q_2\,u(t) = x^T(t_0)\,S(t_0)\,x(t_0) + \\ + \sum_{t=t_0}^{N-1} [u(t) + L(t)\,x(t)]^T\,[\Gamma^T(t)\,S(t+1)\,\Gamma(t) + Q_2]\,[u(t) + L(t)\,x(t)] + \\ + \sum_{t=t_0}^{N-1} \{v^T(t)\,S(t+1)\,[\phi(t)\,x(t) + \Gamma(t)\,u(t)] + \\ + [\phi(t)\,x(t) + \Gamma(t)\,u(t)]^T\,S(t+1)\,v(t) + v^T(t)\,S(t+1)\,v(t)\}$$

Puesto que nosotros tratamos de minimizar la pérdida esperada nos resulta

$$El = E\,\{x^T(t_0)\,S(t_0)\,x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{N-1} v(t)^T\,S(t+1)\,v(t) + \\ + \sum_{t=t_0}^{N-1} [u(t) + L(t)\,x(t)]^T \cdot [\Gamma^T(t)\,S(t+1)\,\Gamma(t) + Q_2]\,[u(t) + L(t)\,x(t)]\}$$

ya que $v(t)$ es independiente de $x(t)$.

Ahora

$$E\,\{x^T(t_0)\,S(t_0)\,x(t_0)\} = m^T\,S(t_0)\,m + tr\,S(t_0)\,R_0$$
$$E\,v^T(t)\,S(t+1)\,v(t) = tr\,S(t+1)\,R_1(t)$$

con lo que

$$El \geq m^T\,S(t_0)\,m + tr\,S(t_0)\,R_0 + \sum_{t=t_0}^{N-1} tr\,S(t+1)\,R_1(t)$$

alcanzándose el mínimo para

$$u(t) = -L(t)\,x(t)$$

que es una estrategia admisible en el caso de información completa.

2) *Caso de información incompleta:*

El control anteriormente obtenido no es admisible puesto que $x(t)$ no es observable. Consideraremos ahora como controles admisibles las funciones lineales de

$$Y_{t-1}^{T} = [y^{T}(t_0), \text{———}, y^{T}(t-1)]$$

Según el anterior desarrollo en cada instante t habrá que minimizar

$$E\,\{[u(t) + L(t)\,x(t)]^{T}\,[\Gamma^{T}(t)\,S(t+1)\,\Gamma(t) + Q_2]\,[u(t) + L(t)\,x(t)]$$

Plantearemos

$$u(t) = -L(t)\,\hat{x}(t)$$

$\hat{x}(t)$ función lineal de Y_{t-1}.

Con esto habrá que hallar $\hat{x}(t)$ de forma a minimizar

$$E\,\{(\hat{x}(t) - x(t))^{T}\,L^{T}(t)\,\,[\Gamma^{T}(t)\,S(t+1)\,\Gamma(t) + Q_2]\,L(t)\,(\hat{x}(t) - x(t))/Y_{t-1}\}.$$

Consideremos la matriz simétrica

$$M(t) = L^{T}(t)\,[\Gamma^{T}(t)\,S(t+1)\,\Gamma(t) + Q_2]\,L(t)$$

Sabemos que existe una matriz ortogonal $C(t)$ que diagonaliza $M(t)$, es decir

$$C^{T}(t)\,M(t)\,C(t) = \Lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & \lambda_n(t) \end{bmatrix}$$

siendo $\lambda_i(t) \geqslant 0$ por ser $M(t)$ una matriz semidefinida positiva.

Hacemos el cambio de variables

$$x'(t) = C^T(t)\, x(t)$$

$$\hat{x}'(t) = C^T(t)\, \hat{x}(t)$$

con esto también $\hat{x}'(t)$ será función lineal de Y_{t-1} y habrá que determinarlo de forma a minimizar

$$E\{(\hat{x}'(t) - x'(t))^T \Lambda(t) (\hat{x}'(t) - x'(t))/Y_{t-1}\} =$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) (\hat{x}'_i(t) - x'_i(t))^2/Y_{t-1}\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n} [a_i^T (\hat{x}'(t) - x'(t))]^2/Y_{t-1}\right\}$$

siendo

$$a_i(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \sqrt{\lambda_i(t)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para minimizar la esperanza anterior bastará con minimizar cada uno de los sumandos, es decir hallar $\hat{x}'(t)$ función lineal de Y_{t-1} que minimice

$$E[a_i^T (\hat{x}'(t) - x'(t))]^2.$$

Estudiemos ahora el modelo que rige la evolución de $x'(t)$.

Teníamos

$$\begin{cases} x(t+1) = \phi(t)\, x(t) + \Gamma(t)\, u(t) + v(t) \\ y(t) = \theta(t)\, x(t) + e(t) \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por $C^T(t+1)$, la segunda por $C^T(t)$ obtenemos

$$C^T(t+1)\, x(t+1) = C^T(t+1)\, \phi(t)\, C(t)\, C^T(t)\, x(t) + C^T(t+1)\, \Gamma(t)\, u(t) +$$
$$+ C^T(t+1)\, v(t)$$

$$C^T(t)\, y(t) = C^T(t)\, \theta(t)\, C(t)\, C^T(t)\, x(t) + C^T(t)\, e(t)$$

Haciendo $y'(t) = C^T(t)\, y(t)$

$$
\begin{aligned}
\theta'(t) &= C^T(t)\,\theta(t)\,C(t)\\
\Gamma'(t) &= C^T(t+1)\,\Gamma(t)\\
v'(t) &= C^T(t+1)\,v(t)\\
e'(t) &= C^T(t)\,e(t)\\
\phi'(t) &= C^T(t+1)\,\phi(t)\,C(t)
\end{aligned}
$$

queda

$$
\begin{cases}
x'(t+1) = \phi'(t)\,x'(t) + \Gamma'(t)\,u(t) + v'(t)\\
y'(t) = \theta'(t)\,x'(t) + e'(t)
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\,\{v'(t)\} = 0\\
&E\,\{e'(t)\} = 0\\
&\operatorname{cov}[v'(t), v'(t)] = C^T(t+1)\,R_1(t)\,C(t+1) = R'_1(t)\\
&\operatorname{cov}[e'(t), e'(t)] = C^T(t)\,R_2(t)\,C(t) = R'_2(t)
\end{aligned}
$$

Hay que hallar $\hat{x}'(t)$ de forma a minimizar

$$E\,[a_i^T(\hat{x}'(t) - x'(t))]^2 \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Este problema idéntico al planteado en el apartado I tiene solución única para $i = 1, \ldots, n$ puesto que según vimos el estimador óptimo que se obtiene $\hat{x}'(t)$ es independiente de a_i^T. La solución según apartado I será:

$$
\begin{aligned}
&\hat{x}'(t+1) = \phi'(t)\,\hat{x}'(t) + \Gamma'(t)\,u(t) + K'(t)\,[y'(t) - \theta'(t)\,\hat{x}'(t)]\\
&\hat{x}'(t_0) = C^T(t_0)\,m
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
K'(t) &= \phi'(t+1)\,P'(t)\,\theta'^T(t+1)\,[R'_2(t+1) + \theta'(t+1)\,P'(t)\,\theta'^T(t+1)]^{-1}\\
P'(t+1) &= \phi'(t+1)\,P'(t)\,\phi'^T(t+1) + R'_1(t+1) -\\
&\quad - \phi'(t+1)\,P'(t)\,\theta'^T(t+1)\,[R'_2(t+1) +\\
&\quad + \theta'(t+1)\,P'(t)\,\theta'^T(t+1)]^{-1}\,\theta'(t+1)\,P'(t)\,\phi'^T(t+1)\\
P'(t_0) &= C^T(t_0)\,R_0\,C(t_0)
\end{aligned}
$$

Volviendo a las variables primitivas tendremos

$$\begin{aligned}P'(t+1) = {} & C^T(t+2)\,\phi(t+1)\,C(t+1)\,P'(t)\,C^T(t+1)\,\phi^T(t+1)\,C(t+2) + \\ & + C_T(t+2)\,R_1(t+1)\,C(t+2) - C^T(t+2)\,\phi(t+1)\,C(t+1)\,P'(t)\,\cdot \\ & \cdot C^T(t+1)\,\theta^T(t+1)\,C(t+1)\,[C^T(t+1)\,R_2(t+1)\,C(t+1) + \\ & + C^T(t+1)\,\theta(t+1)\,C(t+1)\,P'(t)\,C^T(t+1)\,\theta(t+1)\,C(t+1)]^{-1}\,\cdot \\ & \cdot C^T(t+1)\,\theta(t+1)\,C(t+1)\,P'(t)\,C^T(t+1)\,\phi(t+1)\,C(t+2)\end{aligned}$$

Si planteamos

$$P(t) = C(t+1)\,P'(t)\,C^T(t+1)$$

y multiplicamos la expresión obtenida para $P'(t+1)$ por la izquierda por $C(t+2)$ y por la derecha por $C^T(t+2)$ queda

$$\begin{aligned}P(t+1) = {} & \phi(t+1)\,P(t)\,\phi^T(t+1) + R_1(t+1) - \phi(t+1)\,P(t)\,\theta^T(t+1)\,\cdot \\ & \cdot [R_2(t+1) + \theta(t+1)\,P(t)\,\theta(t+1)]^{-1}\,\theta(t+1)\,P(t)\,\phi(t+1)\end{aligned}$$

$$P(t_0) = R_0$$

$$\begin{aligned}K'(t+1) = {} & C^T(t+2)\,\phi(t+1)\,C(t+1)\,C^T(t+1)\,P(t)\,C(t+1)\,C^T(t+1)\,\theta^T(t+1)\,C(t+1)\,\cdot \\ & \cdot [C^T(t+1)\,R_2(t+1)\,C(t+1) + C^T(t+1)\,\theta(t+1)\,C(t+1)\,C^T(t+1)\,P(t)\,C(t+1)\,C^T(t+1) \\ & \cdot \theta^T(t+1)\,C(t+1)]^{-1}\end{aligned}$$

Definiendo

$$K(t+1) = C(t+2)\,K'(t+1)\,C^T(t+1)$$

queda

$$K(t+1) = \phi(t+1)\,P(t)\,\theta^T(t+1)\,[R_2(t+1) + \theta(t+1)\,P(t)\,\theta^T(t+1)]^{-1}$$

Pasando ahora a las variables iniciales en la expresión de $\hat{x}'(t+1)$ queda:

$$\begin{aligned}C^T(t+1)\,\hat{x}(t+1) = {} & C^T(t+1)\,\phi(t)\,C(t)\,C^T(t)\,\hat{x}(t) + C^T(t+1)\,\Gamma(t)\,u(t) + \\ & + C^T(t+1)\,K(t)\,C(t)\,[C^T(t)\,y(t) - C^T(t)\,\theta(t)\,C(t)\,C^T(t)\,\hat{x}(t)].\end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros por la izquierda por $C(t+1)$ queda

$$\hat{x}(t+1) = \phi(t)\,\hat{x}(t) + \Gamma(t)\,u(t) + K(t)\,[y(t) - \theta(t)\,\hat{x}(t)]$$

$$\hat{x}(t_0) = m.$$

Resultados que coinciden con los que se obtenían en el apartado I de Estimación del vector de estado del sistema.

En cuanto al control óptimo ya vimos que era

$$u(t) = -L(t)\,\hat{x}(t)$$

el cual coincide con el control óptimo para el caso de información perfecta si sustituimos en la expresión de éste el estado del sistema por su estimador siguiéndose cumpliendo en este caso el llamado teorema de separación o principio de equivalencia lo mismo que se cumplía cuando se hacía la hipótesis de normalidad de los ruidos.