AXIOMATICA DEL CRITERIO DE DECISION $R - \varepsilon$ (*)

José A. Cristóbal Cristóbal

Departamento de Estadística Matemática e Investigación Operativa. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza

Recibido: 5-X-77

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. SIXTO RÍOS

In this article an axiomatic for the criterion of decision $R - \varepsilon$, proposed by S. Ríos —also called of «fixed risk»— is considered both in the context of uncertainty and in the context of random. Another simpler axiomatic is given for the special case in which the set of states of nature is finite.

En el presente artículo se estudia una axiomática para el criterio de decisión $R - \varepsilon$, propuesto por S. Ríos, también llamado de riesgo fijado, tanto en ambiente de incertidumbre como en ambiente aleatorio. Se da otra axiomática más simple en el caso particular de que el conjunto de estados de la naturaleza sea finito.

1. Axiomática: caso general

Sea ξ una variable aleatoria definida sobre el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, siendo $\mathfrak{B}$ la σ-álgebra de Borel sobre los números reales y sea $F(x)$ su función de distribución. Llamaremos intervalo de utilidad $R - \varepsilon$ de la misma (para un ε cualquiera del intervalo $[0, 1]$) al conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ que verifican $F(x) = \varepsilon$. Tomando como utilidad de ξ el punto máximo, mínimo o intermedio de dicho intervalo, quedan definidos los criterios $R - \varepsilon$, $(R - \varepsilon)^*$ y $(R - \varepsilon)^{**}$ respectivamente.

(*) Este artículo es una parte de la Tesis Doctoral del autor, leída en Zaragoza, en el mes de abril de 1977 y dirigida por el profesor Dr. D. Francisco José Cano Sevilla.

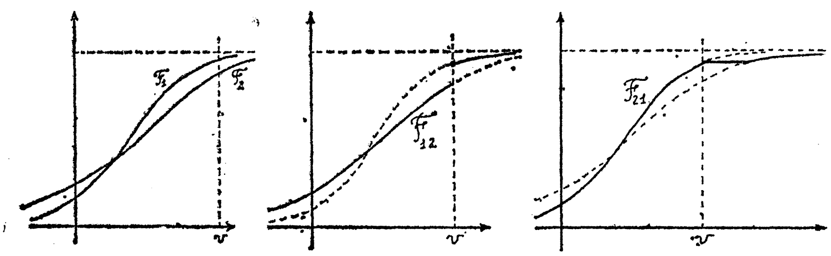
DEFINICIÓN.—Dadas las variables aleatorias ξ_1 y ξ_2 definidas sobre $(\mathbb{R}, \beta)$, y dado un $v \in \mathbb{R}$ cualquiera, llamamos *fusión* de ξ_1 y ξ_2 por el punto v a aquella variable aleatoria sobre $(\mathbb{R}, \beta)$ que tiene por función de distribución

$$F_v(x) = \begin{cases} F_1(x), & \text{si } x < v \\ \text{máx}\,[F_1(v-0), F_2(x)], & \text{si } x \geq v \end{cases}$$

donde $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son, respectivamente, las funciones de distribución de ξ_1 y ξ_2. Esta nueva variable aleatoria la representaremos por (ξ_1, v, ξ_2).

Se desprenden las siguientes propiedades:

a) La operación de fusión no es conmutativa.



b) Si las funciones de distribución de ξ_1 y ξ_2 poseen un número finito de discontinuidades, también la de (ξ_1, v, ξ_2) los tiene, $\forall v \in \mathbb{R}$.

c) Si ξ_1 y ξ_2 poseen una infinidad numerable de discontinuidades, *no* se deduce que las de (ξ_1, v, ξ_2) las posea, pudiendo ser incluso continua, como lo prueba el siguiente ejemplo:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & ,,\; x < -\dfrac{1}{2} \\ x + \dfrac{1}{2} & ,,\; -\dfrac{1}{2} \leq x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2^{[x]+1}} & ,,\; 0 \leq x \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{-[x]}} & ,,\; x < 0 \\ x + \dfrac{1}{2} & ,,\; 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 1 & ,,\; \dfrac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & ,, \quad x < -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} & ,, \quad -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & ,, \quad \frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x, y F_1, F_2, F_0 son respectivamente las funciones de distribución de las variables ξ_1, ξ_2 y $(\xi_1, 0, \xi_2)$, respectivamente.

d) La operación de fusión es distributiva respecto a la operación de mixtura, sobre un conjunto cualquiera de variables aleatorias cuyas funciones de distribución pasan por un punto fijo (v, ε).

e) La utilidad R — ε de una mixtura y de una fusión de dos variables aleatorias ξ_1 y ξ_2 está comprendida entre las utilidades R — ε de ambas; explícitamente: si designamos con H_i la utilidad R — ε de ξ_i $(i = 1, 2)$ y H_v la correspondiente a (ξ_1, v, ξ_2), donde $v \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\text{Si } F_1(v) < F_2(v). \text{ Entonces } H_v = \begin{cases} H_1 & ,, \quad \text{si } \varepsilon < F_1(v) \\ v & ,, \quad \text{si } F_1(v) \leq \varepsilon < F_2(v) \\ H_2 & ,, \quad \text{si } F_2(v) \leq \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{Si } F_1(v) \geq F_2(v). \text{ Entonces } H_v = \begin{cases} H_1 & ,, \quad \text{si } \varepsilon < F_1(v) \\ \\ H_2 & ,, \quad \text{si } F_1(v) \leq \varepsilon \end{cases}$$

Definición.—Dados $\varepsilon \in [0, 1]$, $v \in \mathbb{R}$, $e \in \mathbb{R}^+$. Representamos por $\eta^\varepsilon_v(e)$ la variable aleatoria cuya función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,, \quad x < v \\ \varepsilon & ,, \quad v \leq x < v + e \\ 1 & ,, \quad v + e \leq x \end{cases}$$

En el caso particular de que $e = 1$, escribiremos solamente η^ε_v.

En lo que sigue, vamos a considerar el conjunto A de todas las variables aleatorias definidas en $(\mathbb{R}, \beta)$, en el cual hay definida una relación de preferencia $\lesssim$.

DEFINICIÓN.—Dado un $\varepsilon \in [0, 1]$, llamamos $g_\varepsilon = A \longrightarrow \mathbb{R}$ a la correspondencia definida por:

$$g_\varepsilon(\xi) = \left\{ v \mid \eta^\varepsilon_{v-1} \sim \xi \right\}.$$

Lógicamente, esta correspondencia no tiene por qué ser una aplicación, puesto que el conjunto de imágenes de ξ puede ser eventualmente vacío o con más de un elemento.

AXIOMA 1.—La relación $\lesssim$ definida en A es un preorden.
AXIOMA 2.—$\exists | \, \varepsilon \in [0, 1]$ tal que g_ε es aplicación.
AXIOMA 3.—$\forall \, \varepsilon \in [0, 1]$ se cumple: $\eta^\varepsilon_v \gtrsim \eta^\varepsilon_w \Longleftrightarrow v \geqslant w$.
AXIOMA 4.—$\forall \, \xi \in A$, si $v \in g_\varepsilon(\xi)$ se verifican:

$$(\xi, v+1, \eta^\varepsilon_v) \overset{e}{\lesssim} (\eta^\varepsilon_v, v+1, \xi)$$
$$(\xi, v+\delta, \eta^\varepsilon_{v+\delta-1}) \neq (\xi, v, \eta^\varepsilon_{v+\delta-1}), \quad \forall \, \delta > 0,$$

donde $\overset{e}{\lesssim}$ denota la dominancia estocástica y la segunda condición indica que las dos variables no están idénticamente distribuidas.

AXIOMA 5.—$\forall \, \xi \in A$, si $v \in g_\varepsilon(\xi)$, $\exists \, e \geqslant 0$ de modo que:

$$(\xi, v-e, \eta^\varepsilon_{v-a}) \overset{e}{\lesssim} \eta^\varepsilon_{v-a}, \quad \forall \, a \text{ con } e < a < e+1$$
$$(\xi, v-e, \eta^\varepsilon_{v-e}(e)) = (\xi, v, \eta^\varepsilon_{v-e}(e)).$$

NOTA.—Es claro que si se verifican los axiomas 2 y 3, el preorden dado en el 1 es completo.

Por otra parte, se verá a continuación que si $\lesssim$ es el orden $R-\varepsilon$, el $e \geqslant 0$ que define el axioma 5 toma el significado de la longitud del intervalo de utilidad $R-\varepsilon$ de la variable ξ. En particular, si este intervalo se reduce a un punto, e se hace nulo, y los dos miembros de la segunda condición del axioma 5 son idénticos.

TEOREMA.—El criterio $R-\varepsilon$ induce en A una ordenación que verifica los axiomas 1, 2, 3, 4 y 5.

DEMOSTRACIÓN.—Definamos:

$$g_\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\xi \rightsquigarrow v = \max \left\{ x \mid F_\xi(x) \geq \varepsilon, \, F_\xi(x-0) \leq \varepsilon \right\}.$$

Evidentemente, $\xi \sim \eta^{\varepsilon}{}_{v-1}$ según el criterio R — ε pues la utilidad R — ε de ambas variables es v. Además este ε es el único que cumple tal condición, ya que si $\varepsilon' \neq \varepsilon$, la utilidad R — ε de $\eta^{\varepsilon'}{}_{v-1}$ no es v.

Se cumple por tanto el axioma 2. En cuanto al 1 y el 3, se verifican trivialmente, pues la ordenación de números reales es un preorden y las utilidades R — ε de las variables $\eta^{\varepsilon}{}_{v}$ y $\eta^{\varepsilon}{}_{w}$ son v y w respectivamente.

Para comprobar que se satisface el axioma 4, dada $\xi \in$ A cualquiera, denominemos por F (x) y G (x) a las funciones de distribución de $(\xi, v+1, \eta^{\varepsilon}{}_{v})$ y $(\eta^{\varepsilon}{}_{v}, v+1, \xi)$ respectivamente.

Entonces:

$$F(x) = \begin{cases} F_{\xi}(x) & ,, \quad x < v+1 \\ 1 & ,, \quad x \geq v+1 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & ,, \quad x < v \\ \varepsilon & ,, \quad v \leq x < v+1 \\ \text{máx}\,[\varepsilon, F_{\xi}(x)] & ,, \quad v+1 \leq x \end{cases}$$

Por ser v la utilidad R — ε de ξ, se tiene: $F_{\xi}(v) \geqslant \varepsilon$, y como F_{ξ} es no decreciente: $F_{\xi}(x) \geqslant \varepsilon$, $\forall\, x \geqslant v$. Introduciendo este resultado en la expresión de F y G, se obtiene:

$$F(x) \geq G(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

En cuanto a la segunda condición, si llamamos F y G a las funciones de distribución de las variables

$$(\xi, v+\delta, \eta^{\varepsilon}_{v+\delta-1}) \quad \text{y} \quad (\xi, v, \eta^{\varepsilon}_{v+\delta-1}),$$

respectivamente:

Para todo $\delta > 0$, tomando $v < x_0 < v + \delta$, se tiene a la vez que $F(x_0) = F_{\xi}(x_0)$ y que $G(x_0) = \varepsilon$.

Partiendo ahora análogamente de que $F_{\xi}(x) > \varepsilon$, $\forall\, x > v$, y por tanto $F_{\xi}(x) \neq \varepsilon$, $\forall\, x > v$, se deduce que $F(x_0) \neq G(x_0)$.

Por último, para probar que se verifica el axioma 5, tomaremos como e la longitud del intervalo de utilidad R — ε de ξ.

Sea $e < a < e+1$ y llamemos F y G las funciones de distribución de

$$(\xi, v-e, \eta^{\varepsilon}_{v-a}) \quad \text{y} \quad \eta^{\varepsilon}_{v-a}$$

respectivamente. Entonces:

$$F(x) = \begin{cases} F_\xi(x) & \text{"} \quad x < v - e \\ \varepsilon & \text{"} \quad v - e \leq x < v - a + 1 \\ 1 & \quad v - a + 1 \leq x \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{"} \quad x < v - a \\ \varepsilon & \text{"} \quad v - a \leq x < v - a + 1 \\ 1 & \text{"} \quad v - a + 1 \leq x \end{cases}$$

Sea $v - a \leqslant x_0 < v - e$. Entonces por una parte $F(x_0) = F_\xi(x_0)$, y por otra, como $x_0 < v - e < v - a + 1$, se tiene $G(x_0) = \varepsilon$. Ahora bien, por ser e la longitud del intervalo de utilidad $R - \varepsilon$ de ξ y $x_0 < v - e$, concluimos que $F_\xi(x_0 < \varepsilon)$, y en consecuencia $F(x_0) < G(x_0)$; cualquiera que sea a verificando que $e < a < e + 1$.

Finalmente, si el intervalo de utilidad $R - \varepsilon$ de ξ es un punto, $e = 0$ y la segunda condición queda establecida; supongamos pues que $e > 0$. Llamando F y G las funciones de distribución de

$$(\xi, v - e, \eta^\varepsilon_{v-e}(e)) \quad \text{y} \quad (\xi, v, \eta^\varepsilon_{v-e}(e)),$$

se tiene:

$$F(x) = \begin{cases} F_\xi(x) & \text{"} \quad x < v - e \\ \varepsilon & \text{"} \quad v - e \leq x < v \\ 1 & \text{"} \quad v \leq x \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} F_\xi(x) & \text{"} \quad x < v \\ 1 & \text{"} \quad v \leq x \end{cases}$$

Ahora bien, se ha visto que $F_\xi(x) = \varepsilon$, $\forall x$ con $v - e \leqslant x < v$. Luego:

$$F(x) = G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lema.—Si se verifican los axiomas 1, 2 y 3, dadas $\xi, \xi' \in A$ cualquiera, y llamando $v = g_\varepsilon(\xi)$ y $v' = g_\varepsilon(\xi')$ se tiene:

$$\xi \gtrsim \xi' \Leftrightarrow v \geq v'.$$

Demostración.—Por el axioma 2 se tiene:

$$\xi \sim \eta_{v-1}; \qquad \xi' \sim \eta^\varepsilon_{v'-1}.$$

Aplicando ahora el axioma 1:

$$\xi \gtrsim \xi' \Leftrightarrow \eta^{\varepsilon}_{v-1} \gtrsim \eta^{\varepsilon}_{v'-1},$$

LEMA.—Si se verifican los axiomas 2, 4 y 5, se concluye que para cualquier $\xi \in A$, el valor $v = g_{\varepsilon}(\xi)$ pertenece al intervalo de utilidad R — ε de la variable ξ.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\xi \in A$ y llamemos F y G las funciones de distribución de $(\xi, v + 1, \eta^{\varepsilon}{}_{v})$ y $(\eta^{\varepsilon}{}_{v}, v + 1, \xi)$ respectivamente. Entonces:

$$F(x) = \begin{cases} F_{\xi}(x) & ,, \quad x < v+1 \\ 1 & ,, \quad x \geq v+1 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & ,, \quad x < v \\ \varepsilon & ,, \quad v \leq x < v+1 \\ \text{máx}\,[\varepsilon, F_{\xi}(x)] & ,, \quad v+1 \leq x \end{cases}$$

Por el axioma 4, $F(x) \geqslant G(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow F(v) \geqslant G(v)$. Pero $F(v) = F_{\xi}(v)$ y $G(v) = \varepsilon$, luego $F_{\xi}(v) \geqslant \varepsilon$.

Tomemos ahora $a \in \mathbb{R}$ con $e < a < e + 1$, y denominaremos F y G las funciones de distribución de $(\xi, v - e, \eta^{\varepsilon}{}_{v-a})$ y $\eta^{\varepsilon}{}_{v-a}$. Entonces

$$F(x) = \begin{cases} F_{\xi}(x) & ,, \quad x < v - e \\ \text{máx}\,[\varepsilon, F_{\xi}(v - e - 0)] & ,, \quad v - e \leq x < v - a + 1 \\ 1 & ,, \quad v - a + 1 \leq x \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & ,, \quad x < v - a \\ \varepsilon & ,, \quad v - a \leq x < v - a + 1 \\ 1 & ,, \quad v - a + 1 \leq x \end{cases}$$

Por el axioma 5, $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F(x_0) < G(x_0)$.

Si $x_0 < v - a \Longrightarrow G(x_0) = 0 \Longrightarrow F(x_0) < 0$: imposible.

Si $x_0 > v - a + 1 \Longrightarrow F(x_0) = 1 \Longrightarrow G(x_0) > 1$: imposible.

Si $v - e \leqslant x_0 < v + a + 1 \Longrightarrow F(x_0) = \text{máx}\,[\varepsilon, F_{\xi}(v - e - 0)] < G(x_0) = \varepsilon$: imposible.

Luego $v - a \leqslant x_0 < v - e$, y entonces $F(x_0) = F_{\xi}(x_0)$ y $G(x_0) = \varepsilon$.

Así $F_\xi(x_0) < \varepsilon$. Como esto sucede $\forall a$ con $e < a < e + 1$, deducimos que

$$\underline{F_\xi(v - e - 0) < \varepsilon.}$$

Ahora bien, si $e = 0$, queda probado que v pertenece al intervalo de utilidad $R - \varepsilon$ de ξ. Consideremos ahora el caso de que $e > 0$; entonces por la 2.ª condición del axioma 5:

$$\text{máx}\,[F_\xi(v - e - 0),\ F_{\eta^*_{v-e}(e)}(x)] = F_\xi(x), \quad \forall x \ \text{ con } \ v - e \leq x < v.$$

Pero

$$F_\xi(v - e - 0) \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad F_{\eta^*_{v-e}(e)}(x) = \varepsilon, \quad \forall x \in [v - e, v),$$

luego

$$\underline{F_\xi(x) = \varepsilon, \quad \forall x \quad \text{con} \quad v - e \leq x < v.}$$

Teorema fundamental.—El criterio $R - \varepsilon$ viene caracterizado por los axiomas números 1, 2, 3, 4 y 5.

Demostración.—Sea $\xi \in A$. Hemos probado en el lema anterior que $v = g_\varepsilon(\xi)$, pertenece al intervalo de utilidad $R - \varepsilon$ de ξ. Probemos que es precisamente el punto máximo de dicho intervalo.

Sea $w > v$; por el axioma 4, existe un v_0 con $v < v_0 < w$, cumpliendo $F_\xi(v_0) \neq \varepsilon$. Ahora bien, en el lema anterior se dedujo $\varepsilon \leqslant F_\xi(v)$, y por ser F_ξ no decreciente: $\varepsilon \leqslant F_\xi(v_0)$.

Resumiendo ambos resultados: $F_\xi(v_0) > \varepsilon$.

Entonces, $\forall x$ con $v_0 < x < w$, se tiene: $F_\xi(x) \geqslant F_\xi(v_0) > \varepsilon$, por lo que $F_\xi(w - 0) > \varepsilon$, y en consecuencia w no puede pertenecer al intervalo de utilidad $R - \varepsilon$ de ξ.

De este modo, dadas $\xi, \xi' \in A$, por el primer lema, se tiene: $\xi \gtrsim \xi' \iff v \geqslant v'$, donde $v = g_\varepsilon(\xi)$ y $v' = g_\varepsilon(\xi')$. Pero acabamos de demostrar que v y v' son precisamente las utilidades $R - \varepsilon$ de ξ y ξ', por lo que se completa la demostración.

Nota.—Es fácil dar contraejemplos que prueban la independencia de los cinco axiomas anteriores.

Para el criterio (R — ε)* es válido el mismo teorema fundamental, sustituyendo la segunda condición del axioma 4 por la siguiente:

$$(\xi, v - \delta, \eta^{\varepsilon}_{v-\delta}) \neq (\xi, v, \eta^{\varepsilon}_{v-\delta}), \quad \forall \delta > 0.$$

Análogo resultado se obtiene para el criterio (R — ε)**, sustituyendo en el axioma 5 el valor e por $e/2$, y la segunda condición del axioma 4 por las siguientes:

$$(\xi, w + \delta, \eta^{\varepsilon}_{w+\delta-1}) \neq (\xi, w, \eta^{\varepsilon}_{w+\delta-1}), \quad \forall \delta > 0, \quad w = v - e/2$$

$$(\xi, w' - \delta', \eta^{\varepsilon}_{w'-\delta'}), \neq (\xi, w', \eta^{\varepsilon}_{w'-\delta'}), \quad \forall \delta' > 0, \quad w' = v - e/2.$$

2. El criterio R — ε en el caso finito

Sea $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ el conjunto de estados de la naturaleza, y $\{d_1, \ldots, d_k\}$ el conjunto de acciones posibles para un cierto problema de decisión. En tal caso sabemos que dicho problema viene caracterizado por una matriz A cuyo elemento genérico $a^i{}_j$ es la consecuencia de elegir la acción d_i cuando la naturaleza presenta el estado θ_j.

Si sobre los estados de la naturaleza existe una distribución de probabilidad $p_1, \ldots, p_n$, donde $p_j = \mathrm{P}(\theta_j)$, $(j = 1, \ldots, n)$, cada fila d_i de la matriz representa una variable aleatoria discreta que toma los valores $a^i{}_1, \ldots, a^i{}_n$ con probabilidades $p_1, \ldots, p_n$ respectivamente.

DEFINICIÓN.—Sea σ una aplicación del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en sí mismo, y sea d_i una fila de la matriz A con m elementos diferentes. Se dice que σ es una *variación natural* de la fila d_i si se verifica:

$$a^i_{\sigma(1)} < a^i_{\sigma(2)} < \cdots < a^i_{\sigma(m)}, \quad \text{con} \quad \sigma(j) = \sigma(1) \Leftrightarrow a^i_j = a^i_1 .$$

NOTAS.—a) La función de distribución correspondiente a dicha fila d_i es escalonada, tomando en los puntos $a^i{}_{\sigma(j)}$ saltos de valor

$$q_{\sigma(j)} = \sum_{l \in \mathrm{L}^i(j)} p_{\sigma(l)},$$

siendo $\mathrm{L}^i(j) = \{l / a^i{}_l = a^i{}_j\}$.

b) Dado $\varepsilon \in [0, 1]$ el intervalo de utilidad R — ε para una fila d_i de la matriz A, viene dado por $[a^i_{\sigma(r-1)}, a^i_{\sigma(r)}]$, donde σ es la variación natural de d_i y r es aquel número natural que cumple:

$$\sum_{j=1}^{r} q_{\sigma(j)} > \varepsilon \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{r-1} q_{\sigma(j)} \leq \varepsilon,$$

lo que equivale a:

$$\varepsilon \in [F_\sigma(r-1), F_\sigma(r)), \quad \textbf{siendo} \quad F_\sigma(r) = \sum_{j=1}^{r} q_{\sigma(j)} \,. \quad (1)$$

En tal caso, la utilidad R — ε de d_i es $a^i_{\sigma(r)}$.

Cuando $\varepsilon \in (F_\sigma(r-1), F_\sigma(r)]$, la utilidad (R — ε)* de d_i es $a^i_{\sigma(r)}$. En cuanto a la utilidad (R — ε)** de d_i es:

$$\begin{cases} a^i_{\sigma(r)}, & \textbf{cuando } \varepsilon \in (F_\sigma(r-1), F_\sigma(r)) \\ 1/2\,[a^i_{\sigma(r-1)} + a^i_{\sigma(r)}], & \textbf{cuando } \varepsilon = F_\sigma(r-1) \end{cases}$$

Por consiguiente, para un $\varepsilon \in [0, 1)$ (2), y dos filas cualesquiera d_i, d_t de la matriz A, si denominamos por σ_i y σ_t las correspondientes variaciones naturales, el criterio R — ε establece la ordenación:

$$d_i \gtrsim d_t \iff a^i_{\sigma_i(r)} \geq a^t_{\sigma_t(s)},$$

donde r y s son los únicos naturales que verifican:

$$\varepsilon \in [F_{\sigma_i}(r-1), F_{\sigma_i}(r)) \cap [F_{\sigma_t}(s-1), F_{\sigma_t}(s)).$$

Análogo resultado quedaría para los cristerio (R — ε)* y (R — ε)** modificando convenientemente los intervalos y utilidades.

Para terminar este punto, daremos un algoritmo para la aplicación del criterio R — ε en el caso finito.

---

(1) Se adopta el convenio $\sum_{j=1}^{r-1} p_{\sigma(j)} = 0$, cuando $r = 1$.

(2) El caso particular $\varepsilon = 1$ no lo tratamos, pero es especialmente simple, ya que corresponde al criterio según el cual todas las decisiones son equivalentes.

Dado un problema de decisión de matriz A, y conservando toda la notación anterior, construimos el siguiente cuadro:

$$Q\left\{\begin{array}{l} F_{\sigma_1}(1),\ \dots,\ F_{\sigma_1}(m_1)=1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_{\sigma_k}(1),\ \dots,\ F_k(m_k)=1\end{array}\right\}$$

donde σ_i y m_i son, respectivamente, la variación natural y el número de elementos distintos de la fila d_i $(i = 1, \dots, k)$.

Para cada d_i se considera la partición $[0, 1)$ siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & F_{\sigma_i}(1) & & F_{\sigma_i}(2), \dots, & F_{\sigma_i}(m_i-1) & & & 1\\ [& \text{———} &)\text{—}[& \text{———} &)\text{—}[\text{———} &)\text{—}[& \text{———} & &) \\ & a^i_{\sigma_i(1)} & & a^i_{\sigma_i(2)} & , \dots, & & a^i_{\sigma_1(m_i)} & & \end{array}$$

adjudicando el correspondiente $a^i_{\sigma_i(j)}$ a cada subintervalo, tal como se indica en la figura.

A continuación se considera la intersección $\mathcal{P}$ de todas estas particiones, obteniéndose el diagrama:

	0		1
$d_1)$	$a^1_{\sigma_1(1)}$	... ,..................,	$a^1_{\sigma_1(m_1)}$
$d_2)$	$a^2_{\sigma_2(2)}$	... ,..................,	$a^2_{\sigma_2(m_2)}$
...	.....	... ,..................,	......
...	.....	... ,..................,	......
$d_k)$	$a^k_{\sigma_k(1)}$	... ,..................,	$a^k_{\sigma_k(m_k)}$

Si ε varía dentro de cada intervalo de $\mathcal{P}$, la ordenación entre los d_i inducida por el correspondiente criterio R — ε será la misma que la ordenación de los valores $a^i_{\sigma_i(j)}$ adjudicados a dicho intervalo en las k particiones.

Para comprobar la sencillez del algoritmo, damos el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{array}{c} \\ d_1) \\ d_2) \\ d_3) \\ d_4) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underbrace{\theta_1} & \underbrace{\theta_2} & \underbrace{\theta_3} & \underbrace{\theta_4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 10 & 9 & 1 \\ 6 & 6 & 12 & 2 \\ 5 & 9 & 9 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

ORDENACIÓN DE UTILIDADES	ORDENACIÓN DE ESTADOS	ORDENACIÓN DE PROBABILIDADES			
$1 < 4 < 5 < 6$	$(1, 4, 3, 2)$	0.1	0.4	0.3	0.2
$1 < 4 < 9 < 10$	$(4, 1, 3, 2)$	0.4	0.1	0.3	0.2
$2 < 6 < 12$	$\left(4, \frac{1}{2}, 3\right)$	0.4	$0.1 + 0.2$	0.3	
$3 < 5 < 9$	$\left(4, 1, \frac{2}{3}\right)$	0.4	0.1	$0.2 + 0.3$	

$$Q = \begin{Bmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 1 & \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 1 & \end{Bmatrix}$$

ORDENACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE Q

$0.1 < 0.4 < 0.5 < 0.7 < 0.8 < 1$

0   0,1   0,4   0,5   0,7   0,8   1

$d_1)$	1	4	4	5	5	6
$d_2)$	1	1	4	9	9	10
$d_3)$	2	2	6	6	12	12
$d_4)$	3	3	5	9	9	9

Así, por ejemplo, $\forall\ \varepsilon \in [0{,}5,\ 0{,}7)$, el criterio R — ε realiza la ordenación: $d_1 < d_3 < d_4 \sim d_2$.

Y recíprocamente, si se fija la ordenación: $d_1 \lesssim d_4 \lesssim d_2 \lesssim d_3$ se obtiene que $\forall\ \varepsilon \in [0{,}7,\ 1)$, el criterio R — ε ofrece tal ordenación.

Todo el algoritmo puede aplicarse al criterio (R — ε)*, con $\varepsilon \neq 0$, sin más que cambiar los intervalos $[F_{\sigma_i}(r-1),\ F_{\sigma_i}(r))$, por los $(F_{\sigma_i}(r-1),\ F_{\sigma_i}(r)]$. En cuanto al criterio (R — ε)**, con $\varepsilon \neq 0$ y $\varepsilon \neq 1$, hay que realizar la partición en intervalos abiertos y puntos.

3. El criterio R — ε en ambiente de incertidumbre. Confrontación con la axiomática de Milnor

El problema que planteamos ahora es encontrar un conjunto de axiomas sobre la ordenación $\lesssim$ entre las filas de un problema finito de decisión, de modo que éstos generen una distribución de probabilidades $p_1, \ldots, p_n$ sobre los estados de la naturaleza, y un $\varepsilon \in [0,\ 1]$ de modo que la ordenación inducida por el criterio R — ε coincide con la preferencia dada $\lesssim$.

Es sabido que Milnor (1954), propuso diez axiomas para caracterizar los criterios de decisión en ambiente de incertidumbre total, cuando el conjunto de estados de la naturaleza es finito, y las consecuencias de los actos vienen medidas por sus utilidades en el sentido de Von Neumann-Morgenstern.

La conclusión de Milnor es que no existe ningún criterio que satisfaga los diez axiomas y en consecuencia la solución racional es contradictoria.

Sin embargo, si se prescinde de algunos de ellos, quedan caracterizados algunos de los criterios clásicos más importantes, como los de Laplace, Wald, Hurwicz y Savage. Recientemente, F. J. Girón (1973) ha demostrado que también el criterio Bayes viene caracterizado por un subsistema de estos diez axiomas.

Para el criterio R — ε puede comprobarse (ver J. A. Cristóbal, Tesis Doctoral, 1977) que verifica este sistema axiomático salvo el de linealidad de columnas y los que caracterizan la ignorancia completa (simetría y duplicación de columnas).

En resumen, todos estos resultados pueden condensarse en el siguiente cuadro:

Criterios / Axiomas	Laplace	Wald	Hurwicz	Savage	Bayes	R-ε
1. Orden	X	X	X	X	X	X
2. Simetría	X	X	X	X		
3. Dominancia fuerte	X	X	X	X	X	X
4. Continuidad	X	X	X	X	X	X
5. Linealidad	X	X	X	X	X	X
6. Adición de filas	X	X	X		X	X
7. Linealidad columnas	X			X	X	
8. Duplicación columnas		X	X	X		
9. Convexidad	X	X		X	X	X
10. Adición filas especiales	X	X	X	X	X	X

Teorema.—Ningún subsistema de los siete axiomas de Milnor que verifica el criterio R — ε, caracteriza dicho criterio.

Demostración.—En efecto, ya que en caso afirmativo, este criterio contendría como caso particular al de Laplace, porque este último cumple todos estos axiomas y dos más; dicho de otra manera: dado un problema de decisión finito, existiría un $\varepsilon \in [0, 1]$ y una distribución de probabilidad $(p_1, \ldots, p_n)$ sobre los estados de la naturaleza, de modo que el criterio R — ε correspondiente coincidiría con el de Laplace. Esto no puede suceder como se desprende del siguiente contraejemplo:

$$A = \begin{array}{c} \\ d_1) \\ d_2) \\ d_3) \end{array} \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \\ \end{array}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{Ordenación Laplace: } d_1 \sim d_2 \succ d_3 \\ \text{Ordenación R-}\varepsilon \begin{cases} \varepsilon \neq 1 & \begin{cases} d_1 \succ d_2, & \text{si } \varepsilon < p \\ d_1 \prec d_2, & \text{si } \varepsilon \geq p \end{cases} \\ \varepsilon = 1: & d_2 \sim d_3 \end{cases} \end{array}$$

El mismo resultado es válido para los criterios $(R - \varepsilon)^*$ y $(R - \varepsilon)^{**}$. La consecuencia de este teorema es que se debe ampliar la axiomática de Milnor para que sea posible extraer un subsistema de axiomas que caractericen estos criterios R — ε, $(R - \varepsilon)^*$ y $(R - \varepsilon)^{**}$.

Definición.—Dado un problema finito de decisión de matriz $A = (a^i{}_l)$, cuyas k filas d_i presentan la ordenación $\lesssim$, se dice que la t-tupla $(a^{i_1}_{l_1}, \ldots, a^{i_t}_{l_t})$, con $i_1, i_2, \ldots, i_t$ distintos entre sí, forman una *cadena de orden t* de A, si sus elementos están ordenados no decrecientemente y cumplen:

$$a^{i_r}_{l_r} \leq a^{i_s}_{l_s} \Leftrightarrow d_{i_r} \lesssim d_{i_s} \,.$$

Notemos que si $\lesssim$ no es completo, no puede haber cadenas de orden k de A. Ahora bien, aunque $\lesssim$ sea completo, tampoco queda garantizada la existencia de cadenas de orden máximo.

DEFINICIÓN.—Sea (A, $\lesssim$) como en la definición anterior. Llamemos σ_i a la variación natural de la fila d_i, y sea

$$c = (a^{i_1}_{\sigma_{i_1}(r_1)}, a^{i_2}_{\sigma_{i_2}(r_2)}, \ldots, a^{i_t}_{\sigma_{i_t}(r_t)}),$$

una cadena de A. Se denomina *conjunto factible* de la cadena c a la región de $\mathbb{R}^n$ determinada por la intersección del simplex n-dimensional, con el conjunto de los $\{p_1, \ldots, p_n\}$ que verifican:

$$\max_{1 \leq j \leq t} F_{\sigma_{i_j}}(r_j - 1) < \min_{1 \leq j \leq t} F_{\sigma_{i_j}}(r_j) \,.$$

Notemos que este conjunto, o es vacío, o es un poliedro convexo, por ser intersección del simplex de $\mathbb{R}^n$ con t^2 semiespacios cuya inecuación es

$$\sum_{u=1}^{r_j - 1} q_{\sigma_{i_j}(u)} < \sum_{u=1}^{r_j} q_{\sigma_{i_l}(u)} \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, t).$$

AXIOMA 1.—Existen en A, cadenas c de orden máximo k.

AXIOMA 2.—El conjunto factible de c es no vacío, para alguna cadena de orden k de A.

TEOREMA.—El criterio R — ε verifica estos dos axiomas y viene caracterizado por ellos.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\varepsilon \in [0, 1)$ y $(p_1, \ldots, p_n)$ una distribución de probabilidades sobre los estados de la naturaleza. El conjunto de utilidades R — ε de todas las filas ordenadas de menor a mayor, forma una cadena de A, por definición del criterio. Sea tal cadena:

$$c = (a^{i_1}_{\sigma_{i_1}(r_1)}, \ldots, a^{i_k}_{\sigma_{i_k}(r_k)}).$$

Como

$$\varepsilon \in \bigcap_{1 \leq j \leq k} [F_{\sigma_{i_j}}(r_j - 1), F_{\sigma_{i_j}}(r_j)).$$

se obtiene:

$$\max_{1 \leq j \leq t} F_{\sigma_{i_j}}(r_j - 1) \leq \varepsilon < \min_{1 \leq j \leq t} F_{\sigma_{i_j}}(r_j).$$

Por tanto el punto $(p_1, \ldots, p_n)$ pertenece al conjunto factible de c, luego queda probado que el criterio R — ε verifica los dos axiomas.

Por otra parte, el axioma 1 garantiza la existencia de cadenas de orden k. Sea:

$$c = (a^{i_1}_{\sigma_{i_1}(r_1)}, \ldots, a^{i_k}_{\sigma_{i_k}(r_k)}),$$

una de estas cadenas, que además verifique el axioma 2.

Como

$$\max_{1 \leq j \leq k} F_{\sigma_{i_j}}(r_j - 1) < \min_{1 \leq j \leq k} F_{\sigma_{i_j}}(r_j),$$

sea ε tal que:

$$\max_{1 \leq j \leq k} F_{\sigma_{i_j}}(r_j - 1) \leq \varepsilon < \min_{1 \leq j \leq k} F_{\sigma_{i_j}}(r_j).$$

Entonces se tiene:

$$\varepsilon \in \bigcap_{j=1}^{k} [F_{\sigma_{i_j}}(r_j - 1), F_{\sigma_{i_j}}(r_j)),$$

con la condición

$$a^{i_1}_{\sigma_{i_1}(r_1)} \leq, \ldots, \leq a^{i_k}_{\sigma_{i_k}(r_k)},$$

(por ser c cadena).

Por consiguiente, el criterio R — ε, con distribución de probabilidad $(p_1, \ldots, p_n)$, un punto cualquiera del conjunto factible de c, realiza la ordenación $d_{i_1} \lesssim \ldots \lesssim d_{i_k}$, que es la presentada en un principio (pues c es cadena).

Resultado completamente análogo se obtiene para el criterio (R — ε)*. En cuanto al criterio (R — ε)** hay que sustituir en los axiomas la matriz A del problema por lo que llamamos matriz ampliada $\bar{A}$, y que definimos en la siguiente manera:

DEFINICIÓN.—Sea un problema finito de decisión representado por la matriz A. Se llama matriz *ampliada* $\bar{A}$, a aquella que tiene por fila i-ésima:

$$\left(a^i_1, \ldots, a^i_n \;\middle|\; \frac{a^i_{\sigma_i(1)} + a^i_{\sigma_i(2)}}{2}, \frac{a^i_{\sigma_i(2)} + a^i_{\sigma_i(3)}}{2}, \ldots, \frac{a^i_{\sigma_i(m_i - 1)} + a^i_{\sigma_i(m_i)}}{2} \right)$$

Notemos que cuando no todos los m_i sean iguales, en la matriz $\bar{A}$ quedan unos huecos en las últimas columnas, en los que no se pone ningún elemento.

DEFINICIÓN.—Sea c una cadena de una matriz ampliada $\bar{A}$. Se llama *conjunto factible* de c a la región de $\mathbb{R}^n$ determinada por la intersección del simplex n-dimensional con el conjunto de los puntos $\{p_1, \ldots, p_n\}$ que verifican:

a) $F_{\sigma_i}(r) = F_{\sigma_t}(s)$, si los elementos

$$\frac{a^i_{\sigma_i(r)} + a^i_{\sigma_i(r+1)}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{a^t_{\sigma_t(s)} + a^t_{\sigma_t(s+1)}}{2},$$

se encuentran en c.

b)

$$\max_{j \in J} F_{\sigma_{i_j}}(r_j - 1) < f(p_1, \ldots, p_n) < \min_{j \in J} F_{\sigma_{i_j}}(r_j),$$

donde

$$J=\{\, j \mid a^{ij}_{\sigma_{i_j}(r_j)} \varepsilon\, c \,\}\,.$$

y $f(p_1, \ldots, p_n)$ es el valor común determinado en (a) (si existe; en caso contrario el conjunto factible es vacío).

Añadiendo estos resultados a los obtenidos por Milnor y Girón, podemos construir el siguiente cuadro:

Criterios / Axiomas	Laplace	Wald	Hurwicz	Savage	Bayes	R - ε y (R - ε)*	(R - ε)**
1. Orden	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	X	X
2. Simetria	⊗	⊗	⊗	⊗			
3. Dominancia fuerte	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	X	X
4. Continuidad	X	⊗	⊗	⊗	⊗	X	X
5. Linealidad	X	X	⊗	X	X	X	X
6. Adición filas	⊗	⊗	⊗		⊗	X	X
7. Linealidad columnas	⊗			⊗	⊗		
8. Duplicación columnas		⊗	⊗	⊗			
9. Convexidad	X	⊗		⊗	X	X	X
10. Adición filas especiales	X	X	X	⊗	X	X	X
11. Existencia cadenas		X				⊗	
12. Existencia cadenas ampl.		X				X	⊗
13. Conj. fact. no vacio		X				⊗	
14. Conj. fact. ampl. no vacio		X				X	⊗

Bibliografía

GIRÓN, F. J.: *Caracterización de la regla de Bayes y la probabilidad subjetiva*. Tesis Doctoral, Madrid, 1973.

LUCE, R. D. and RAIFFA, H.: *Games and Decisions*. John Wiley, New York, 1957.

MILNOR, J. W.: *Games against Nature*. In Thrall, Coombs and Davis (eds.), John Wiley, 1954.

RÍOS, S.: *Algunos problemas de decisión y la noción de utilidad asociada*. Metra, vol. VI, Madrid, 1965.

RÍOS, S.: *Procesos dinámicos de decisión en concurrencia*. Real Academia de Ciencias, Madrid, 1967.