SOBRE EL TEOREMA DE DIEUDONNE-GROTHENDIECK

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 7-V-80

In this paper we are going to prove that the Dieudonné-Grothendieck theorem is valid for the spaces Γ_r introduced by Valdivia [2]. If E is a locally convex Hausdorff space, which is not a Γ_r space, then there exists a barrelled space X and a linear mapping T: X $\longrightarrow$ E with close-graph and not continuous. Here it is also proved that if there exists a Fréchet space X and a linear map T: X $\longrightarrow$ E with closed-graph and not continuous, then the Dieudonné-Grothendieck theorem falls in defect for E.

En este trabajo vamos a probar que el teorema de Dieudonné-Grothendieck es válido para los espacios Γ_r, introducidos por Valdivia [2]. Si E es un espacio vectorial topológico localmente convexo de Hausdorff (en abreviatura, e. l. c. s.), que no es un espacio Γ_r, existe un espacio tonelado X y una aplicación lineal T: X $\longrightarrow$ E con gráfica cerrada que no es continua. Aquí también probamos que si existe un espacio de Fréchet X y una aplicación lineal T: X $\longrightarrow$ E con gráfica cerrada que no es continua, entonces el teorema de Dieudonné-Grothendieck cae en defecto para E.

TEOREMA 1.—*Sea* m: $\Sigma \longrightarrow E$ *una aplicación tal que* Σ *es una* σ*-álgebra de subconjuntos de un conjunto* Ω *y* E *un espacio* Γ_r. *Si* x′ m *es acotada y finitamente aditiva para cada* x′ *perteneciente a un subconjunto total* Γ *del dual* E' *de* E, *entonces* m *es una medida vectorial acotada.*

DEMOSTRACIÓN.—La aditividad finita es una consecuencia de ser Γ total. Para demostrar que m es acotada es suficiente probar que $x' m$ es acotada para cada $x' \in E'$. Sea

$$M = \{x^* \in E^* : |x^* m| (\Omega) < \infty\},$$

donde E^* es el dual algebraico de E. Entonces M es un subespacio lineal de $E_\sigma^* = (E^*, \sigma(E^*, E))$ que contiene a Γ y, por consiguiente, $M \cap E'$ es denso en $E_\sigma^* = (E^*, \sigma(E^*, E))$. Sea H una parte cerrada y acotada en M. Es obvio que, para cada conjunto $A \in \Sigma$, se tiene

$$\sup \{ | x^* m(A) | : x^* \in H \} < \infty .$$

Entonces por el teorema de acotación de Nikodym (véase Diestel y Uhl [1]) se verifica

$$\sup \{ | x^* m(A) | : x^* \in H, \quad A \in \Sigma \} = K < \infty .$$

Sea $(x_i^*)_{i \in I}$ una red en H convergente a x_0^* en E_σ^*. Entonces

$$| x_0^* m(A) | = \lim_i | x_i^* m(A) | \leq K$$

para todo $A \in \Sigma$, luego

$$| x_0^* m | (\Omega) < \infty, \quad x_0^* \in M \quad y \quad x_0^* \in H$$

por ser H cerrado en M. Lo que nos prueba que H es cerrado en E_σ^* y, por tanto, compacto. Entonces por ser E un espacio Γ_r se tiene $M \supset E'$ y, por consiguiente, $x'm$ es acotada para cada $x' \in E'$.

TEOREMA 2.—*Sean E un e. l. c. s. y X un espacio de Fréchet tales que existe una aplicación lineal $T: X \longrightarrow E$ con gráfica cerrada no continua. Entonces existe una σ-álgebra Σ de subconjuntos de Ω (= $\mathbf{N}$), un conjunto total Γ en E' y una medida vectorial finitamente aditiva y no acotada* m: $\Sigma \longrightarrow E$ *tal que, para cada* $x' \in \Gamma$, x' m *es una medida acotada.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\| \cdot \|$ una F-norma de X. Entonces, por ser T no continua, existe una sucesión $(x_n)_1^\infty$ en X y una seminorma p de E, tales que

$$\| x_n \| \leq 4^{-n} \quad y \quad p(T x_n) \geq 1$$

para todo n. Por tanto, $\sum_1^\infty 2^n x_n$ es subserie convergente en X. Sea $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ la σ-álgebra de todas las partes de $\mathbf{N}$ y

$$m(A) = T\Big(\sum_{n \in A} 2^n x_n \Big)$$

para $A \in \Sigma$. Entonces, $m: \Sigma \longrightarrow E$ es una medida vectorial no acotada puesto que

$$p(m(\{n\})) = 2^n p(T x_n) \geq 2^n$$

para $n \in \mathbf{N}$.

Vamos a probar ahora que $x' m$ es una medida acotada para todo $x' \in \Gamma$, donde Γ es el dominio de la transpuesta T' de T. Por tener T la gráfica cerrada, Γ es denso en $E'_\sigma := (E', \sigma(E', E))$ y es total. Además, si $x' \in \Gamma$ e $y' = T' x'$, se tiene

$$| x' m(A) | = \left| y' \left(\sum_{n \in A} 2^n x_n \right) \right| \leq \sum_{1}^{\infty} 2^n | y' x_n | < \infty$$

para todo $A \in \Sigma$, por ser $\Sigma\, 2^n x_n$ subserie convergente.

Bibliografía

[1] DIESTEL, J. y UHL, J. J., Jr.: *Vector measures*. «Amer. Math. Soc. Providence», R. I., 1977.

[2] VALDIVIA, M.: *Sobre el teorema de la gráfica cerrada*. «Collect. Math.», **22** (1971), 51-72.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid