PROCESOS DE DECISION BAYESIANA NO PARAMETRICOS (*)

Vicente Quesada Paloma
Departamento de Estadística Matemática. Facultad de Ciencias. Universidad Autónoma de Madrid

Se considera un problema de decisión Bayesiana no paramétrico sobre el «Modelo de error de Medida». Las variables asociadas a este problema de decisión, bajo pérdida cuadrática, tienen distribuciones G (θ) y F respectivamente, en donde G (θ) es desconocida y F es un proceso de Dirichlet de parámetro α. Se construye una regla de decisión empírico-Bayes, en el caso de que la densidad del parámetro pertenezca a una cierta familia dada. Se demuestra que es asintóticamente óptima.

On considère un problème de décision Bayesienne non paramétrique sur le «Modèle d'erreur de mesure». Les variables associées à ce problème de décision, sous fonction de perte quadratique, ont des lois de probabilité G (θ) et F respectivement, où G (θ) est inconnue et F est un processus de Dirichlet de paramètre α.
On construit une fonction de décision empirique Bayes dans le cas où la densité du paramètre appartient à une certaine famille donnés. On démontre que la fonction de décision et assymptotiquement optimale.

1. Modelo no paramétrico de error de medida

Sea θ una variable aleatoria con distribución G (θ), sobre un espacio paramétrico medible (Θ, σ_Θ), en donde Θ es un intervalo acotado de R.

Sea ε una variable aleatoria, F que es un proceso de Dirichlet de parámetro α; $F \in D(\alpha)$, en donde α es una medida finita no nula sobre (R, β), que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en R, y que tiene por densidad $\frac{d\alpha}{dl} = M\,h$, siendo $M > 0$ y h una densidad en R.

El objetivo es estimar θ, cuando observamos θ distorsionada por

(*) Presentada en la sesión celebrada el 6 de febrero de 1980.

el ruido aditivo producido por ε. Consideramos una función de pérdida cuadrática, y nuestro modelo será de la forma

$$X = \theta + \varepsilon$$

en donde X es la v. a. observable. Nuestro objetivo es pues encontrar el estimador Bayes de θ, observado X. Al situarnos en pérdida cuadrática, este estimador será:

$$\hat{\theta}_\beta = E[\theta / X]$$

es decir, la media a posteriori.

Es necesario pues, encontrar la distribución a posteriori de θ dado X.

La distribución de X dados θ y F es

$$K_{\theta, F}(x) = P_{\theta, F}(X \leq x) = F(x - \theta)$$

es decir, es un proceso de Dirichlet de parámetro α_θ, definido por

$$\alpha_\theta(-\infty, x] = \alpha(-\infty, x - \theta],$$

y que tendrá por densidad respecto a la medida Lebesgue M h $(x - \theta)$.

La distribución de X dado θ es

$$K_\theta(x) = \frac{\alpha_\theta(-\infty, x]}{\alpha_\theta(R)} = \frac{\alpha(-\infty, x - \theta]}{\alpha(R)}$$

y por densidad $h(x - \theta)$, la densidad a posteriori de θ dado X es

$$\frac{d\,G((\theta)/X)}{d\,G(\theta)} = \frac{h(x - \theta)}{\int_\Theta h(x - \theta)\, d\,G(\theta)}$$

y el estimador Bayes de θ:

$$\hat{\theta}_\beta = \frac{\int_\Theta \theta\, h(x - \theta)\, d\,G(\theta)}{\int_\Theta h(x - \theta)\, d\,G(\theta)}$$

En el caso de que G (θ) sea desconocida y $h(x - \theta)$ sea de la forma

$$h(x - \theta) = \theta^x\, 1(\theta)\, m(x).$$

$$\hat{\theta}_\beta = \frac{m(x)}{m(x+1)} \frac{\int_\Theta h(x+1/\theta)\, d\,G(\theta)}{\int_\Theta h(x/\theta)\, d\,G(\theta)} = \frac{m(x)}{m(x+1)} \frac{h_G(x+1)}{h_G(x)}$$

siendo h_G la densidad marginal de la v. a. X.

Si consideramos ahora una sucesión de n problemas idénticos e independientes al anterior, en cada uno de ellos tendríamos $X_1 \ldots X_n$ v. a. observables y basándonos en ellas construimos un estimador $\hat{\theta}_n$ empírico para el problema $n + 1$, que sea asintóticamente óptimo en el sentido de que el riesgo Bayes de este estimador empírico converja hacia el riesgo Bayes del estimador Bayes desconocido.

Teorema.—Si considramos el estimador empírico

$$\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, X) = \frac{m(X)}{m(X+1)} \frac{h_n(X+1)}{h_n(X)}$$

en donde $h_n(X)$ es el estimador no paramétrico de una densidad propuesto por Parzen (1962).

$$h_n(X) = \frac{1}{n\,C(n)} \sum_{j=1}^{n} K \frac{(X - X_j)}{C(n)}$$

se tiene que $\hat{\theta}_n$ es asintóticamente óptimo.