COMUNICACIONES A LA ACADEMIA
presentadas en las sesiones Científicas celebradas en las fechas que se indican.

UN CRITERIO DE CORRESPONDENCIA ENTRE LAS MEDIDAS CILINDRICAS Y LAS MEDIDAS DE RADON DE TIPO ($\mathcal{H}$) (*)

Pedro Jiménez Guerra
Departamento de Teoría de Funciones. Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense. Madrid

First in this work it's extended for Radon measures of type ($\mathcal{H}$), the result know for Radon measures, which states the continuity of the map $T \longrightarrow T\mu$ from the space $\mathcal{L}$ (E, μ, F) with the topology of convergence in measure, into the space of Radon measures on E, endowed with the narrow topology. Afterwards it's proved that given a cylindrical measure in a real locally convex Hausdorff space E, whose topology is σ (E, E′), then there exists a Radon measure ν on E, of a certain type ($\mathcal{H}$), such that μ comes from ν.

1. LEMA.—*Sea F un espacio uniforme y sea μ una medida de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) sobre F. Si A es un subconjunto μ-medible y μ-compacto de F, y $\varnothing$ una función real y continua definida en F. Entonces, dados $\delta_1, \delta_2 > 0$ existen una uniformidad abierta y simétrica U de F y un conjunto μ-medible (o de Borel o cerrado) $B \subset A$, tales que $\mu\,(A - B) \leqslant \delta_2$ y*

$$|\varnothing(x) - \varnothing(y)| \leqslant \delta_1 \tag{1.1}$$

para todo $x \in B$ *e* $y \in F$ *tales que* $(x, y) \in U$.

DEMOSTRACIÓN.—En efecto, para cada $a \in A$ existe una uniformidad, simétrica y abierta U_a de F tal que si $(x, a) \in U_a$ e $(y, a) \in U_a$ entonces

$$|\varnothing(x) - \varnothing(y)| \leqslant \delta_1.$$

(*) Comunicación presentada en la sesión celebrada el 5 de diciembre de 1979.

Sea U'_a una uniformidad simétrica y abierta de F tal que

$$U'_a \cdot U'_a \subset U_a.$$

Como los entornos $U'_a(a)$ recubren al conjunto A, existe por ser A μ-compacto, un número finito de elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$\mu\,(A - \bigcup_{i=1}^{n} U'_{a_i}(a_i)) \leqslant \delta_2.$$

Sean $B = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} U'_{a_i}(a_i)$ y U una uniformidad abierta y simétrica de F que verifica $U \subset \bigcap_{i=1}^{n} U'_{a_i}$. Se comprueba inmediatamente que B y U verifican las condiciones del teorema.

2. TEOREMA.—*Sea E un espacio topológico, μ una medida de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) sobre E finita y F un espacio uniforme. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en el espacio $\mathcal{L}(E, \mu, F)$ de las aplicaciones μ-medibles de E en F, que converge en medida a $T_0 \in \mathcal{L}(E, \mu, F)$, entonces el filtro $\int_E \varnothing \circ T\, d\mu$ ($T \in \mathcal{F}$) converge a $\int_E \varnothing \circ T_0\, d\mu$ para toda aplicación $\varnothing : F \longrightarrow \mathcal{R}$ continua y acotada* (*).

DEMOSTRACIÓN.—Dado $\varepsilon > 0$ existe $H' \in \mathcal{H}'_{T_0}$ (siendo $\mathcal{H}'_{T_0}$ la clase de los subconjuntos cerrados H' de F de medida

$$T_0\,\mu\,(H') = \mu\,(T_0^{-1}(H')) < +\infty,$$

que son imagen por T_0 de algún $H \in \mathcal{H}$ (ver el teorema 83 de [3])) tal que $T_0\,\mu\,(H') \geqslant 1 - \varepsilon/7$ (supuesto que $\mu\,(E) = 1$). Sea $\varnothing : F \longrightarrow \mathcal{R}$ una función continua y acotada (que suponemos con $\|\varnothing\|_\infty = 1$) y sean $\delta_1 = \delta_2 = \varepsilon/7$. Del lema 1 se deduce la existencia de un conjunto de Borel B y de una uniformidad abierta y simétrica U de F tales que $B \subset H'$, $T_0\,\mu\,(H' - B) \leqslant \delta_2$ y se verifica (1.1) para todo $x \in B$ e $y \in F$ tales que $(x, y) \in U$. Por hipótesis existe $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ de forma que si denotamos por A_T al conjunto

$$\{x \in E : (T(x), T_0(x)) \notin U\}$$

entonces $\mu^* (A_T) < \varepsilon/7$ para toda aplicación $T \in \mathcal{E}$.

(*) Dar este teorema nos ha sido sugerido por B. Rodríguez-Salinas.

Sea $T \in \mathcal{E}$, entonces

$$\left| \int_E \emptyset \circ T \, d\mu - \int_E \emptyset \circ T_0 \, d\mu \right| \leqslant \int_E | \emptyset \circ T - \emptyset \circ T_0 | \, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \int_{E - T_0^{-1}(H')} | \emptyset \circ T - \emptyset \circ T_0 | \, d\mu + \int_{T_0^{-1}(H' - B)} | \emptyset \circ T - \emptyset \circ T_0 | \, d\mu +$$
$$+ \int_{A_1} | \emptyset \circ T - \emptyset \circ T_0 | \, d\mu + \int_{A_2} | \emptyset \circ T - \emptyset \circ T_0 | \, d\mu \leqslant \epsilon,$$

siendo

$$A_1 = \{ x \in E : T_0(x) \in B \quad y \quad (T(x), T_0(x)) \notin U \}$$

y

$$A_2 = \{ x \in E : T_0(x) \in B \quad y \quad (T(x), T_0(x)) \in U \}.$$

3. TEOREMA.—*Sea E un espacio localmente convexo separado sobre* $\mathbb{R}$, *tal que su topología coincide con la débil* $\sigma(E, E')$ *y* μ ($= (\mu_F)$) *una medida cilíndrica de E. Entonces existe una medida de Radon* ν *en E, de un cierto tipo* ($\mathcal{H}$) *tal que* $\pi_F(\nu) = \mu_F$, *para todo subespacio cerrado F de E, de codimensión finita (siendo* π_F *la proyección canónica de E en E/F).*

DEMOSTRACIÓN.—Denotemos por $\mathcal{F}$ a la familia de los subespacios cerrados de E, de codimensión finita y por E_1 al límite proyectivo del sistema $(E/F, \pi_{F,G})$ $(F \in \mathcal{F})$ (siendo $\pi_{F,G} : E/G \longrightarrow E/F$ la aplicación canónica con $F, G \in \mathcal{F}$ y $G \subset F$). Representemos por φ_F $(F \in \mathcal{F})$ las proyecciones de E_1 en E/F y consideremos las familias $\mathcal{H}_1$, formada por todas las uniones finitas de cilindros de base un subconjunto compacto (es decir, $H \in \mathcal{H}_1$ cuando existen un número finito $F_1, \ldots, F_n$ de subespacios de $\mathcal{F}$ y K_i, subconjunto compacto de E/F_i $(i = 1, \ldots, n)$ de forma que

$$H = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_{F_i}^{-1}(K_i)$$

y la familia $\mathcal{H}'_1$ de todos los subconjuntos cerrados de E_1 contenidos en algún $H \in \mathcal{H}_1$.

Evidentemente, si

$$H = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_{F_i}^{-1}(k_i) \in \mathcal{H}_1,$$

para todo $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset G = \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ se tiene que

$$\varphi_G(H) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_G \varphi_{F_i}^{-1}(K_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_{F_i G}^{-1}(K_i)$$

y

$$\varphi_F(H) = \varphi_{GF}^{-1} \varphi_G(H)$$

es cerrado en E/F. Además,

$$\lim_{\mathcal{F}} \mu_F^{\bullet} (\varphi_F \varphi_{F_i}^{-1}(K_i)) \leqslant \sup_{G \subset F_i} \mu^{\bullet} (\varphi_G \varphi_{F_i}^{-1}(K_i)) = \mu_{F_i}(K_i) < +\infty$$

para todo $F_i \in \mathcal{F}$ y todo subconjunto compacto $K_i \subset E/F_i$.

Por otra parte, $\varphi_F^{-1}(K)$ es λ-compacto para todo $F \in \mathcal{F}$ y todo subconjunto compacto $K \subset E/F$, siendo

$$\lambda(X) = \lim_{\mathcal{F}} \mu_G^{\bullet} (\varphi_G(X))$$

para $X \in \mathcal{P}(E_1)$, ya que si $(G_i)_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de $\varphi_F^{-1}(K)$ (se puede suponer sin pérdida de generalidad que G_i es de la forma $\varphi_F^{-1}(U_i)$, con $F_i \in \mathcal{F}$ y U_i abierto en E/F_i), entonces

$$K \subset \bigcup_{i \in I} \varphi_F(G_i)$$

y, por tanto, existe $I_0 \in I$ finito tal que

$$K \subset \bigcup_{i \in I_0} \varphi_F(G_i)$$

y

$$\mu_G^{\bullet} (\varphi_G (\varphi_F^{-1}(K) - \bigcup_{i \in I_0} \varphi_{F_i}^{-1}(U_i)) = \mu_G^{\bullet} (\varphi_G (\varphi_L^{-1} (\varphi_{FL}^{-1}(K) - \bigcup_{i \in I_0} \varphi_{F_i L}^{-1}(U_i)) = 0$$

para todo $G \in \mathcal{F}$ con $G \subset F$, siendo

$$L = F \cap (\bigcap_{i \in I_0} F_i).$$

Por consiguiente del teorema 105 de [3], se obtiene fácilmente el resultado, teniendo en cuenta que en este caso el espacio proyectivo (con la topología límite proyectivo) se puede identificar canónicamente a $(E'^*, \sigma(E'^*, E'))$, que es la compleción del espacio $(E, \sigma(E, E'))$. Según resulta fácilmente de lo anterior, la clase $\mathcal{H}$ del enunciado del teorema, es la familia de todos los subconjuntos cerrados de E que están contenidos en alguna unión finita de cilindros $\pi_{E/F}^{-1}(K)$ de base compacta $(F \in \mathcal{F})$.

Referencias

[1] BOURBAKI, N.: *Élements de mathématique, V, Espaces vectoriels topologiques*. Hermann, Paris (1953, 1955, 1966).

[2] CHOQUET, G.: *Lectures on Analysis*, vol. II. Benjamin. Inc., New York (1969).

[3] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. y JIMÉNEZ GUERRA, P.: *Medidas de Radon de tipo ($\mathcal{H}$) en espacios topológicos arbitrarios*. «Mem. R. Acad. Ci. Madrid», t. X (1979).

[4] SCHAEFER, H. H.: *Espacios vectoriales topológicos*. Teide, Barcelona (1974).

[5] SCHWARTZ, L.: *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*. Oxford Univ. Press (1973).

ESTRUCTURA DE LA MENA DE MERCURIO DE CHOVAR. IDEAS GENESICAS (*)

F. A. Calvo, J. M.ª Guilemany y J. M.ª Gómez de Salazar (1)

Departamento de Metalurgia, Facultad de Ciencias Químicas. Universidad Complutense

The structure of the mercury ore from Chovar (Castellón) is discussed in light of observations by conventional Optical Microscopy, Microradiography, Scanning Electron Microscopy and EDAX microanalysis.

Thus the nature of the major phases (quartz, cinnabar and goethite) and minor phases (potassium silicon aluminate; rutile; zircon; pyrolusite; baryte; psilome-

(*) Presentada en la sesión celebrada el 16 de enero de 1980.

(1) Los resultados de esta investigación forman parte de su tesis doctoral.