ECUACIONES DIFERENCIALES «LIMITING» EN RELACION CON CIERTOS TIPOS DE INESTABILIDAD

Gerardo Rodríguez

Departamento de Ecuaciones Funcionales. Universidad de Granada

Recibido: 5-X-77

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO R. P. ALBERTO DOU

Introducción

Es sabido que el estudio de ciertas propiedades de tipo cualitativo en ecuaciones diferenciales ordinarias no autónomas, viene resuelto de modo satisfactorio en el marco de los movimientos topológicos mediante la adopción de un flujo construido al efecto. Destacan a este respecto los trabajos de Sell (basados originariamente en una idea de Miller) y La Salle quienes, mediante los conceptos de «sistema dinámico skew-producto» y «proceso» respectivamente, proporcionan el marco adecuado para el estudio de las aludidas propiedades en la ecuación $y' = F(t, y)$ bajo el supuesto de que F verifique las condiciones oportunas en un conjunto de la forma $[0, \infty) \times W$ (siendo W un abierto de R^n). Precisamente, este último hecho resulta ser decisivo en las antedichas construcciones, pues el suponer F definida en un conjunto de esa forma facilita la construcción de un espacio de funciones $\mathcal{F}$ verificando la condición esencial de ser invariante mediante el flujo:

$$\sigma : (F, \tau) \in \mathcal{F} \times R^+ \rightarrow \sigma(F, \tau) = F_\tau \in \mathcal{F}$$

donde se ha denotado por F_τ la aplicación:

$$F_\tau : (t, y) \in [0, \infty) \times W \rightarrow F_\tau(t, y) = F(t + \tau, y) \in R^n.$$

No obstante, el planteamiento de algunas cuestiones y ejemplos en relación con la inestabilidad (estudiadas en la sección segunda) ha puesto de manifiesto la conveniencia de generalizar la construcción de Sell a situaciones en las que el conjunto de definición de F es de un tipo más general que el aludido con anterioridad. El primer apartado del presente trabajo se dedica a dicha generalización mientras que en el segundo se analiza el papel desempeñado por las ecuaciones difrenciales «limiting» en el estudio de un cierto tipo de inestabilidad. Conviene advertir que, dada la complejidad de este último concepto los resultados aquí expuestos admiten un gran número de variantes que, para simplificar, ha parecido oportuno no detallar.

1. Una generalización del semisistema «skew-product» asociado a una ecuación diferencial no autónoma

Considerando un dominio $D \subset R^{n+1}$, adoptaremos en lo sucesivo las siguientes notaciones:

$$H_\tau = \{y \in R^n \mid (\tau, y) \in D\}$$

$$\tilde{D}_\tau = D \cap \{(t, y) \in R^{n+1} \mid t \geq \tau\} = \bigcup_{t \geq \tau} \{(y, y) \mid y \in H_t\}$$

$$D_\tau = \{(t, y) \in R^{n+1} \mid (t + \tau, y) \in \tilde{D}_\tau\}$$

$$H_+ = \bigcup_{\tau \geq 0} H_\tau \qquad D_+ = \bigcup_{\tau \geq 0} D_\tau$$

Supongamos que se verifican las siguientes condiciones (en cuyo caso diremos que D es *positivamente expansivo*).

i) Para cada $\tau \geqslant 0$, H_τ es un dominio.

ii) $\tau < \eta \Longrightarrow H_\tau \subset H_\eta$.

iii) Existe una función $\varphi : \tau \in R^+ \longrightarrow \varphi(\tau) \in R^+$ creciente tal que:

$$\varphi(\tau) = \varphi(\eta) \Leftrightarrow H_\tau = H_\eta$$

Cabe hacer, respecto de las anteriores hipótesis, las observaciones siguientes:

1. De ii) se deduce trivialmente que:

$$\tau < \eta \Rightarrow \tilde{D}_\eta \subset \tilde{D}_\tau, \quad D_\tau \subset D_\eta$$

y además

$$D_+ = [0, \infty) \times H_+$$

2. En el supuesto de que se den las condiciones i) y ii), hay casos en los que la existencia de φ viene garantizada de modo trivial; por ejemplo, cuando para cada $\tau \geqslant 0$ H_τ es acotado, basta con tomar la función:

$$\varphi(\tau) = d[\mathcal{F}(H_0), \mathcal{F}(H_\tau)]$$

3. Diremos, utilizando un abuso de lenguaje, que, cuando $\tau < \eta$, se verifica la inclusión:

$$\mathcal{C}(D_\eta, R^n) \subset \mathcal{C}(D_\tau, R^n)$$

4. Sabido es que, en cada espacio $\mathcal{C}(D_\tau, R^n)$, la topología compacto abierta (o de la convergencia uniforme sobre compactos) es metrizable; sea d_τ la mtérica natural introducida en [10].

Considerada la ecuación diferencial

$$y' = F(t, y)$$

diremos (siguiendo las notaciones de Sell) que F es *admisible* cuando $F \in \mathcal{C}(D_0, R^n)$ y además la anterior ecuación diferencial admite solución única pasando por cada punto $(t_0, y_0) \in D_0$, definida en el intervalo $[t_0, \infty)$.

Es evidente que, cuando F es admisible, cada una de las aplicaciones F_τ definida por

$$F_\tau(t, y) = F(t + \tau, y)$$

verifica en D_τ las condiciones i) y ii).

Entonces, si:

$$\gamma^+(F) = \{F_\tau \mid \tau \geqq 0\} \quad \text{y} \quad M = \gamma^+(F) \cup \mathcal{C}(D_+, R^n)$$

asignaremos a cada par $G_1, G_2 \in M$, el número real $\rho(G_1, G_2)$ que vendrá definido, según los casos, del modo siguiente:

a)

$$d_m(F_\tau, F_\eta) + \int_{\varphi(m)}^{\varphi(M)} 2^{-s}\, ds$$

cuando:

$$\begin{cases} G_1 = F_\tau, G_2 = F_\eta \\ m = \min(\tau, \eta), \quad M = \max(\tau, \eta) \end{cases}$$

b)

$$d_\tau (F_\tau, G) + \int_{\varphi(\tau)}^{l} 2^{-s} d s$$

cuando:

$$\begin{cases} G_1 = F_\tau, G_2 = G \in \mathcal{C}(D_+, R^n) \\ \lim\limits_{\eta \to \infty} \varphi(\eta) = l \leq +\infty \end{cases}$$

c) $d_+ (G_1, G_2)$ cuando G_1 y G_2 pertenecen a $\mathcal{C}(D_+, R^n)$.

Aunque no se trata de una métrica, es fácil de comprobar que mediante la relación:

$$\}G_k\{ \to G \Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} \rho (G_k, G) = 0$$

se define una convergencia en M que lo convierte en un espacio de Frechet (véase p. e. [6]) y, como es natural, al referirnos en lo continuidad, compacidad, etc..., entenderemos dichos conceptos en su versión secuencial; con una demostración análoga a la dada en [10] para un resultado similar puede comprobarse:

TEOREMA 1.1.—La aplicación

$$\pi : (G, t) \in M \times R^+ \to \pi(G, t) = G_t \in M$$

define en M un semisistema dinámico (en la notación de [6], un D_2-semisistema dinámico).

TEOREMA 2.1.—Una condición necesaria y suficiente para que el movimiento $\gamma^+ (F)$ sea compacto, es que la aplicación:

$$F : (t, y) \in D_0 \to F(t, y) \in R^n$$

verifique:

i) Para cada $y_0 \in H_+$, la aplicación $t \longrightarrow F(t, y_0)$ es acotada y uniformemente continua en su intervalo maximal de definición.

ii) Para todo $\eta \geqslant 0$ fijado, cada una de las aplicaciones

$$F_\tau : y \in H_\eta \to F_\tau(y) = F(\tau, y) \in R^n$$

es continua, uniformemente respecto de $\tau \geqslant \eta$.

OBSERVACIÓN.—No es difícil de comprobar que las condiciones del anterior teorema son equivalentes a las de que: «F sea acotada y uniformemente continua sobre cada conjunto de la forma $[\tau, \infty) \times K \subset D_0$, siendo $K \subset H_\tau$ compacto».

DEMOSTRACIÓN.—Nos referiremos solamente, y muy brevemente, a la condición suficiente cuya demostración no constituye nada más que una sencilla adaptación del teorema de Ascoli.

Adviértase en primer lugar que la familia $\{F_\tau \mid \tau \geqslant \eta\}$ (es decir, las restricciones de F_τ a D_η) es un conjunto relativamente compacto en $\mathcal{C}(D_\eta, R^n)$.

Tomemos entonces una sucesión $\{\tau_m\} \longrightarrow \infty$ (que podemos suponer monótona creciente) y consideremos la sucesión $\{F_{\tau_m}\}$; teniendo en cuenta la observación anterior, admitirá una subsucesión, sea $\{F\tau^1_m\}$, que además de converger en el espacio de Frechet M a un elemento $F^*_1 \in \mathcal{C}(D_{\tau_1}, R^n)$, puede ser determinada verificando la condición adicional

$$d_{\tau_1}(F_{\tau^1_1}, F_1^*) < 1$$

Existirá análogamente una subsucesión de $\{F\tau^1_m\}$, que denotaremos por $\{F\tau^2_m\}$, convergiendo en $\mathcal{C}(D\tau^1_1, R^n)$ a un elemento F^*_2 y tal que:

$$d_{\tau^1_1}(F_{\tau^2_2}, F_2^*) < 1/2$$

Es claro entonces el procedimiento según el cual es construida una sucesión $\{F\tau^k_k\}$, subsucesión de la de partida, con cada $F\tau^k_k$ definida en $D\tau^{k-1}_{k-1}$ y tal que:

$$d_{\tau^{k-1}_{k-1}}\left(F_{\tau^k_k}, F^*_k\right) < 1/k$$

Evidentemente la aplicación $F^* \in \mathcal{C}(D_+, R^n)$, cuya restricción a $D\tau^{k-1}_{k-1}$ coincide con F^*_k es el límite de una subsucesión de $\{F\tau_m\}^{k-1}$ pues

$$\lim_{k \to \infty} \rho\left(F_{\tau^k_k}, F^*\right) = 0$$

La hipótesis de compacidad del movimiento γ^+ (F) es suficiente, a pesar de la sencillez de la estructura topológica del espacio fase, para asegurar la verificación de dos propiedades que serán decisivas en el apartado siguiente:

1. El conjunto límite positivo

$$L^+(F) = \{F^* \in M \mid \text{Existe } \{\tau_n\} \to \infty \text{ con } \{F_{\tau_n}\} \to F^*\} \subset \mathcal{C}(D_+, R^n)$$

es positivamente invariante (véase [6]).

2. $\lim\limits_{\tau \to \infty} \rho\,(\pi\,(F, \tau), L^+(F)) = 0$ (dem. rutinaria).

Cuando para cada $F^+ \in L^+(F)$ la ecuación diferencial «limiting»

$$y' = F(t, y)$$

admite, por cada punto $(t_0, y_0) \in D_+$, solución única, definida en $[t_0, \infty)$ diremos, como ya es sabido, que F es *regular*; cuando $L^+(F)$ está constituido por un único elemento, diremos que F es *asintótica-mente autónoma.*

Supóngase que F es regular; construimos entonces, para cada $y_0 \in H_+$, el conjunto:

$$E(y_0) = \{(y_0, G) \mid G = F_\tau \quad \text{si} \quad y_0 \in H_\tau\} \cup (y_0, L^+(F)) \qquad (*)$$

y de ahí el

$$E = \bigcup_{y_0 \in H_+} E(y_0)$$

Al definir:

$$\tilde{\rho}\,[(y_1, G_1), (y_2, G_2)] = \| y_1 - y_2 \| + \rho\,(G_1, G_2)$$

para cada par de elementos (y_1, G_1), (y_2, G_2) de E, resulta ser éste un espacio de Frechet y la demostración del siguiente teorema tampoco tiene dificultades.

TEOREMA 3.1.—La aplicación $\pi : E \times R^+ \longrightarrow E$ dada por:

$$\pi\,[(y, G), t] = (\varnothing\,(t, y, G), G_t)$$

(*) Hemos escrito

$$(y_0, L^+(F)) = \{(y_0, G) \mid G \in L^+(F)\}$$

define en E un semisistema dinámico. (Se ha denotado por $\varnothing(t, y, G)$ el valor en t de la solución de $y' = F(t, y)$, verificando las condiciones iniciales $(0, y)$.)

2. Ecuaciones diferenciales «limiting» y algunos tipos de inestabilidad

Sea la ecuación diferencial $y' = F(t, y)$ con F regular en D_0 (que se supone positivamente expansivo) verificando la condición adicional de que $F(t, \theta) = \theta$. Sean

$$\phi(t, \tau, y_0) \quad \text{y} \quad \phi_\tau(t, \tau, y_0)$$

las respectivas soluciones de $y' = F(t, y)$ y de $y' = F_\tau(t, y)$ pasando por (τ, y_0).

DEFINICIÓN 1.2.—Se dirá que la solución nula es *últimamente ε-totalmente inestable* cuando existe $\delta > 0$ tal que:

Para cada $y_0 \in B(\theta, \delta) - \{\theta\}$ existe $\tau(y_0)$ con la condición de que para todo $\tau \geqslant \tau(y_0)$, se verifique la desigualdad

$$\| \varnothing(t, \tau, y_0) \| \geq \varepsilon$$

en algún punto $t = t_1(\tau, y_0) > \tau$.

OBSERVACIONES.—Es evidente que, cuando se da la situación anteriormente definida, podemos suponer que:

$$\text{a)} \quad \| \phi(t, \tau, y_0) \| < \varepsilon \quad \text{para} \quad t \in [\tau, t_1(\tau, y_0)] = I_1$$
$$\text{b)} \quad \| \phi(t, \tau, y_0) \| \geq \varepsilon \quad \text{para} \quad t \in [t_1(\tau, y_0), t_2(\tau, y_0)] = I_2$$

donde denotaremos por $l_1(\tau, y_0)$, $l_2(\tau, y_0)$ las longitudes respectivas de los anteriores intervalos.

Obviamente, si la solución nula es últimamente ε-totalmente inestable, también lo es para $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ y, naturalmente,

$$t_1(\tau, y_0, \tilde{\varepsilon}) \leq t_1(\tau, y_0, \varepsilon), \; t_2(\tau, y_0, \tilde{\varepsilon}) \geq t_2(\tau, y_0, \varepsilon).$$

No obstante, salvo cuando exista peligro de confusión, no se especificará en t_i el número ε al que corresponde.

Cuando la ecuación diferencial es autónoma, la anterior definición sufrirá las consiguientes simplificaciones pudiendo, en ese caso, suprimirse el término «últimamente».

DEFINICIÓN 2.2.—Diremos que la solución θ es *últimamente ε-casi-completamente inestable* cuando además de verificar las condiciones de la definición 1 se tiene:

$$\text{i)} \quad \lim_{\tau\to\infty} \operatorname{Sup} l_1(\tau, y_0) = l(y_0) < +\infty$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{\tau\to\infty} l_2(\tau, y_0) = \infty$$

DEFINICIÓN 3.2.—La solución θ es *últimamente ε-completamente inestable* cuando además de verificar las condiciones de la definición 1 se tiene:

i) $\lim\limits_{\tau\to\infty} \operatorname{Sup} l_1(\tau, y_0) = l(y_0) < +\infty$.

ii) La desigualdad b) es válida en el intervalo $[t_1(\tau, y_0), \infty)$.

Supondremos en lo sucesivo que el movimiento $\gamma^+(F)$ es compacto y que (aunque podrían obtenerse resultados para situaciones más generales) la ecuación es asintóticamente autónoma, con ecuación «limiting» $y' = F^*(y)$ (representaremos sus soluciones por $\emptyset^*$).

TEOREMA 1.2.—La solución trivial de $y' = F^*(y)$ es ε-totalmente inestable si y sólo si:

i) La solución trivial de $y' = F(t, y)$ es últimamente $\tilde{\varepsilon}$-totalmente inestable para todo $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ (a cada $\tilde{\varepsilon}$ corresponde un $\tilde{\delta}$ para el que se da la condición de la definición).

ii) Para cada $y_0 \in B(\theta, \tilde{\delta}) - \{\theta\}$ el conjunto

$$\}t_1(\tau, y_0, \tilde{\varepsilon}) \mid \tau \geq \tau(y_0, \tilde{\varepsilon})\{$$

es relativamente denso en $[\tau(y_0, \tilde{\varepsilon}), \infty)$ con un intervalo de inclusión, sea su longitud $l(y_0)$, independiente de $\tilde{\varepsilon}$.

DEMOSTRACIÓN.—Las condiciones impuestas al principio y el lema de Kamke, nos garantizan que, fijado $J = [0, T)$ y $\eta > 0$, existe $\tau_0 \in R^+$ tal que:

$$\tau \geq \tau_0 \Rightarrow \begin{cases} 1) & \}(t, \emptyset^*(t, 0, y_0)) \mid t \in J\{ \subset D_\tau \\ 2) & \| \emptyset_\tau(t, 0, y_0) - \emptyset^*(t, 0, y_0) \| \leq \eta \quad \forall t \in J \end{cases}$$

con lo cual la demostración del teorema, como seguidamente se pone de manifiesto, no encierra grandes dificultades.

a) Supongamos pues que existe $\delta > 0$ tal que para

$$y_0 \in B(\theta, \delta) - \{\theta\}$$

se verifica:

$$\| \phi (t_1 (y_0), 0, y_0) \| \geq \varepsilon$$

siendo $t_1 (y_0) > 0$.

Puesto que de la desigualdad 2) se deduce la

$$\| \phi^* (t, 0, y_0) \| - \eta \leq \| \phi_\tau (t, 0, y_0) \| \qquad \forall\, t \in J$$

bastaría con haber elegido al principio $T > t_1 (y_0)$ para, de ese modo, obtener el punto:

$$t_1 (\tau, y_0) = \tau + t_1 (y_0) \in [\tau, \tau + T]$$

en el que:

$$\varepsilon - \eta \leq \| \phi_\tau (t_1 (y_0), 0, y_0) \| = \| \phi (t_1 (\tau, y_0), \tau, y_0) \|$$

Los últimos detalles que permiten concluir esta demostración son triviales.

b) Supóngase que se cumple la condición enunciada en el teorema para $y' = F(t, y)$ y tómese $T > l(y_0)$. Entonces, de la desigualdad

$$\| \phi_\tau (t, 0, y_0) \| - \eta \leq \| \phi^* (t, 0, y_0) \|$$

se desprende la existencia de $t_1 (\tau_0, y_0, \bar{\varepsilon}) \in [0, T]$ satisfaciendo:

$$\bar{\varepsilon} - \eta \leq \| \phi^* (t_1 (\tau_0, y_0, \bar{\varepsilon}), 0, y_0) \|$$

y mediante un sencillo razonamiento, al ser $\eta > 0$ y $\bar{\varepsilon} < \varepsilon$ arbitrarios, puede encontrarse entonces un $\bar{t} (y_0) \in [0, T]$ en el que se da la desigualdad:

$$\varepsilon \leq \| \phi^* (\bar{t}, 0, y_0) \|$$

TEOREMA 2.2.—Condición necesaria y suficiente para que la solución trivial de $y' = F^*(y)$ sea ε-completamente inestable, es que dicha solución sea últimamente $\tilde{\varepsilon}$-casi-completamente inestable en la $y' = F(t, y)$ para todo $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$, con $l(y_0)$ independientemente de $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN.—Como es evidente, basta con efectuar algunas consideraciones que hagan válida la demostración del teorema anterior a este caso particular.

a) Debido a la ε-completa inestabilidad en la ecuación $y' = F^*(y)$, la desigualdad:

$$\| \varnothing^*(t, 0, y_0) \| \geq \varepsilon$$

es válida para todo $t \geqslant t_1(y_0)$ y consecuentemente

$$\| \varnothing(\tau + t, \tau y_0) \| \geq \varepsilon - \eta = \tilde{\varepsilon}$$

en el intervalo $[t_1(y_0), T]$. Dado que T puede ser elegido arbitrariamente es muy sencillo el probar que:

$$\text{i)} \quad \lim_{\tau \to \infty} l_2(\tau, y_0, \tilde{\varepsilon}) = \infty,$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{\tau \to \infty} \operatorname{Sup} l_1(\tau, y_0, \tilde{\varepsilon}) \leq t_1(y_0)$$

b) Sean $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\delta}$, $\tilde{\tau}(y_0)$, $l(y_0)$ los elementos que intervienen en la formulación de la condición suficiente del teorema. Como τ_0 (utilizado en la demostración del teorema anterior) puede ser elegido de modo tal que:

$$\tau \geq \tau_0 \Rightarrow \begin{cases} 1) & \{(t, \varnothing^*(t, 0, y_0)) \mid t \in J\} \subset D_\tau \\ 2) & \| \varnothing_\tau(t, 0, y_0) - \varnothing^*(t, 0, y_0) \| \leq \eta \qquad t \in J \\ 3) & J \subset [0, t_2(\tau, y_0, \tilde{\varepsilon})) \\ 4) & t_1(\tau, y_0, \tilde{\varepsilon}) \leq l(y_0) + 1 \end{cases}$$

se obtiene

$$\tilde{\varepsilon} - \eta \leq \| \varnothing^*(t, 0, y_0) \|$$

para

$$t \in [l(y_0) + 1, T]$$

y, puesto que ello es válido para todo $\eta > 0$, $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ y $T > 0$, resulta que:

$$\varepsilon \leq \| \varnothing^*(t, 0, y_0) \|$$

para todo t en $[l(y_0) + 1, \infty)$.

Referencias

[1] ARTSTEIN, ZVI: *Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations*. Notas relativas a las conferencias que sobre Estabilidad de sistemas dinánimos, Teoría y Aplicaciones, ha pronunciado el autor en la Universidad del Estado de Mississippi (agosto de 1975).

[2] BONDI, P., MOAURO, V. y VISENTIN, F.: *Limiting equations in the stability problem*. Nonlinear Analysis, Theory, Metods, Applications. Vol. 1. N.° 2. 1977.

[3] HAHN, W.: *Stability of Motion*. Springer-Verlag, 1967.

[4] HAHN, W.: *Theory and application of Liapunov's direct method*. Prentice-Hall, inc., 1963.

[5] KRASOVSKII, N. N.: *Stability of Motion*. Stanford University Press, 1963.

[6] LA SALLE, J. P.: *Stability theory and invariance principles*. Dynamical Systems. International Symposium; Brown Agosto 12-16. Academic Press, 1976.

[7] MILLER, R. K. y SELL, G. R.: *Topological dynamics and its relation to integral equations and nonautonomous systems*. Idem.

[8] SACKER, R. J.: *Skew-product dynamical systems*. Idem.

[9] SELL, G. R.: *Nonautonomous differential equations and topological dynamics*. «Trans. Amer. Math. Soc.», **127** (1967), 241-283.

[10] SELL, G. R.: *Topological dynamics and ordinary differential equations*. Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies. N.° 33 (1971).