ESPACIOS DE MEDIDAS DE RADON

M. Valdivia

Recibido: 5-XII-79

Given a positive integer n, let V be topological n-dimensional manifold, non compact and countable in the infinity. Let G be the space dual of $\mathcal{C}([0,1])$. In this paper we prove that $\mathcal{M}(V)$, space of Radon measures on V with the strong topology, is isomorphic to G^N.

Dado un entero positivo n, sea V una variedad topológica n-dimensional, no compacta y numerable en el infinito. Sea G el espacio de Banach conjugado de $\mathcal{C}([0,1])$. En este artículo probamos que $\mathcal{M}(V)$, espacio de las medidas de Radon sobre V con la topología fuerte, es isomorfo a G^N.

Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre el cuerpo P de los números reales o de los números complejos. Dados los espacios vectoriales topológicos localmente convexos E y F, escribimos $E \simeq F$ para expresar que E y F son isomorfos. Ponemos $E^{(N)}$ y E^N para la suma directa y el producto topológico, respectivamente, de una infinidad numerable de espacios iguales a E.

Dado un espacio topológico cualquiera M, denotamos por $\mathcal{C}(M)$ el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en M y con valores en P, con la topología compacta abierta. $\mathcal{C}^*(M)$ es el espacio de las funciones continuas y acotadas en M y con valores en P, con la topología de la convergencia uniforme. Obviamente, si M es compacto, $\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}^*(M)$. Si Q es un subconjunto cualquiera de M, ponemos $\mathring{Q}$ para el interior de Q.

El lema siguiente es un afinamiento de un resultado de Borsuk [2], para cuya demostración modificamos un método utilizado por Arens [1].

LEMA.—*Sean A y B dos subconjuntos en un espacio métrico M de manera que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *A es cerrado.*
2. $\mathring{A} \supset B$.
3. $A \sim \mathring{B} \neq \emptyset$.

Entonces existe un operador lineal T de $\mathcal{C}^*(A)$ en $\mathcal{C}^*(M)$ tal que si $f \in \mathcal{C}^*(A)$,

$$\sup \{ |(Tf)(x)| : x \in M \} = \sup \{ | f(x) | : x \in A \},$$

y si $f(x) = 0$ *para* $x \in A \sim B$, *se tiene que* $(Tf)(x) = 0$, *para* $x \in M \sim B$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea d la distancia en M. Para cada $x \in \mathrm{M} \sim \mathrm{A}$ ponemos

$$\mathrm{B}_x = \left\{ z \in \mathrm{M} \sim \mathrm{A} : d(x, z) < \frac{1}{4} d(x, \mathrm{A} \sim \mathring{\mathrm{B}}) \right\}.$$

En el espacio métrico $\mathrm{M} \sim \mathrm{A}$,

$$\{ \mathrm{B}_x : x \in \mathrm{M} \sim \mathrm{A} \}, \tag{1}$$

es un recubrimiento abierto. Puesto que $\mathrm{M} \sim \mathrm{A}$ es paracompacto [4], existe un refinamiento abierto $\mathcal{U}$, localmente finito, de (1).

Para cada $\mathrm{U} \in \mathcal{U}$, elegimos un elemento $x(\mathrm{U})$ en $\mathrm{M} \sim \mathrm{A}$ tal que

$$\mathrm{B}_{x(\mathrm{u})} \supset \mathrm{U},$$

y un elemento $a(\mathrm{U})$ en $\mathrm{A} \sim \mathring{\mathrm{B}}$ de tal forma que

$$d(x(\mathrm{U}), a(\mathrm{U})) \leq \frac{5}{4} d(x(\mathrm{U}), \mathrm{A} \sim \mathring{\mathrm{B}}); \tag{1}$$

sea

$$f_{\mathrm{u}}(x) = d(x, \mathrm{M} \sim \mathrm{U}), \quad x \in \mathrm{M} \sim \mathrm{A},$$

y

$$h(x) = \sum_{U \in \mathcal{U}} f_U(x), \quad x \in M \sim A,$$

entonces

$$\left\{ g_U = \frac{f_U}{h} : U \in \mathcal{U} \right\}$$

es una partición continua de la unidad en $M \sim A$.

Ponemos, para cada f de $\mathcal{C}^*(A)$,

$$(Tf)(x) = \begin{cases} \sum_{U \in \mathcal{U}} f(a(U))\, g_U(x), & x \in M \sim A \\ f(x), & x \in A. \end{cases}$$

Veamos primero que Tf es un elemento de $\mathcal{C}(M)$. Si $z \in M \sim A$, existe un entorno V de z, $V \subset M \sim A$, tal que

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} f(a(U))\, g_U,$$

se reduce a una suma finita en dicho entorno, de donde se deduce, teniendo en cuenta la continuidad de g_U en V, que Tf es continua en z. Si $z \in A$ y existe un entorno de z contenido en A, Tf coincide con f en dicho entorno, de aquí que Tf sea continua en z. Si $z \in A$ y cada entorno de z corta a $M \sim A$, se tiene que $z \in A \sim \overset{\circ}{B}$; dado un $\varepsilon > 0$, hallamos un $\delta > 0$ tal que si $u \in A$ y $d(z, u) < \delta$, entonces

$$|f(z) - f(u)| < \varepsilon;$$

sea W un entorno de z que verifique:

$$d(z, x) < \frac{\delta}{3}, \quad \text{si} \quad x \in W.$$

Dado un x en W pueden ocurrir los dos casos siguientes:

1) $x \in A$. Entonces:

$$|(Tf)(z) - (Tf)(x)| = |f(z) - f(x)| < \varepsilon,$$

2. $x \in M \sim A$. Si $U \in \mathcal{U}$ y $x \notin U$, se tiene que $g_U(x) = 0$, y si $x \in U$, resulta que $x \in B_{x(U)}$, por lo que

$$d(z, a(U)) \leq d(z, x) + d(x, a(U)) \leq d(z, x) + d(x, x(U)) + d(x(U)), a(U)) \leq$$

$$\leq d(z, x) + \frac{1}{4} d(x(U), A \sim \mathring{B}) + \frac{5}{4} d(x(U), A \sim \mathring{B}) = d(z, x) +$$

$$+ \frac{3}{2} d(x(U), A \sim \mathring{B}), \quad d(x(U), A \sim \mathring{B}) \leq d(x(U), z) \leq d(x(U), x) + d(x, z) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} d(x(U), A \sim \mathring{B}) + d(x, z),$$

de aquí que

$$\frac{4}{3} d(x, z) \geq d(x(U), A \sim \mathring{B}),$$

y, por tanto,

$$d(z, a(U)) \leq d(z, x) + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} d(x, z) = 3\, d(z, x) < \delta,$$

por lo que

$$|f(z) - f(a(U))| < \varepsilon.$$

Entonces,

$$|(Tf)(x) - (Tf)(z)| = \Big| \sum_{U \in \mathcal{U}} f(a\, U))\, g_U(x) - f(z) \sum_{U \in \mathcal{U}} g_U(x) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{U \in \mathcal{U}} |f(a(U)) - f(z)|\, g_U(x) \leq \varepsilon \sum_{U \in \mathcal{U}} g_U(x) = \varepsilon.$$

Por consiguiente, Tf es continua en z. Luego $Tf \in \mathcal{C}(M)$. Obviamente, T es lineal y

$$|(Tf)(x)| = |f(x), \quad \text{si} \quad x \in A,$$

$$|(Tf)(x)| = \Big| \sum_{U \in \mathcal{U}} f(a(U))\, g_U(x) \Big| \leq \sup \{ |f(V)| : V \in A \} . \ x \in M \sim A,.$$

de aquí que $f \in \mathcal{C}^* (M)$ y

$$\sup \{ |(Tf)(x)| : x \in M \} = \sup \{ |f(x)| : x \in A \} .$$

Finalmente, si $f(x) = 0$ para $x \in A \sim B$, se tiene que $f(a(U)) = 0$, $U \in \mathcal{U}$, de aquí que

$$(Tf)(x) = \sum_{U \in \mathcal{U}} f\, a(U))\, g_U(x) = 0, \quad \text{si} \quad x \in M \sim A.$$

En todo lo que sigue, X es un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y que posee una sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de compactos metrizables tales que

1) $K_1 = \varnothing$.
2) El conjunto $K_{n+1} \sim K_n$ no es numerable, $n = 1, 2, \ldots$
3) $\mathring{K}_{n+1} \supset K_n$.
4) $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$.

$\mathcal{H}(X)$ es el espacio vectorial de las funciones continuas y de soporte compacto, definidas en X y con valores en P, dotado de la topología ordinaria de límite inductivo. $\mathcal{M}(X)$ es el espacio vectorial de las medidas de Radon sobre X, P-valoradas, es decir, $\mathcal{M}(X)$ es el dual topológico de $\mathcal{H}(X)$. A dicho espacio de medidas de Radon le suponemos dotado de la topología fuerte. G es el espacio de Banach conjugado de $\mathcal{C}([0, 1])$.

Denotamos por E_n el subespacio de $\mathcal{C}(K_{2n+1})$ formado por aquellas funciones que se anulan en K_{2n-1} $n = 1, 2, \ldots$ Necesitaremos el siguiente resultado [5]: a) *Para cada entero positivo* n, *el espacio* E_n *es isomorfo a* $\mathcal{C}([0, 1])$.

Para cada entero positivo n construimos una función continua φ_n en X, valorada en $[0, 1]$, que toma el valor uno en K_{2n+1} y el valor cero en $X \sim K_{2n+2}$. Aplicamos el lema anterior y obtenemos un operador S_n de $\mathcal{C}(K_{2n+1})$ en $\mathcal{C}(K_{2n+3})$ con las propiedades enunciadas en dicho lema, siendo

$$M = K_{2n+3}, \quad A = K_{2n+1} \quad \text{y} \quad B = K_{2n} .$$

Sea T_n el operador lineal y continuo de $\mathcal{C}(K_{2n+1})$ en $\mathcal{H}(X)$ tal que, si $f \in \mathcal{C}(K_{2n+1})$,

$$(T_n f)(x) = \begin{cases} \varphi_n(x)(S_n f)(x), & x \in K_{2n+3} \\ 0, & x \in X \sim K_{2n+3} \end{cases}$$

Teorema 1.—*El espacio $\mathcal{H}(X)$ es isomorfo a* $\mathcal{C}([0,1])^{(N)}$.

Demostración.—Dada la función f de $\mathcal{H}(X)$, sea f_1 la restricción a K_3 y sea f_{n+1} la restricción de

$$f - T_1 f_1 - T_2 f_2 - \ldots - T_n f_n, \tag{2}$$

a K_{2n+3}, $n = 1, 2, \ldots$ La función $f - T_1 f_1$ de $\mathcal{H}(X)$ se anula en K_3 y, por tanto, está en E_2. En general, (2) está en $\mathcal{H}(X)$ y se anula en K_{2n+1}, por lo que f_{n+1} pertenece a E_{n+1}.

La aplicación φ de $\mathcal{H}(X)$ en $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ definida por

$$\varphi : f \longrightarrow (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots),$$

es, evidentemente, lineal, inyectiva y continua.

Si $f \in \mathcal{H}(X)$, podemos hallar un entero positivo n_0 tal que f tiene su soporte en K_{2n_0+2}. Por otra parte, $T_n f_n$ se anula en $X \sim K_{2n+2}$, por lo que

$$f - T_1 f_1 - T_2 f_2 - \ldots - T_{n_0} f_{n_0},$$

tiene su suporte en K_{2n_0+2}. Por consiguiente, f_{n_0+1} se anula en $K_{2n_0+3} \sim K_{2n_0+2}$, de aquí que

$$(T_{n_0+1} f_{n_0+1})(x) = 0, \quad \text{si} \quad x \in X \sim K_{2n_0+2}.$$

Entonces,

$$f - T_1 f_1 - T_2 f_2 - \ldots - T_{n_0} f_{n_0} - T_{n_0+1} f_{n_0+1} = 0,$$

luego

$$f_n = 0, \quad n = n_0 + 2, \; n_0 + 3, \ldots,$$

es decir,

$$\varphi(f) \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n .$$

Puesto que la topología de $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n$ es más fina que la inducida en este espacio por la de $\prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n$, resulta que la aplicación Z de $\mathcal{H}$ (X) en $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n$, definida por

$$\mathrm{Z} : f \longrightarrow (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots),$$

es lineal, inyectiva y tiene su gráfica cerrada. Veamos ahora que Z es suprayectiva. Tomamos un elemento

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots) \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n .$$

y ponemos

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{T}_n g_n .$$

Es inmediato que g pertenece a $\mathcal{H}$ (X). Por otra parte, $\mathrm{T}_n g_n$ se anula en K_{2p-1} para $n \geqslant p$, $p = 1, 2, \ldots$, de aquí que la restricción de g a K_3 coincide con g_1, la restricción de $g - \mathrm{T}_1 g_1$ a K_5 coincide con g_2 y, en general, la restricción de

$$g - \mathrm{T}_1 g_1 - \mathrm{T}_2 g_2 - \ldots - \mathrm{T}_n g_n ,$$

a K_{2n+3} es igual a g_{n+1}. Luego

$$\varphi(g) = (g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots) .$$

Finalmente, puesto que $\mathcal{H}$ (X) es un espacio (L F) y, de acuerdo con el resultado a),

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n \simeq \mathcal{C}([0, 1])^{(\mathrm{N})},$$

se aplica el teorema de la gráfica cerrada para espacios (LF) [3], y se obtiene que

$$\mathcal{H}(X) \simeq \mathcal{C}([0, 1])^{(N)}. \tag{3}$$

c. q. d.

Corolario 1.1.—*Dado un entero positivo* n, *sea* V *una variedad topológica* n-*dimensional, no compacta y numerable en el infinito. Entonces*

$$\mathcal{H}(V) \simeq \mathcal{C}([0, 1])^{(N)}.$$

Corolario 2.1.—*Dado un entero positivo* n, *sea* Ω *un abierto no vacío del espacio euclídeo* n-*dimensional* R^n. *Entonces*

$$\mathcal{H}(\Omega) \simeq \mathcal{C}([0, 1])^{(N)}.$$

Teorema 2.—*El espacio* $\mathcal{M}(X)$ *es isomorfo a* G^N.

Demostración.—Basta tomar en (3) los duales fuertes, c. q. d.

Corolario 2.1.—*Dado un entero positivo* n, *sea* V *una variedad topológica* n-*dimensional, no compacta y numerable en el infinito. Entonces*

$$\mathcal{M}(V) \simeq G^N.$$

Corolario 2.2.—*Dado un entero positivo* n, *sea* Ω *un abierto no vacío del espacio euclídeo* n-*dimensional* R^n. *Entonces*

$$\mathcal{M}(\Omega) \simeq G^N.$$

Bibliografía

[1] Arens, R.: *Extensions of functions on fully normal spaces.* «Pacific J. Math.», **2**, 11-22 (1952).
[2] Borsuk, K.: *Über isomorphie der Funktionalräume.* «Bull. Inst. Acad. Pol. Sci.», 1-10 (1933).
[3] Grothendieck, A.: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* «Mém. Amer. Math. Soc.», n.° 16 (1955).
[4] Stone, A. H.: *Paracompactness and product spaces.* «Bull. Amer. Math. Soc.», **54**, 969-977 (1948).