LA PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM, σ-DENTABILIDAD Y MARTINGALAS EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 7-XI-79

In this work it is given a definition for the Radon-Nikodym property in locally convex spaces which coincides with the definition already known for Banach spaces. The fundamental theorems relative to σ-dentability and martingales are extended for the quasi-complet spaces with the P. R. N. according to this definition.

En este trabajo se da una definición para la propiedad de Radon-Nikodym en espacios localmente convexos que coincide con la ya conocida para espacios de Banach. Para los espacios casi completos con la P. R. N. según esta definición se extienden los teoremas fundamentales relativos a la σ-dentabilidad y a las martingalas.

§ 1. El teorema de Radon-Nikodym para la integral de Grothendieck

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito que supondremos completo para asegurar la existencia de un lifting ρ sobre el álgebra $\mathcal{L}^{\infty}_{\mathbb{K}}$ de las funciones reales o complejas medibles acotadas. (Véase A. y C. Ionescu Tulcea [12], 43-53. Sea E un e. l. c. que supondremos siempre Hausdorff.

Ahora vamos a exponer algunas definiciones dadas en Rodríguez-Salinas [16] y [17].

1. Definición.—Sea E un e. l. c. polar semi-reflexivo. Una función $f\colon \Omega \longrightarrow E$ se dice *simple* y se escribe $f \in S(\Sigma, E)$ si es límite uniforme de una red de funciones simples ordinarias (de clase 0). Una función f se dice μ-*medible* y se escribe $f \in M(\Sigma, \mu, E)$ si, para

cada $\varepsilon > 0$, existe $K \in \Sigma$ tal que $\mu(\Omega \setminus K) < \varepsilon$ y $f\chi_K \in S(\Sigma, E)$, siendo χ_K la función característica de K. Una función f se dice $\bar{\mu}$-*medible* y se escribe $f \in \overline{M}(\Sigma, \mu, E)$ si es límite uniforme de una red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones μ-medibles $f_i \in M(\Sigma, \mu, E)$. Una función f se dice μ-*integrable* y se escribe $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$ si es μ-medible e integrable Pettis. Una función f se dice $\bar{\mu}$-*integrable* o integrable Grothendieck y se escribe $f \in \bar{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E)$ (véase [17]) si f es límite uniforme de una red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones $f_i \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$ y, para cada $A \in \Sigma$, existe el límite

$$\lim_i \int_A f_i \, d\mu = \int_A f \, d\mu \in E.$$

Una función f se dice *absolutamente* μ-*integrable* y se escribe $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, E)$ si es μ-integrable y $p \circ f$ es integrable para toda seminorma continua p sobre E. Esta condición equivale a que cada p-variación $|m_f|_p$ sea finita, siendo

$$m_f(A) = \int_A f \, d\mu,$$

para $A \in \Sigma$. De manera análoga, se define la $\bar{\mu}$-*integrabilidad absoluta* y $\bar{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E)$.

Sea E un e. l. c. casi completo. Una función $f: \Omega \longrightarrow E$ se dice $\tilde{\mu}$-*medible* y se escribe

$$f \in \tilde{M}(\Sigma, \mu, E) \quad \text{si} \quad f \in \overline{M}(\Sigma, \mu, E),$$

y, para cada $\varepsilon > 0$, existe $K \in \Sigma$ tal que $\mu(\Omega \setminus K) < \varepsilon$ y $f(K)$ es débilmente relativamente compacto. Una función f se dice $\tilde{\mu}$-*integrable* y se escribe

$$f \in \tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E) \quad \text{si} \quad f \in \bar{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E) \cap \tilde{M}(\Sigma, \mu, E).$$

Una función f se dice *absolutamente* $\tilde{\mu}$-*integrable* y se escribe

$$f \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E) \quad \text{si} \quad f \in \bar{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E) \cap \tilde{M}(\Sigma, \mu, E).$$

2. Definición.—Un subconjunto A de E se dice *dentable* si, para cada entorno U de 0 en E, existe $x \in A$ tal que

$$x \notin \overline{co}\,(A \setminus (x + U)),$$

donde $\overline{co}$ X es la envoltura convexa y cerrada de $X \subset E$. Un subconjunto A de E se dice *σ-dentable* si, para cada entorno U de 0 en E, existe $x \in A$ tal que

$$x \notin \sigma\,(A \setminus (x + U)),$$

siendo σ (X) el conjunto de las sumas convergentes

$$\sum_{1}^{\infty} \lambda_n x_n$$

con $x_n \in X$ y números reales $\lambda_n > 0$ tales que

$$\sum_{1}^{\infty} \lambda_n = 1.$$

3. Proposición.

3.1. *Si $\overline{co}$ (A) es dentable, entonces A es dentable.*

3.2. *Si A es un conjunto no dentable, existe un entorno U de 0 en E tal que $A \subset \overline{co}\,(A \setminus (x + U))$.*

3.3. *Si A y B son subconjuntos de E y A + B es dentable, también lo son A y B.*

Demostración.—Se puede proceder como para los espacios de Banach.

Sea $m\colon \Sigma \longrightarrow E$ *una medida vectorial y*

$$A\,(H) = A_H\,(m) = \left\{ \frac{m\,(A)}{\mu\,(A)} : H \supset A \in \Sigma^+ \right\},$$

para $H \in \Sigma^+$, siendo

$$\Sigma^+ = \{ A \in \Sigma : \mu(A) > 0 \}.$$

4. Definición.—Una función f: $\Omega \longrightarrow E$ se dice (m, μ)-*encajada* si m es μ-continua y, para cada p-bola cerrada $x + U$ que contenga a A (H) con $H \in \Sigma^+$, se tiene

$$f(t) \in x + U,$$

para casi todo $t \in H$, siendo p una seminorma continua sobre E y $U = \{x \in E : p(x) \leqslant 1\}$.

5. Poposición.—*Si E es un e. l. c. polar semi-reflexivo, toda función* $f \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E)$ *está* (m, μ)-*encajada para* $m = m_f$.

Demostración.—En efecto, si

$$f \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E)$$

y

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in x + U,$$

para todo $A \in \Sigma^+_H$ y $H \in \Sigma^+$, siendo U un entorno absolutamente convexo y cerrado de 0 en E, se tiene

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A \pi_U \circ f \, d\mu \in \pi_U(x + U),$$

siendo π_U la aplicación canónica $E \longrightarrow E_U$ y, por tanto,

$$\pi_U \circ f(t) \in \pi_U(x + U),$$

y

$$f(t) \subset x + U,$$

para casi todo $t \in H$ y, por consiguiente, f está (m, μ)-encajada para $m = m_f$.

6. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. casi completo,* m: $\Sigma \longrightarrow E$ *una medida* μ*-continua, U un entorno absolutamente convexo y cerrado de 0 en E y π_U la aplicación canónica $E \longrightarrow E_U$. Entonces cada una de las siguientes condiciones implica la siguiente:*

6.1. *Para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ tal que $T \subset S$ y A_T* (m) *es relativamente compacto.*

6.2. *Para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ tal que $T \subset S$ y A_T* (m) *es débilmente relativamente compacto.*

6.3. *Para todo U y para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ tal que $T \subset S$ y*

$$\pi_U \circ A_T(\mathrm{m}) = A_T(\pi_U \circ \mathrm{m}),$$

es dentable.

6.4. *Para todo U y para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ tal que $T \subset S$ y*

$$\pi_U \circ A_T(\mathrm{m}) = A_T(\pi_U \circ \mathrm{m}),$$

es σ*-dentable.*

6.5. *Para todo U y para todo $S \in \Sigma^+$ existe $T \in \Sigma^+$ y* $\mathrm{x} \in E$ *tales que $T \subset S$ y*

$$A_T(\mathrm{m}) \subset \mathrm{x} + U.$$

6.6. *Si* f *es una función* (m, μ)*-encajada, se tiene*

$$\mathrm{f} \in \bar{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E) \quad y \quad \mathrm{m} = \mathrm{m}_{\mathrm{f}}.$$

DEMOSTRACIÓN.

6.1 $\Longrightarrow$ 6.2. Evidente.

6.2 $\Longrightarrow$ 6.3. En efecto, si $A_T(m)$ es débilmente relativamente compacto,

$$\pi_U \circ A_T(m) = A_T(\pi_U \circ m),$$

es débilmente relativamente compacto. Entonces, como $\hat{E}_U$ es un espacio de Banach, $\pi_U \circ A_T(m)$ es dentable.

6.3 $\Longrightarrow$ 6.4. Evidente.

6.4 $\Longrightarrow$ 6.5. En efecto, si

$$\pi_U \circ A_S(m) = A_S(\pi_U \circ m) \subset \hat{E}_U$$

es σ-dentable y $\tilde{U} = \pi_U(U)$, existe

$$\tilde{x} = \pi_U(x) \in E_U \quad y \quad T \in \Sigma^+$$

tales que

$$T \subset S \quad y \quad A_T(\pi_U \circ m) \subset \tilde{x} + U,$$

entonces $A_T(m) \subset x + U$.

6.5 $\Longrightarrow$ 6.6. Por el axioma de Zorn, para cada U existe una familia maximal $(S_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos $S_i \in \Sigma^+$ y una familia $(y_i)_{i \in I}$ de elementos $y_i \in E$ tales que $A(S_i) \subset y_i + U$ para todo $i \in I$. Esta familia es, evidentemente, contable y entonces por la maximalidad de ella se tiene

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_i S_i\right) = 0.$$

Por ser f una función (m, μ)-encajada existe $T_i \subset S_i$ tal que

$$\mu(S_i \setminus T_i) = 0 \quad y \quad f(t) \in y_i + U,$$

para todo $t \in T_i$. Sea

$$Z = \Omega \setminus \bigcup_i T_i,$$

entonces $\mu(Z) = 0$ y

$$f_p = \sum_{i \in I} \frac{m(T_i)}{\mu(T_i)} \chi_{T_i} + f\chi_Z \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E),$$

según hemos probado en [17], siendo p el funcional de Minkowski de U y χ_A la función característica de A. Además

$$p(f_p(t) - f(t)) \leq 2$$

para todo $t \in \Omega$ puesto que

$$f(T_i) \subset y_i + U \quad \text{y} \quad \frac{m(T_i)}{\mu(T_i)} \in y_i + U.$$

Luego f es límite uniforme de la red $(f_p)_p$. Para terminar basta tener en cuenta que

$$p\left(m(A \cap T_i) - \frac{m(T_i)}{\mu(T_i)} \mu(A \cap T_i)\right) \leq 2\mu(A \cap T_i)$$

para todo $A \in \Sigma$ y todo $i \in I$ y, por tanto, que

$$p\left(m(A) - \int_A f_p \, d\mu\right) \leq 2\mu(A)$$

y

$$\int_A f \, d\mu = \lim_p \int_A f_p \, d\mu = m(A)$$

para todo $A \in \Sigma$.

7. PROPOSICIÓN.

7.1. *Si* f *y* g *son dos funciones* (m, μ)*-encajadas y se verifica 6.5, se tiene* $f \cong g$, *e. d. para toda seminorma continua* p *sobre E se tiene*

$$p(f(t) - g(t)) = 0$$

para casi todo $t \in \Omega$.

7.2. *Si* f *es una función* (m, μ)*-encajada y* $g \cong f$, *entonces* g *es también una función* (m, μ)*-encajada.*

DEMOSTRACIÓN.—7.1. Sea

$$U = \{ x \in E : p(x) \leq 1 \}.$$

De forma análoga que en el teorema 6 se prueba que existe una familia contable $(S_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos $S_i \in \Sigma^+$ y una familia $(y_i)_{i \in I}$ de elementos $y_i \in E$ tales que $A(S_i) \subset y_i + U$ para todo

$$i \in I \quad \text{y} \quad \mu\left(\Omega \setminus \bigcup_i S_i\right) = 0.$$

Entonces, como

$$f(t) \in y_i + \mathrm{U}, \quad g(t) \in y_i + \mathrm{U}$$

para casi todo $t \in \mathrm{S}_i$ ($i \in \mathrm{I}$), se tiene

$$p(f(t) - g(t)) \leq 2$$

para casi todo $t \in \Omega$. Sustituyendo p por $2\,n\,p$ resulta igualmente

$$p(f(t) - g(t)) \leq \frac{1}{n}$$

para casi todo $t \in \Omega$ y todo $n \in \mathbf{N}$ y, por consiguiente,

$$p(f(t) - g(t)) = 0$$

para casi todo $t \in \Omega$.

7.2. Con la misma notación que en 7.1 sea $\mathrm{A}(\mathrm{S}) \subset y + \mathrm{U}$. Entonces

$$f(t) \in y + \mathrm{U}$$

para casi todo $t \in \mathrm{S}$. Como

$$g(t) - f(t) \in \mathrm{U}/n,$$

para casi todo $t \in \Omega$ y todo $n \in \mathbf{N}$, resulta

$$g(t) \in y + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\mathrm{U}$$

para casi todo $t \in \mathrm{S}$ y todo $n \in \mathbf{N}$ y, por consiguiente,

$$g(t) \in y + \mathrm{U}$$

para casi todo $t \in \mathrm{S}$.

8. Definición.—Sea ρ un lifting sobre el álgebra $\mathcal{L}_{\mathrm{K}}^{\infty}$ de las funciones reales o complejas medibles acotadas. (Véase A. y C. Ionescu Tulcea [12], 43-53.) Para este lifting de igual modo que en el teorema 21 de [16] y que en el teorema 14 de [17], se define otro

lifting sobre el conjunto de las funciones acotadas escalarmente medibles $f: \Omega \longrightarrow E$, que también denotaremos por ρ, de forma que $\rho(f): \Omega \longrightarrow E''$ (bidual de E) y

$$< \rho(f), x' > (t) = \rho(< f, x' >)(t)$$

para todo $t \in \Omega$ y todo $x' \in E'$. Entonces

$$\rho(f)(\Omega) \subset \overline{co}\, f(\Omega),$$

siendo $\overline{co}\, f(A)$ la envoltura convexa y cerrada de $f(A)$ en E'' dotado de la topología natural. (Véase Köthe [13], **300.**)

En este trabajo dotaremos siempre a E'' de la topología natural.

9. Proposición.

9.1. *Supongamos que se verifica 6.5. Sea* $f: \Omega \longrightarrow E$ *una función acotada integrable Pettis y* (m, μ)*-encajada para* $m = m_f$. *Entonces para toda seminorma continua* p *sobre* E'' *se tiene*

$$p(\rho(f)(t) - f(t)) = 0$$

para casi todo $t \in \Omega$.

9.2. *Sea* $f: \Omega \longrightarrow E$ *una función acotada integrable Pettis y* $g: \Omega \longrightarrow E$ *una función tal que*

$$p(\rho(f)(t) - g(t)) = 0$$

para casi todo $t \in \Omega$ *y toda seminorma continua* p *sobre* E'', *entonces* g *es* (m, μ)*-encajada para* $m = m_f$.

Demostración.—En primer lugar, de

$$\int_A < f, x' > d\mu = < m(A), x' >,$$

para todo $A \in \Sigma$ y todo $x' \in E'$, se deduce

$$< \rho(f), x' > (S) \subset \overline{x'(A_S(m))} \qquad (x' \in E')$$

y

$$\rho(f)(S) \subset \overline{co}\, A_S(m) \qquad (\subset E'')$$

para todo $S \in \Sigma^+$. Por tanto, $\rho(f)$ es (m, μ)-encajada si se considera $m: \Sigma \longrightarrow E''$. Entonces basta proceder como en la proposición 7.

§ 2. Espacios con la propiedad de Radon-Nikodym

10. DEFINICIÓN.—Se dice que μ es una *medida de control* de una medida vectorial $m: \Sigma \longrightarrow E$ o que *m está controlada* por μ si m es μ-continua y $A_\Omega(m)$ es un conjunto acotado, e. d. si, para toda seminorma continua p sobre E, existe una constante $C_p \geqslant 0$ tal que

$$p(m(A)) \leq C_p\, \mu(A),$$

para todo $A \in \Sigma$.

Un e. l. c. E se dice que tiene la *propiedad de Radon-Nikodym*, en abreviatura P. R. N., si para todo espacio de medida finito (Ω, Σ, μ) y toda medida vectorial $m: \Sigma \longrightarrow E$ controlada por μ existe una función acotada $f \in \bar{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E'')$ tal que

$$m(A) = \int_A f\, d\mu \quad (= m_f(A))$$

para todo $A \in \Sigma$.

11. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. casi completo. Entonces son equivalentes:*

11.1. *E posee la P. R. N.*

11.2. *Toda martingala*

$$(f_i, \Sigma_i)_{i \in I} \quad (\Sigma_i \subset \Sigma)$$

con valores en E, tal que las funciones f_i *están uniformemente acotadas, converge en* $\bar{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E'')$ *a una función acotada* $f: \Omega \longrightarrow E''$.

Además en este caso

$$f \in \bar{\mathcal{L}}^1\left(\sigma\left(\bigcup_i \Sigma_i\right), \mu, E''\right) \quad y \quad E(f, \Sigma_i) = f_i,$$

para todo $i \in I$, *siendo* $\sigma(\mathcal{H})$ *la sub-*σ*-álgebra de* Σ *engendrada por* $\mathcal{H}$ *y* $E(f, \Sigma_i)$ *la esperanza condicional de* f *respecto de* Σ_i.

DEMOSTRACIÓN.

11.1 $\Longrightarrow$ 11.2. Supongamos $p(f_i(t)) \leq C_p$ para casi todo $t \in \Omega$, todo $I \in$ I y toda seminorma continua p sobre E″. Para cada m_i: $\Sigma_i \longrightarrow$ E definida por

$$m_i(A) = \int_A f_i \, d\mu \quad (A \in \Sigma_i),$$

se tiene

$$p(m_i(A)) \leq C_p \, \mu(A),$$

para todo $A \in \Sigma_i$ y, por la definición de martingala, para todo

$$A \in \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \Sigma_i,$$

existe

$$\lim_i m_i(A) = m_0(A).$$

Como, evidentemente,

$$p(m_0(A)) \leq C_p \, \mu(A),$$

por el teorema de extensión de Carathéodory-Hahn-Kluvanek (véase [6], pág. 27) existe una extensión contablemente aditiva

$$m = \overline{m_0} \quad \text{de} \quad m_0 \quad \text{a} \quad \sigma(\mathcal{A}),$$

que satisface también

$$p(m(A)) \leq C_p \, \mu(A).$$

Luego m es una medida vectorial controlada por μ. Entonces, por hipótesis, existe una función acotada

$$f \in \mathcal{L}^1(\sigma(\mathcal{A}), \mu, E''),$$

tal que

$$m(A) = \int_A f \, d\mu$$

para todo $A \in \sigma(\mathscr{H})$. Para cada $A \in \Sigma_i$ se tiene

$$\int_A f_i \, d\mu = m_i(A) = m(A) = \int_A f \, d\mu,$$

luego $f_i = E(f, \Sigma_i)$. Entonces, si

$$\|f\|_1^p = \int_\Omega p(f) \, d\mu \qquad (p(f) = p \circ f)$$

para toda

$$f \in \bar{\mathscr{L}}^1(\Sigma, \mu, E''),$$

resulta según se sabe

$$\lim_i \|f_i - f\|_1^p = 0,$$

para cada seminorma continua p sobre E''.

11.2 $\Longrightarrow$ 11.1. Sea $m: \Sigma \longrightarrow E$ una medida vectorial controlada por μ. Para cada partición finita π ($\in \mathscr{P}$) de Ω en conjuntos de Σ^+ ponemos

$$f_\pi = \sum_{A \in \pi} \frac{m(A)}{\mu(A)} \chi_A .$$

Si $\pi_1 \leqslant \pi_2$, todo $A \in \pi_1$ se puede expresar como unión de elementos de π_2: $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, y por tanto

$$\int_A f_{\pi_2} \, d\mu = \sum_1^n \frac{m(A_i)}{\mu(A_i)} \mu(A_i) = m(A) = \int_A f_{\pi_1} \, d\mu .$$

Como para cada partición $\pi \in \mathscr{P}$, $\sigma(\pi)$ coincide con el álgebra engendrada por π, que a su vez es simplemente la familia de las uniones finitas de elementos de π, resulta que $(f_\pi, \sigma(\pi))_{\pi \in \mathscr{P}}$ es una martingala con valores en E uniformemente acotada, pues $p(f_\pi(t)) \leqslant C_p$ para todo $t \in \Omega$, luego por 11.2 la red $(f_\pi)_{\pi \in \mathscr{P}}$ converge a una función f en

$$\bar{\mathscr{L}}^1(\sigma(\bigcup \pi), \mu, E'') = \bar{\mathscr{L}}^1(\Sigma, \mu, E'').$$

Además

$$m(A) = \lim_{\pi} \int_A f_\pi \, d\mu = \int_A f \, d\mu \quad (= m_f(A))$$

para todo $A \in \Sigma$, puesto que si $\pi_0 = \{A, \Omega \setminus A\}$ se tiene

$$m(A) = \int_A f_\pi \, d\mu,$$

para toda $\pi \geqslant \pi_0$.

12. Corolario.—*Si E es un e. l. c. casi completo que posee la P. R. N. y*

$$\bar{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E) \cap \bar{\mathcal{L}}^\infty(\Sigma, \mu, E),$$

es casi completo para la topología inducida por

$$\bar{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E)$$

y la bornología inducida por

$$\bar{\mathcal{L}}^\infty(\Sigma, \mu, E),$$

dada una medida m: $\Sigma \longrightarrow E$ *controlada por* μ *existe una función acotada*

$$f \in \bar{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E),$$

tal que $m = m_f$.

Demostración.—Es inmediato.

13. Lema.—*Sea A un subconjunto convexo, cerrado, no dentable y con interior no vacío en un e. l. c. E. Entonces existe un entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E tal que*

$$\mathring{A} = co\,(\mathring{A} \setminus (x + U)),$$

para todo $x \in A$.

Demostración.—Procederemos como Davis y Phelps [5]. De 3.2 se deduce que existe un entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E tal que

$$A = \overline{\text{co}}\,(A \setminus (x + U))$$

para todo $x \in A$. Sea

$$x \in A \quad \text{y} \quad B = A \setminus (x + U).$$

Entonces

$$A = \overline{\text{co}}\,(B), \qquad \mathring{B} = (A \cap (x + U)^c)^o = \mathring{A} \setminus (x + U).$$

Por otra parte, $B \subset \overline{\mathring{B}}$. En efecto, sea $y \in B$. Si $z \in \mathring{A}$ $(\neq \emptyset)$ el segmento $[z, y)$ está contenido en $\mathring{A}$ y si $(y_n)_1^\infty$ es una sucesión en $[z, y)$ convergente a y se tiene $y_n \in (x + U)^c$ para $n \geqslant n_0$. Por tanto, y es límite de puntos de

$$\mathring{B} = \mathring{A} \setminus (x + U),$$

es decir $y \in \overline{\mathring{B}}$. Por tanto,

$$B \subset \overline{\mathring{B}} \subset \overline{\text{co}}\,(\mathring{B}),$$

luego

$$\overline{\text{co}}\,(B) \subset \overline{\text{co}}\,(\mathring{B}).$$

Como el interior de un convexo coincide con el interior de su adherencia siempre que dicho interior sea no vacío, se tiene

$$\mathring{A} = (\overline{\text{co}}\,(B))^o \subset (\overline{\text{co}}\,(\mathring{B}))^o = \text{co}\,(\mathring{B}) = \text{co}\,(\mathring{A} \setminus (x + U)).$$

La otra inclusión es evidente.

14. Teorema.—*Sea E un e. l. c. casi completo. Entonces son equivalentes:*

14.1. *E posee la P. R. N.*

14.2. *Toda martingala*

$$(f_i, \Sigma_i)_{i \in I},$$

con valores en E, tal que las funciones f_i *están uniformemente acotadas, es una red de Cauchy en*

$$\bar{\mathcal{L}}^1 (\Sigma, \mu, E).$$

14.3. *Toda martingala*

$$(f_n, \Sigma_n)_{n \in N},$$

con valores en E, tal que las funciones f_n *están uniformemente acotadas, es una sucesión de Cauchy en*

$$\bar{\mathcal{L}}^1 (\Sigma, \mu, E).$$

14.4. *Todo acotado no vacío* $B \subset E$ *es* σ*-dentable.*

14.5. *Para todo acotado contable no vacío* $B \subset E$ *y todo entorno U de 0 en E, existe* $x \in B$ *tal que*

$$x \notin co\,(B \setminus (x + U)).$$

14.6. *Para todo acotado no vacío* $B \subset E$ *y todo entorno U de 0 en E, existe* $x \in B$ *tal que*

$$x \notin \overline{co}\,(B \setminus (x + U)).$$

14.7. *Para todo acotado no vacío* $B \subset E$ *y todo entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E, se tiene que* $\pi_U(B)$ *es dentable, siendo* π_U *la aplicación canónica* $E \longrightarrow \hat{E}_U$.

DEMOSTRACIÓN.

14.1 $\Longrightarrow$ 14.2. Se deduce del teorema 11.

14.2 $\Longrightarrow$ 14.3. Evidente.

14.3 $\Longrightarrow$ 14.4. Procederemos como Huff [10] y Egghe [7]. Si 14.4 no fuese cierta existiría un conjunto acotado no vacío $B \subset E$

y un entorno absolutamente convexo y cerrado U de 0 en E tal que

$$x \in \sigma(B \setminus (x + U))$$

para todo $x \in$ B. Tomemos $x_0 \in$ B. Existe entonces una sucesión de $x_i \in$ B y otra de números reales $\alpha_i > 0$ tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1, \quad x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \quad \text{y} \quad x_i \notin x_0 + U.$$

Sea $I_0 = [0, 1)$ y dividamos I_0 en una sucesión de intervalos semiabiertos y disjuntos I_i tales que

$$\mu(I_i) = \alpha_i \mu(I_0) = \alpha_i,$$

donde μ es la medida de Lebesgue. Cada x_i, a su vez, es tal que existe una sucesión de $x_{ij} \in$ B y otra de números reales $\alpha_{ij} > 0$ que verifican

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} = 1, \quad x_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_{ij} \quad \text{y} \quad x_{ij} \notin x_i + U.$$

Dividamos cada intervalo I_i en una sucesión de intervalos semiabiertos y disjuntos I_{ij} tales que

$$\mu(I_{ij}) = \alpha_{ij} \mu(I_i),$$

y procedamos análogamente. Sea entonces $\Sigma_0 = \{[0, 1)\}$ y, en general, Σ_k la σ-álgebra engendrada por los conjuntos $I_{i_1 \ldots i_k}$ y definamos

$$f_k = \Sigma \chi_{I_{i_1 \ldots i_k}} x_{i_1 \ldots i_k} \qquad (k \geq 1),$$

donde la suma se extiende a todos los índices $i_1 \ldots i_k$. Está claro que

$$p(f_k(t)) \leq \sup \{p(x) : x \in B\} \leq C_p,$$

para todo k, siendo p el funcional de Minkowsky de U. Además, dado

$$I_{i_1 \ldots i_k} \in \Sigma_k,$$

se tiene

$$I_{i_1 \ldots i_k} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{i_1 \ldots i_k j},$$

y

$$\mu (I_{i_1 \ldots i_k j}) = \alpha_{i_1 \ldots i_k j}\, \mu (I_{i_1 \ldots i_k})$$

si

$$x_{i_1 \ldots i_k} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{i_1 \ldots i_k j}\, x_{i_1 \ldots i_k j},$$

luego

$$\int_{I_{i_1 \ldots i_k}} f_{k+1}\, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu (I_{i_1 \ldots i_k j})\, x_{i_1 \ldots i_k j} =$$

$$= \mu (I_{i_1 \ldots i_k}) \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{i_1 \ldots i_k j}\, x_{i_1 \ldots i_k j} =$$

$$= \mu (I_{i_1 \ldots i_k})\, x_{i_1 \ldots i_k} = \int_{I_{i_1 \ldots i_k}} f_k\, d\mu,$$

lo que prueba que $(f_k, \Sigma_k)_{k \in \mathbf{N}}$ es una martingala con valores en E, uniformemente acotada. Sea $t \in [0, 1)$ y supongamos, por ejemplo, que

$$t \in I_{i_1 \ldots i_k j} \subset I_{i_1 \ldots i_k}.$$

Entonces

$$f_k (t) = x_{i_1 \ldots i_k} \quad \text{y} \quad f_{k+1} (t) = x_{i_1 \ldots i_k j},$$

luego

$$p\,(f_{k+1} (t) - f_k (t)) > 1,$$

para cada $t \in I_0$ y cada $k \in \mathbf{N}$. Esto prueba que

$$\| f_{k+1} - f_n \|_1^p = \int_0^1 p\,(f_{n+1} - f_n)\, d\mu \geq 1$$

para cada $n \in \mathbf{N}$ y, por consiguiente, que $(f_n)_1^\infty$ no es de Cauchy en $\bar{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E)$ en contradicción con 14.3.

14.4 $\Longrightarrow$ 14.5. Evidente.

14.5 $\Longrightarrow$ 14.6. Supongamos que 14.6 no fuese cierta. Entonces existe un conjunto acotado no vacío $B \subset E$ y un entorno U de 0 en E tal que

$$x \in \operatorname{co}(B \setminus (x + U))$$

para todo $x \in B$. Sea $x_0 \in B$, entonces x_0 es combinación lineal convexa de elementos de

$$\operatorname{co}(B \setminus (x_0 + U)).$$

Continuando de este modo, se construye un subconjunto contable no vacío B_0 de B, formado por los puntos de B que aparecen en cada una de las combinaciones lineales convexas consideradas. Este conjunto no cumple 14.5, pues por construcción todo $x \in B_0$ es combinación lineal convexa de elementos de

$$\operatorname{co}(B_0 \setminus (x + U)).$$

14.6 $\Longrightarrow$ 14.7. Sea $\tilde{B} = \pi_U(B)$ no dentable y

$$\tilde{D} = [\overline{\operatorname{co}}(\tilde{B} + \tilde{U})]^0 = [\operatorname{co}(\tilde{B} + \tilde{U})]^0,$$

en E_U, donde $\tilde{U} = \pi_U(U)$. Por 3.1 y 3.3, $\overline{\operatorname{co}}(\tilde{B} + \tilde{U})$ es no dentable en E_U, luego por el lema 13 existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\tilde{D} = \operatorname{co}(\tilde{D} \setminus (\tilde{x} + \varepsilon \tilde{U}))$$

para todo $\tilde{x} \in \tilde{D}$. Sea

$$D = [\operatorname{co}(B + U)]^0,$$

entonces

$$\pi_U(D) = [\operatorname{co}(\tilde{B} + \tilde{U})]^0 = \tilde{D},$$

y

$$\begin{aligned} D &= D \cap \pi_U^{-1} [\mathrm{co}\,(\tilde{D} \setminus (\tilde{x} + \varepsilon \tilde{U})) \\ &\subset D \cap \mathrm{co}\,[\pi_U^{-1}(\tilde{D}) \setminus (x + \varepsilon U)] \\ &\subset \mathrm{co}\,(D \setminus (x + \varepsilon U)) \end{aligned}$$

para todo $x \in D$ y $\tilde{x} = \pi_U(x)$, en contradicción con 14.6.

14.7 $\Longrightarrow$ 14.1. Sea $m \colon \Sigma \longrightarrow E$ una medida controlada por μ. Por el teorema de Radon-Nikodym para medidas escalares, para cada $x' \in E'$ existe una función escalar integrable $f_{x'}$ tal que

$$< m(A),\ x' > = \int_A f_{x'}\, d\mu$$

para todo $A \in \Sigma$. Inmediatamente resulta

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f_{x'}\, d\mu \in \overline{x'(As(m))}$$

para todo

$$A \in \Sigma_S^+ = \{ A : S \supset A \in \Sigma^+ \} \quad \text{y} \quad S \in \Sigma^+$$

y, por tanto,

$$f_{x'}(t) \in \overline{x'(As(m))}$$

para casi todo $t \in S \in \Sigma^+$. Sea ρ un lifting sobre el álgebra $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^{\infty}$ de las funciones reales o complejas medibles esencialmente acotadas. Entonces

$$\rho(f_{x'})(t) \in \overline{x'(As(m))}$$

para todo

$$t \in S \cap \rho(S) \in \Sigma^+.$$

Se ve fácilmente que

$$x' \longrightarrow \rho(f_{x'})(t)$$

es una forma lineal sobre E'. Por tanto, existe una función f: $\Omega \longrightarrow E'^*$ tal que

$$< f(t), x' > = \rho(f_{x'})(t) \in \overline{x'(A_S(m))}$$

para todo $t \in S \cap \rho(S)$ y todo $x' \in E'$, de donde se deduce, por ser $A_\Omega(m)$ acotado en E,

$$f(t) \in \overline{\mathrm{co}}\, A_S(m) \subset E''$$

para todo $t \in S \cap \rho(S)$ y todo $S \in \Sigma^+$ siendo $\overline{\mathrm{co}}\, A_S(m)$ la envoltura convexa y cerrada de $A_S(m)$ en E''.

Como 14.7 $\Longrightarrow$ 6.3 $\Longrightarrow$ 6.6 y según acabamos de ver f: $\Omega \longrightarrow E''$ es una función (m, μ)-encajada, se deduce que existe una función acotada $f \in \bar{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E'')$ tal que $m = m_f$.

15. COROLARIO.—*Si E es un e. l. c. casi completo son equivalentes:*

15.1. *E posee la P. R. N.*

15.2. *Todo subespacio F de E con un sistema fundamental de entornos de 0 cerrados en E posee la P. R. N.*

15.3. *Todo subespacio separable F de E con un sistema fundamental de entornos de 0 cerrados en E posee la P. R. N.*

DEMOSTRACIÓN.

15.1 $\Longrightarrow$ 15.2. En primer lugar, F es casi completo por tener un sistema fundamental de entornos de 0 cerrados en E. Por otra parte, es obvio que la propiedad 14.4 para E implica la misma propiedad para F. Entonces, según el teorema 14, dicho subespacio F posee la P. R. N.

15.2 $\Longrightarrow$ 15.3. Evidente.

15.3 $\Longrightarrow$ 15.1. Por el teorema 14 basta demostrar que para todo subconjunto contable, no vacío y acotado B de E vale 14.4. Si F es el subespacio vectorial cerrado de E, engendrado por B, F es separable y B es acotado en F, luego verifica 14.5 en F y, por consiguiente, en E.

16. DEFINICIÓN.—Si

$$f \in \overline{\mathrm{M}}(\Sigma, \mu, E''),$$

se escribe $\rho\,[f] = f$ para denotar que existe una sucesión $(K_n)_1^\infty$ de conjuntos disjuntos $K_n \in \Sigma$ tales que

$$\mu\left(\Omega \setminus \sum_1^\infty K_n\right) = 0,$$

cada $f\,(K_n)$ es acotado en E y

$$\rho\,(f\,\chi_{K_n}) : \Omega \longrightarrow E''$$

de modo que

$$f = \sum_1^\infty \rho\,(f\,\chi_{K_n})$$

en casi todo Ω.

17. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. casi completo con la P. R. N. Entonces si* $f \in \overline{M}\,(\Sigma, \mu, E'')$ *es integrable Pettis con*

$$m_f : \Sigma \longrightarrow E$$

y $(K_n)_1^\infty$ *es una sucesión de conjuntos disjuntos* $K_n \in \Sigma$ *tal que cada* $f\,(K_n)$ *es acotado en* E,

$$\rho\,(f\,\chi_{K_n}) : \Omega \longrightarrow E'' \quad y \quad \mu\left(\Omega \setminus \bigcup_1^\infty K_n\right) = 0,$$

la función

$$g = \sum_1^\infty \rho\,(f\,\chi_{K_n}) \in \bar{\mathcal{L}}\,(\Sigma, \mu, E'')$$

y satisface

$$\rho\,[g] = g \quad y \quad m_f = m_g\,.$$

DEMOSTRACIÓN.—Por poseer E la P. R. N. y ser $m_f : \Sigma \longrightarrow E$, para cada seminorma continua p sobre E″, existe una función

$$g_p = \sum_{i,n} \frac{m\,(A_{in})}{\mu\,(A_{in})}\,\chi_{A_{in}} + g\,\chi_Z$$

con $m = m_f$, los $A_{in} \in \Sigma^+$ disjuntos

$$A_{in} \subset H_n = \rho\,(K_n),\quad \mu\left(H_n \setminus \bigcup_i A_{in}\right) = 0,\quad Z = \Omega \setminus \bigcup_{i,n} A_{in}$$

y

$$p\,(g_p\,(t) - g\,(t)) \leq 1$$

para todo $t \in \Omega$. Entonces es fácil ver que

$$g_p \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E''),$$

y

$$m_f\,(A) = \lim_p \int_A g_p\, d\mu = m_g\,(A)$$

para todo $A \in \Sigma$. Finalmente, como

$$\rho\,(g\,\chi_{H_n}) = \rho\,(f\,\chi_{K_n}),$$

se deduce que $\rho\,[g] = g$.

18. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. casi completo con la P. R. N. y* $m : \Sigma \longrightarrow E$ *una medida vectorial* μ*-continua. Entonces, si* m *está localmente controlada por* μ, *e. d. si para cada* $S \in \Sigma^+$ *existe* $T \in \Sigma_S^+$ *tal que* $A_T\,(m)$ *es acotado, existe* $f \in \bar{\mathcal{L}}\,(\Sigma, \mu, E'')$ *tal que* $m = m_f$ *y* $\rho\,[f] = f$.

DEMOSTRACIÓN.—Por el axioma de Zorn existe una familia maximal $(K_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos $K_i \in \Sigma^+$ tales que cada $A\,(K_i)$ es acotado y $\rho\,(K_i) = K_i$. Esta familia es, evidentemente, contable por lo que es fácil ver que la hipótesis hecha implica que

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_i K_i\right) = 0.$$

Sea m_i la restricción de m a $\Sigma_i = \Sigma_{K_i}$. Entonces por el teorema 14 existe una función acotada

$$f_i \in \bar{\mathcal{L}}\,(\Sigma_i, \mu, E'')$$

tal que $\rho(f_i) = f_i$ si se pone $f_i = 0$ fuera de K_i, y

$$m(A \cap K_i) = m_i(A \cap K_i) = \int_{A \cap K_i} f_i \, d\mu$$

para todo $A \in \Sigma$. Pongamos

$$f = \sum_{i \in I} f_i,$$

entonces

$$\rho(f \chi_{K_i}) = \rho(f_i) = f_i = f \chi_{K_i},$$

puesto que

$$\rho(K_i) = K_i, \quad \rho[f] = f \quad \text{y} \quad f \in \overline{M}(\Sigma, \mu, E'').$$

Además $f \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E'')$. En efecto, para cada $x' \in E'$, $x' \circ m$ es una medida escalar y, por tanto, de variación finita, y se verifica

$$\int_A |< f, x' >| \, d\mu = \sum_{i \in I} \int_{A \cap K_i} |< f, x' >| \, d\mu =$$

$$= \sum_{i \in I} |x' \circ m| (A \cap K_i) = |x' \circ m| (A),$$

y

$$< m(A), x' > = \sum_{i \in I} < m(A \cap K_i), x' > =$$

$$= \sum_{i \in I} \int_{A \cap K_i} < f, x' > d\mu = \int_A < f, x' > d\mu$$

para todo $A \in \Sigma$ puesto que

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_i K_i\right) = 0.$$

Luego $f\colon \Omega \longrightarrow E''$ es integrable Pettis con $m = m_f$, y según el teorema 17 se tiene

$$f \in \bar{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E'').$$

Bibliografía

[1] BOMBAL GORDON, F. (1978): *El teorema de Radon-Nikodym en espacios de Banach. Espacios con la propiedad de Radon-Nikodym.* Univ. Complutense de Madrid. Departamento de Teoría de Funciones.

[2] BOMBAL GORDON, F.: *Medida e integración en espacios bornológicos.* Aparecerá en la «Rev. R. Acad. Ci. Madrid».

[3] BOMBAL GORDON, F.: *El teorema de Radon-Nikodym en espacios bornológicos.* Aparecerá en la «Rev. R. Acad. Ci. Madrid».

]4[CHI, G. Y. H. (1976): *On the Radon-Nikodym theorem in locally convex spaces.* «Measure Theory», Lect. Notes in Math., n.° 541. Springer, Berlín.

[5] DAVIS, W. J. and PHELPS, R. R. (1974): *The Radon-Nikodym property and dentable sets in Banach spaces.* «Proc. of the Amer. Soc.», **45**, 119-122.

[6] DIESTEL, J. and UHL, J. Jr. (1977): *Vector Measures.* «Math. Surveys», **15**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I.

[7] EGGHE, L. (1978): *On the Radon-Nikodym-Property, and related topics in locally convex spaces.* «Vector Space Measures and Applications II», Lect. Notes in Math., n.° 645. Springer, Berlín.

[8] GILLIAM, D. (1977): *On integration and the Radon-Nikodym theorem in quasicomplete locally convex topological vector spaces.* «J. Reine Angew. Math.», **292**, 125-137.

[9] GROTHENDIECK, A. (1975): *Topological Vector Spaces.* Gordon and Breach, N. Y.

[10] HUFF, R. E. (1974): *Dentability and the Radon-Nikodym property.* «Duke Math. J.», **41**, 111-114.

[11] HUFF, R. E. (1976): *The Radon-Nikodym property for Banach spaces.* «Measure Theory», Lect. Notes in Math., n.° 541. Springer, Berlín.

[12] IONESCU TULCEA, A. and C. (1969): *Topics in the Theory of Litfting.* Springer, Berlín.

[13] KÖTHE, G. (1969): *Topological Vector Spaces I.* Springer, New York.

[14] MAYNARD, H. (1973): *A geometric characterization of Banach spaces possesing the Radon-Nikodym theorem.* «Trans. Amer. Math. Soc.», **185**, 493-500.

[15] RIEFFEL, M. A. (1968): *The Radon-Nikodym theorem for the Bochner integral.* «Trans. Amer. Math. Soc.», **131**, 466-487.

[16] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1979): *Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo.* «Rev. R. Acad. Ci. Madrid», **73**, 361-387.

[17] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. (1980): *El teorema de Radon-Nikodym para las medidas con valores en un espacio localmente convexo.* «Rev. R. Acad. Ci. Madrid», 41-64.

[18] SAAB, E. (1976): *Sur la propriété de Radon-Nikodym dans les espaces localement convexes de type (BM).* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 283, Sér. A, 899-902.

[19] THOMAS, E. (1976): *Totally summable functions with values in locally convex spaces.* «Measure Theory», Lect. Notes in Math., n.º 541. Springer, Berlin.

Universidad Complutense de Madrid
Departamento de Teoría de Funciones