EL TEOREMA DE RADON-NIKODYM PARA LAS MEDIDAS CON VALORES EN UN ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO

Baltasar Rodríguez-Salinas

Recibido: 10-X-79

In this paper it's studied the Radon-Nikodym theorem for measures $m: \Sigma \longrightarrow E$ with values in a locally convex Hausdorff space, when the averange range of m on S, $A_S(m)$, is locally relatively compact and weakly relatively compact. Similar theorems have been recently given by Gilliam [5]. Nevertheless as we use inductive limits, suggested by a Bombal's paper [2], and we give a characterization in the second case, we believe that we obtain new results about question. Proofs are made with the help of a lifting, this fact let us to study when a measure $m = m_f$ for a function $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$ is a measure m_g for a function $g \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, F)$ $(F \subset E)$ when the locally convex spaces E and F induce the same topology on the closed absolut convex hull $\overline{\text{aco}}\ m(\Sigma) = m(\Sigma)^{00}$ of $m(\Sigma)$ in E.

En este trabajo se estudia el teorema de Radon-Nikodym para medidas $m: \Sigma \longrightarrow E$ con valores en un espacio localmente convexo E, que supondremos siempre Hausdorff, cuando el conjunto $A_S(m)$ de los promedios tiene la propiedad local de ser relativamente compacto y la de ser débilmente relativamente compacto. Teoremas semejantes han sido dados recientemente por Gilliam [5]. Sin embargo como por una parte utilizamos límites inductivos, inspirados en un trabajo de Bombal [2], y por otra damos una caracterización en el segundo caso, creemos que obtenemos resultados nuevos sobre esta cuestión. Las demostraciones las realizamos con ayuda de un lifting. Este uso nos ha permitido estudiar cuándo una medida $m = m_f$ para una función $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$ es una medida m_g para una función $g \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, F)$ $(F \subset E)$ cuando los e. l. c. E y F inducen la misma topología sobre la envoltura absolutamente convexa y cerrada $\overline{\text{aco}}\ m(\Sigma) = m(\Sigma)^{00}$ en E de $m(\Sigma)$. (Para las notaciones véase más adelante o Rodríguez-Salinas [11].)

§ 1. El teorema de Radon-Nikodym para las funciones μ-integrables

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito que supondremos completo para asegurar la existencia de un lifting ρ sobre el álgebra $\mathcal{L}^{\infty}_{\mathbb{K}}$ de las funciones reales o complejas medibles acotadas. (Véase A. y C. Ionescu Tulcea [7], 43-54). Sea E un e. l. c. que como hemos dicho supondremos Hausdorff.

Ahora vamos a exponer algunas definiciones dadas en Rodríguez-Salinas [11].

1. Definición.—Una función $f\colon \Omega \longrightarrow E$ se dice *simple* y se escribe $f \in S(\Sigma, E)$ si es límite uniforme de una red de funciones simples ordinarias (de clase 0). Una función f se dice *μ-medible* y se escribe $f \in M(\Sigma, \mu, E)$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $K \in \Sigma$ tal que $\mu(\Omega \backslash K) < \varepsilon$ y $f\chi_K \in S(\Sigma, E)$, siendo χ_K la función característica de K. Una función f se dice *$\overline{\mu}$-medible* y se escribe $f \in \overline{M}(\Sigma, \mu, E)$ si es límite uniforme de una red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones μ-medibles $f_i \in M(\Sigma, \mu, E)$. Una función f se dice *μ-integrable* y se escribe $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$ si es μ-medible e integrable Pettis (o escalarmente integrable), es decir:

(i) Para cada $x' \in E'$ (dual de E), la función $\langle f, x' \rangle$ es integrable.

(ii) Para cada $A \in \Sigma$, existe $m_f(A) \in E$ tal que

$$\langle m_f(A), x' \rangle = \int_A \langle f, x' \rangle \, d\mu$$

para todo $x' \in E'$.

Entonces se define la integral por

$$\int_A f \, d\mu = m_f(A).$$

Una función f se dice *$\overline{\mu}$-integrable* y se escribe $f \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E)$ si f es límite uniforme de una red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones $f_i \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$ y, para cada $A \in \Sigma$, existe el límite

$$\lim_i \int_A f_i \, d\mu = \int_A f \, d\mu \in E.$$

Una función f se dice *absolutamente* μ*-integrable* y se escribe $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, E)$ si es μ-integrable y $p \circ f$ es integrable para toda seminorma continua p sobre E. Esta condición equivale a que cada p-variación $| m_f |_p$ sea finita. De manera análoga, se define la $\bar{\mu}$-*integrabilidad absoluta* y $\bar{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E)$.

Como toda función μ-medible integrable Pettis es μ-integrable y toda función $\bar{\mu}$-integrable es integrable Pettis, según la proposición 13 y teorema 14 de [11], se tiene

$$\mathcal{L}(\Sigma, \mu, E) = M(\Sigma, \mu, E) \cap \bar{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E)$$

2. Definición.—Sea E_0 límite inductivo $\varinjlim E_i$ de e. l. c. tales que cada $E_i \subset E$ y la inyección canónica $E_i \hookrightarrow E$ es continua. Una función $f\colon \Omega \longrightarrow E$ se dice (E_i)-*medible* y se escribe $f \in M(\Sigma, \mu, (E_i))$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $K \subset \Sigma$ y E_i $(i \in I)$ tales que $\mu(\Omega \backslash K) < \varepsilon$ y $f \chi_K \in M(\Sigma, \mu, E_i)$. Una función f se dice (E_i)-*integrable* y se escribe $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, (E_i))$ si

$$f \in M(\Sigma, \mu, (F_i)) \cap \bar{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E).$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}(\Sigma, \mu, (E_i)) = M(\Sigma, \mu, (E_i)) \cap \bar{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E).$$

Igualmente, se define

$$\mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, (E_i)) = M(\Sigma, \mu, (E_i)) \cap \bar{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E).$$

Una (E_i)-*medida* sobre Σ es una aplicación $m\colon \Omega \longrightarrow E$ tal que, para cada sucesión $(A_n)_1^\infty$ de conjuntos disjuntos $A_n \in \Sigma$ existe un E_i con la propiedad de que $m(A_m) \in E_i$ para todo $n \in N$ y la serie

$$\sum_1^\infty m(A_n) = m(A)$$

es sumable en E_i.

Sea $m\colon \Omega \longrightarrow E$ una medida vectorial y

$$A(H) = A_H(m) = \left\{ \frac{m(A)}{\mu(A)} : H \supset A \in \Sigma^+ \right\}$$

para $H \in \Sigma^+$, siendo $\Sigma^+ = \{A \in \Sigma : \mu(A) > 0\}$.

Recordemos que m se dice *μ-continua* o *absolutamente continua respecto de* μ si $\mu(A) = 0$ implica $m(A) = 0$ $(A \in \Sigma)$.

3. LEMA.—*Sea E un e. l. c. polar semi-reflexivo. Si* $m \colon \Sigma \longrightarrow E$ *es una medida μ-continua con la propiedad de que* $A_\Omega(m)$ *es relativamente compacto, existe una función simple* $f \in S(\Sigma, E)$ *tal que*

$$m(A) = \int_A f \, d\mu \, (= m_f(A))$$

para todo $A \in \Sigma$.

DEMOSTRACIÓN.—Por el teorema de Radon-Nikodym para funciones escalares, para cada $x' \in E'$, existe una función escalar integrable $f_{x'}$ tal que

$$\langle m(A), x' \rangle = \int_A f_{x'} \, d\mu$$

para todo $A \in \Sigma$. Inmediatamente, resulta

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f_{x'} \, d\mu \in x'(A_\Omega(m))$$

para todo $A \in \Sigma^+$ y, por tanto,

$$f_{x'}(t) \in \overline{x'(A_\Omega(m))}$$

para casi todo $t \in \Omega$. Sea ρ un lifting sobre el álgebra $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}$ de las funciones reales o complejas medibles esencialmente acotadas. Entonces

$$\rho(f_{x'})(t) \in x'\overline{(A_\Omega(m))}$$

para todo $t \in \Omega$.

Se ve fácilmente que

$$x' \longrightarrow \rho(f_{x'})(t)$$

es una forma lineal sobre E'. Por tanto, existe una función $f \colon \Omega \longrightarrow E'^*$ tal que

$$\langle f(t), x' \rangle = \rho(f_{x'})(t) \in x'\overline{(A_\Omega(m))}$$

para todo $t \in \Omega$ y todo $x' \in E'$, de donde se deduce que, para todo $t \in \Omega$,

$$f(t) \in A_\Omega(m)^{00} = \overline{\mathrm{aco}}\ A_\Omega(m) \subset E,$$

por ser E polar semi-reflexivo y $A_\Omega(m)$ relativamente compacto. Luego $f(\Omega)$ es un conjunto precompacto.

Para demostrar que $f \in S(\Sigma, E)$, bastará probar, según la proposición 3 de [11], que $p \circ (f - x)$ es Σ-medible para todo $x \in E$ y toda seminorma continua p sobre E. Sea

$$U = \{ x \in E : p(x) \leq 1 \}.$$

Entonces

$$p(f(t) - x) = \sup \{ |\langle f(t) - x, x' \rangle| : x' \in U^0 \} =$$
$$= \sup_J p_J (f(t) - x'),$$

donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos finitos J de U^0 y

$$p_J(x) = \sup \{ |\langle x, x' \rangle| : x' \in J \}.$$

Como

$$\rho(\langle f - x, x' \rangle)(t) = \rho(f_{x'} - \langle x, x' \rangle)(t) = \langle f - x, x' \rangle (t)$$

para todo $t \in \Omega$, se tiene

$$p(p_J \circ (f - x)) = p_J \circ (f - x)$$

y del teorema 3 del capítulo III de [7] resulta que

$$p \circ (f - x) = \sup_J p_J \circ (f - x)$$

es una función Σ-medible.

4. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. y* m: $\Sigma \longrightarrow E$ *una (E_i)-medida vectorial μ-continua. Si cada E_i es polar semi-reflexivo, las siguientes propiedades son equivalentes:*

4.1. *Existe* $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, (E_i))$ *tal que* $m = m_f$.

4.2. *Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $K_\varepsilon \in \Sigma^+$ *y un espacio* E_i *con* $i = i(\varepsilon)$ *tales que* $\mu(\Omega \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ *y* $A(K_\varepsilon)$ *es relativamente compacto en* E_i.

4.3. *Para cada* $S \in \Sigma^+$ *existe* $T \in \Sigma^+_S = \{A : S \supset A \in \Sigma^+\}$ *y un espacio* E_i *tales que* $A(T)$ *es relativamente compacto en* E_i.

Si se cumplen estas condiciones se tiene $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E_0)$ *siendo* $E_0 = \varinjlim E_i$ *y existe una subfamilia contable* $(E_j)_{j \in J}$ *de* $(E_i)_{i \in I}$ *tal que* $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, (E_j))$. *Si* $m: \Sigma \longrightarrow E$ *es de variación acotada, entonces* $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, (E_j))$. *Si* $E'_0 = \varinjlim E_j$ *se tiene* $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, \bar{E}'_0)$ *siendo* $\bar{E}'_0$ *la clausura de* E'_0 *en* E_0 *dotada de la topología inducida por* E_0.

DEMOSTRACIÓN.

4.1 $\Longrightarrow$ 4.2. Basta tomar $K_\varepsilon \in \Sigma^+$ de modo que $\mu(\Omega \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ y $f \chi_{K_\varepsilon} \in S(\Sigma, E_i)$ $(i = i(\varepsilon))$ pues entonces $A(K_\varepsilon) \subset \overline{\text{co}}\, f(K_\varepsilon)$ es relativamente compacto en E_i.

4.2 $\Longrightarrow$ 4.3. Evidente.

4.3 $\Longrightarrow$ 4.1. Por el axioma de Zorn existe una familia maximal $(K_j)_{j \in J}$ de conjuntos disjuntos $K_j \in \Sigma^+$ tales que cada $A(K_j)$ es relativamente compacto en un E_i $(i = i(j))$. Esta familia es, evidentemente, contable por lo que es fácil ver que 4.3 implica que $Z = \Omega \backslash \bigcup_j K_j$ es de medida nula. Sea m_j la restricción de m a Σ_{K_j} $(= \{A \cap K_j : A \in \Sigma\})$. Entonces por el lema 3 existe una función $f_j \in S(\Sigma_{K_j}, E_i)$ tal que

$$m(A \cap K_j) = m_j(A \cap K_j) = \int_{A \cap K_j} f_j \, d\mu$$

para todo $A \in \Sigma$. Pongamos $f_j = 0$ fuera de K_j y

$$f = \sum_{j \in J} f_j,$$

entonces, evidentemente, $f \in M(\Sigma, \mu, (E_i))$ por ser $(E_i)_{i \in I}$ un conjunto dirigido y las aplicaciones $E_i \longrightarrow E_j$ para $i \leqslant j$ continuas.

Además $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E_0) \subset \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$. En efecto, para cada

$x' \in E'_0$, $x' \circ m$ es una medida escalar y, por tanto, de variación finita, y se verifica

$$\int_A |\langle f, x'\rangle| \, d\mu = \sum_{j \in J} \int_{A \cap K_j} |\langle f, x'\rangle| \, d\mu =$$

$$= \sum_{j \in J} |x' \circ m| (A \cap K_j) = |x' \circ m| (A)$$

y

$$\langle m(A), x'\rangle = \sum_{j \in J} \langle m(A \cap K_j), x'\rangle = \sum_{j \in J} \int_{A \cap K_j} \langle f, x'\rangle d\mu = \int_A \langle f, x'\rangle \, d\mu$$

para todo $A \in \Sigma$ puesto que

$$\mu(A \setminus \bigcup_{i \in J} K_j) = 0.$$

Luego $f\colon \Omega \longrightarrow E_0$ es integrable Pettis y $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E_0)$ según la proposición 13 de [11].

Finalmente, si se cumplen las propiedades 4.1-4.3, se ve inmediatamente por la demostración anterior que existe una subfamilia contable $(E_j)_{j \in J}$ de $(E_i)_{i \in I}$ tal que $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, (E_j))$. Por tanto, si $E'_0 = \varinjlim E_j$, $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E'_0)$. Si $m\colon \Sigma \longrightarrow E$ es de variación acotada, $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, (E_j))$.

5. Observación.—Si para cada sucesión $(i_n)_1^\infty$ de índices $i_n \in I$ hay un $i \in I$ que verifica $i_n \leqslant i$ para todo $n \in \mathbf{N}$, existe un E_i tal que $f \in M(\Sigma, \mu, E_i)$, y también $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E_i)$ y $m(\Sigma) \subset E_i$ si E_i es cerrado en E_0. Si además cada E_i es casi completo y, cuando $m(\Sigma) \subset E_i$, $m\colon \Sigma \longrightarrow E_i$ es de variación acotada, se puede asegurar que existe un E_i tal que $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, E_i)$. Esto último resulta de los teoremas 16 y 18 de [11].

6. Teorema.—*Sea E un e. l. c. casi completo, F un subespacio cerrado de E, dotado de una topología más fina que la inducida sobre él por E y* $m = m_f$ *para* $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$. *Si E y F inducen la misma topología sobre la envoltura absolutamente convexa y cerrada* $B = \overline{\mathrm{aco}}\, m(\Sigma)$ $(\subset F)$ *de* $m(\Sigma)$ *en E, existe una función*

$g \cong f$ *tal que* $\rho[g] = g$, $g \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, F)$ *y* $m_f = m_g$. *(Véase [11] definiciones 19 y 23.)*

Supongamos que, para toda sucesión $x = (x_n)_1^\infty \in l_N^1(E)$ *con* $x_n \in B$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$, *se tiene* $x \in l_N^1(F)$. *Entonces, si* $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, E)$, *resulta* $g \in \overline{\mathcal{L}^1}(\Sigma, \mu, F)$. *Esta conclusión también es cierta si* $m: \Sigma \longrightarrow F$ *es de variación acotada.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea q una seminorma continua sobre F y $U = \{x \in F : q(x) \leqslant 1\}$. Entonces existe, para cada $n \in \mathbf{N}$, una seminorma continua p_n sobre E tal que

$$p_n(x - y) \leq 1, \quad \{x, y\} \subset B \Rightarrow q(x - y) \leq 1/(2n).$$

Sea

$$U_n = \{x \in E : p_n(x) \leq 1\}$$

y π_{U_n} la aplicación canónica $E \longrightarrow E_{U_n}$. Por ser f $\overline{\mu}$-medible se tiene que $\pi_{U_n} \circ f$ es μ-medible. Luego existe un conjunto Z_n de medida nula tal que $f(\Omega \backslash Z_n)$ se puede cubrir por un conjunto contable de p_n-bolas de radio $1/4\,\mu(\Omega)$. Como

$$B \subset \mu(\Omega) f(\Omega \setminus Z_n)^{00},$$

se deduce que B se puede cubrir por un conjunto contable de q-bolas de radio $1/(2n)$. Entonces E_B se puede cubrir por un conjunto contable de q-bolas de radio 1/2, y la clausura $\overline{E}_B$ de E_B en F (o E) se puede cubrir por un conjunto contable de q-bolas de radio 1.

Como

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in \overline{E}_B$$

para todo $A \in \Sigma^+$ y $\overline{E}_B$ es un subespacio cerrado de E, por el teorema 25 de [11] se deduce que existe una función μ-medible

$$g = \sum_1^\infty \rho(f \chi_{K_n})$$

tal que $g \cong f$, $\rho[g] = g$ y $g(\Omega) \subset \overline{E}_B \subset F$. Entonces $g(\Omega)$ se puede cubrir por un conjunto contable de q-bolas de radio 1.

Vamos a demostrar ahora que $q \circ (g - x)$ es Σ-medible para todo $x \in F$. Como U es cerrado en E se tiene

$$q(g(t) - x) = \sup \{ \, | \langle f(t) - g(t), x' \rangle | : x' \in U^0 \} = \sup_J q_J (g(t) - x)$$

donde U^0 es el conjunto polar de U en E′ y el último supremo se toma sobre todos los subconjuntos finitos J de U^0. Por tanto, si $H_n = \rho(K_n)$, del teorema 3 del capítulo III de [7] se deduce que, para cada $n \in \mathbf{N}$,

$$q \circ (g \quad x) \chi_{H_n} = \sup q_J \circ \quad - x) \chi_{H_n}$$

es una función Σ-medible puesto que

$$\rho(\langle g - x, x' \rangle \chi_{H_n}) = \rho(\langle f - x, x' \rangle \chi_{K_n}) = \langle g - x, x' \rangle \chi_{H_n}$$

para todo $x' \in E'$ y

$$\rho(q_J \circ (g - x) \chi_{H_n}) = q_J \circ (g - x) \chi_{H_n}.$$

Entonces, siendo $g = 0$ fuera de $\bigcup\limits_1^\infty H_n$, resulta que $q \circ (g - x)$ es una función Σ-medible.

De los resultados probados anteriormente se deduce que existe una familia contable $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos $A_i \in \Sigma^+$ y una familia $(y_i)_{i \in I}$ de elementos $y_i \in \bar{E}_B \subset F$ tales que $Z = \Omega \setminus \bigcup\limits_i A_i$ es de medida nula y

$$q(g(t) - y_i) \leqq 1 \quad \text{para todo} \quad t \in A_i \quad (i \in I).$$

Entonces, si

$$x_i = \frac{1}{\mu(A_i)} \int_{A_i} g(t) \, d\mu(t) \quad (i \in I),$$

como U es cerrado en E se tiene

$$q(x_i - y_i) \leqq 1 \quad (i \in I)$$

y, por consiguiente,

$$q(g(t) - x_i) \leq 2 \quad \text{para todo} \quad t \in A_i \quad (i \in I).$$

Luego

$$g_q = \sum_i x_i \chi_{A_i} + g \chi_Z$$

satisface

$$q(g_q(t) - g(t)) \leq 2$$

para todo $t \in \Omega$.

Vamos a probar que $g_q \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, F)$. En efecto, por ser E casi completo, se tiene según el teorema 2 de Tweddle [14], que $m(\Sigma)$ es débilmente relativamente compacto en E. Entonces por el teorema de Krein se concluye que $B = \overline{\text{aco}}\, m(\Sigma)$ es débilmente compacto en E. Por ser B débilmente compacto en E e inducir E y F la misma topología sobre B se tiene que B es débilmente compacto en F. (Véase [6] II.8. Ex. 2 y [8] V. 24.3 (7)). Entonces, $g_q \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, F)$ puesto que

$$\sum_i x_i \mu(A \cap A_i)$$

es sumable en F para todo $A \in \Sigma$ ya que, para cada subconjunto finito J de I la suma

$$s = \sum_{i \in J}{}' x_i \mu(A \cap A_i) = \sum_{i \in J} \frac{\mu(A \cap A_i)}{\mu(A_i)} m(A_i) \in B,$$

y B es débilmente compacto en F y F es casi completo. (Véase [9], lema 4 y teorema 1). Efectivamente, si $\alpha_i = \mu(A \cap A_i)/\mu(A_i)$ y $\alpha_{i_1} \geqslant \alpha_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{i_n}$ se tiene

$$s = (\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2})\, m(A_{i_1}) + (\alpha_{i_2} - \alpha_{i_3})\, m(A_{i_1} \cup A_{i_2}) + \ldots +$$
$$+ (\alpha_{i_{n-1}} - \alpha_{i_n})\, m(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_{n-1}}) + \alpha_{i_n} m(A_{i_1} \cup \ldots A_{i_n}) \in B.$$

Entonces $g \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, F)$ por ser $g: \Omega \longrightarrow F$ límite uniforme en F de la red $(g_q)_q$ de funciones $g_q \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, F)$ y

$$\lim_q \int_A g_q \, d\mu = \int_A g \, d\mu = m(A)$$

para todo $A \in \Sigma$, puesto que

$$q\left(\int_A (g_q - g) \, d\mu\right) \leq 2\mu(A),$$

por ser U cerrado en E y $q(g_q(t) - g(t)) \leqslant 2$ para todo $t \in \Omega$.

Supongamos ahora que, para toda sucesión $x = (x_n)_1^\infty \in I_N^1(E)$ con $x_n \in B$ para todo $n \in \mathbf{N}$, se tiene $x \in I_N^1(F)$. Entonces, si $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, E)$ se verifica

$$\int_\Omega q(g_q) \, d\mu = \sum_i q(x_i) \, \mu(A_i) = \sum_i q(m(A_i)) < +\infty,$$

puesto que

$$\sum_i p(m(A_i)) \leq \sum_i \int_{A_i} p(f) \, d\mu = \int_\Omega p(f) \, d\mu < +\infty$$

para toda seminorma continua p sobre E y cada $m(A_i) \in B$. Como además

$$\int_\Omega q(g_q - g) \, d\mu \leq 2 \int_\Omega d\mu = 2\mu(\Omega) < +\infty,$$

resulta

$$\int_\Omega q(g) \, d\mu < +\infty$$

para toda seminorma continua q sobre F. Luego $g \in \overline{\mathcal{L}^1}(\Sigma, \mu, F)$.

Por otra parte, si $m: \Sigma \longrightarrow F$ es de variación acotada, también $g \in \overline{\mathcal{L}^1}(\Sigma, \mu, F)$ puesto que

$$\int_\Omega q(g) \, d\mu = |m|_q(\Omega) < +\infty$$

para toda seminorma continua q sobre F en virtud del teorema 16 de [11].

7. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. casi completo para la topología de Mackey $\tau(E, E')$, F un subespacio de E, dotado de una topología más fina que la inducida sobre él por E con un sistema fundamental de entornos de* 0 *cerrados en E, y* $\mathrm{m}: \Sigma \longrightarrow E$ *una medida con valores en E. Si E y F inducen la misma topología sobre la envoltura absolutamente convexa y cerrada* $B = \overline{\mathrm{aco}}\, \mathrm{m}(\Sigma)$ $(\subset F)$ *de* $\mathrm{m}(\Sigma)$ *en E,* $\mathrm{m}: \Sigma \longrightarrow F$ *es una medida con valores en F.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta seguir un razonamiento desarrollado en el teorema 6.

8. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. polar semi-reflexivo, D un subconjunto absolutamente convexo acotado y cerrado de E, y* $\mathrm{m}: \Sigma \longrightarrow E_D$ *una medida de variación acotada. Sea* $\mathrm{m} = \mathrm{m}_f$ *para una función* $f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$ *y F un subespacio de E, dotado de una topología más fina que la inducida sobre él por E con un sistema fundamental de entornos de* 0 *cerrados en E, tal que induce sobre D $(\subset F)$ la misma topología que E. Entonces, existe una función μ-medible* $g \cong f$ *que verifica* $\rho[g] = g$ *y* $g \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, F)$.

DEMOSTRACIÓN.—Evidentemente, $m: \Sigma \longrightarrow F$ es una medida μ-continua de variación acotada. Además, para cada $S \in \Sigma^+$, existe $T' \in \Sigma_S^+$ con $A(T')$ relativamente compacto en E. Como $m: \Sigma \longrightarrow E_D$ es de variación acotada, dado T' existe $T \in \Sigma_{T'}^+$ tal que $A(T)$ es acotado en E_D y, por tanto, $\lambda > 0$ de modo que $A(T) \subset \lambda D$. Como F induce sobre λD la misma topología que E y E es polar semi-reflexivo, resulta que $A(T)^{00}$ es compacto en F. Por el axioma de Zorn existe entonces una sucesión $(K_n)_1^\infty$ de conjuntos disjuntos $K_n \in \Sigma^+$ tales que $A(K_n)^{00}$ es compacto en F y $\mu(\Omega \setminus \bigcup_1^\infty K_n) = 0$. Luego

$$g = \sum_1^\infty \rho(f \chi_{K_n}) \in M(\Sigma, \mu, E)$$

es una función tal que $g \cong f$ y $\rho[g] = g$. Como

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in A(K_n)^{00} \subset \lambda_n D$$

para todo A $\in \Sigma^+_{H_n}$ y $H_n = \rho(K_n)$, por el teorema 25 de [11] resulta

$$g(H_n) = \rho(f \chi_{K_n})(H_n) \subset A(K_n)^{00} \subset \lambda_n D$$

para todo $n \in \mathbf{N}$ y, por consiguiente,

$$g(\Omega) \subset E_D \subset F.$$

Además $g \in M(\Sigma, \mu, F)$ porque cada $g\chi_{H_n} \in S(\Sigma, F)$ según la proposición 3 de [11], ya que $g(H_n)$ es precompacto en F y de igual modo que en el teorema 6 se puede probar que $q \circ (g - x)$ es Σ-medible para un sistema fundamental de seminormas continuas q sobre F y todo $x \in F$.

Finalmente, como $m: \Sigma \longrightarrow F$ es una medida de variación acotada y $m = m_g$, de los teoremas 11, 16 y 18 de [11] resulta que $g \in \mathcal{L}^1(\Sigma, \mu, F)$.

§ 2. Funciones $\bar{\mu}$-integrables

9. Lema.—*Si E es un e. l. c. casi completo y* $m: \Sigma \longrightarrow E$ *es una medida vectorial, para toda sucesión* $(A_n)_1^\infty$ *de conjuntos disjuntos* $A_n \in \Sigma$ *y para toda sucesión* (α_n) *de números reales,* $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1$, *la serie*

$$\sum_1^\infty \alpha_n m(A_n)$$

es sumable.

Demostración.—Por ser $\sum_1^\infty m(A_n)$ sumable, para cada seminorma continua p sobre E existe un subconjunto finito H de N tal que

$$p\Big(\sum_{n \in J} m(A_n)\Big) \leq 1$$

para todo subconjunto finito J de **N** disjunto con H. Como E es casi completo será suficiente probar que para estos conjuntos J se tiene

$$p\Big(\sum_{n \in J} \alpha_n m(A_n)\Big) \leq 1.$$

En efecto, si $J = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ y $\alpha_{n_1} \geqslant \alpha_{n_2} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{n_k}$ se tiene

$$\sum_{n \in J} \alpha_n m(A_n) = \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_{n_i} - \alpha_{n_{i+1}}) s_i + \alpha_{n_k} s_k$$

con $s_i = m(A_{n_1} \cup \ldots \cup A_{n_i})$ y, por consiguiente,

$$p\Big(\sum_{n \in J} \alpha_n m(A_n)\Big) \leqq \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_{n_i} - \alpha_{n_{i+1}}) p(s_i) + \alpha_{n_k} p(s_k) \leqq 1.$$

10. TEOREMA.—*Si E es un e. l. c. casi completo, una función* $f \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E)$ *si y sólo si se verifican:*

10.1. *Para todo entorno absolutamente convexo y cerrado U de* 0 *en E,* $\pi_U \circ f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E_U)$ *siendo* π_U *la aplicación canónica* $E \longrightarrow E_U$.

10.2. *Para todo $A \in \Sigma$, existe* $m(A) \in E$ *tal que*

$$\pi_U \circ m(A) = \int_A \pi_U \circ f \, d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN.—Es obvio que si $f \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E)$ se tiene que cada $\pi_U \circ f \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E_U)$ y, por tanto, $\pi_U \circ f \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E_U)$ por ser E_U un espacio normado.

Recíprocamente, supongamos que se verifican 10.1 y 10.2. Entonces, para cada seminorma continua p sobre E, existe una familia $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos $A_i \in \Sigma^+$ y otra familia $(y_i)_{i \in I}$ de elementos $y_i \in E$ tales que I es contable, $Z = \Omega \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$ es de medida nula y

$$p(f(t) - y_i) \leqq 1 \quad \text{para todo} \quad t \in A_i \quad (i \in I).$$

Entonces si ponemos $x_i = m(A_i)/\mu(A_i)$ para $i \in I$, se tiene $p(x_i - y_i) \leqslant 1$ y, por tanto, $p(f(t) - x_i) \leqslant 2$ para todo $t \in A_i$ $(i \in I)$, de donde se deduce que la función

$$f_p = \sum_i x_i \chi_{A_i} + f \chi_Z$$

es una función μ-medible tal que $p(f_p(t) - f(t)) \leqslant 2$ para todo $t \in \Omega$. Esta función es μ-integrable puesto que, para cada $A \in \Sigma$, la serie

$$\sum_i x_i \mu(A \cap A_i) = \sum_i \frac{\mu(A \cap A_i)}{\mu(A_i)} m(A_i)$$

es sumable según el lema 9. Entonces como $(f_p)_p$ es una red de funciones $f_p \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$, uniformemente convergente a f, y

$$\lim_p \int_A f_p \, d\mu = m(A)$$

para todo $A \in \Sigma$, puesto que

$$p\left(\int_A f_p \, d\mu - m(A)\right) \leq \int_A p_U \circ \pi_U \circ (f_p - f) \, d\mu = \int_A p(f_p - f) \, d\mu \leq 2\mu(A)$$

si

$$U = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$$

y p_U es la norma de E_U asociada a U.

§ 3. Funciones $\tilde{\mu}$-integrables

Sea E un e. l. c. casi completo.

11. Definición.—Una función $f: \Omega \longrightarrow E$ se dice *$\tilde{\mu}$-medible* y se escribe $f \in \tilde{M}(\Sigma, \mu, E)$, si $f \in \overline{M}(\Sigma, \mu, E)$ y, para cada $\varepsilon > 0$, existe $K \in \Sigma$ tal que $\mu(\Omega \backslash K) < \varepsilon$ y $f(K)$ es débilmente relativamente compacto. Una función f se dice *$\tilde{\mu}$-integrable* y se escribe $f \in \tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E)$ si $f \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E) \cap \tilde{M}(\Sigma, \mu, E)$. Una función f se dice *absolutamente $\tilde{\mu}$-integrable* y se escribe $f \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E)$ si $f \in \overline{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E) \cap \tilde{M}(\Sigma, \mu, E)$. $\tilde{S}(\Sigma, E)$ es el conjunto de todas las funciones $f: \Omega \longrightarrow E$ escalarmente medibles tales que $f(\Omega)$ es débilmente relativamente compacto. Es fácil probar que toda función $f \in \tilde{S}(\Sigma, E)$ es integrable Pettis por suponer E casi completo.

12. DEFINICIÓN.—Dos funciones f y $g: \Omega \longrightarrow E$ se dicen *débilmente μ-equivalentes* y se escribe $f \simeq g$ si

$$\mu(\{t \in \Omega : \langle f(t) - g(t), x' \rangle \neq 0\}) = 0$$

para todo $x' \in E'$.

13. PROPOSICIÓN.—*Para funciones $\Omega \longrightarrow E$ cualesquiera se verifica:*

13.1. *Si* $f_1 \simeq f_2$ *y* $g_1 \simeq g_2$, *se tiene* $a f_1 + b g_1 \simeq a f_2 + b g_2$.

13.2. *Si* $f_n \simeq g_n$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$, $\lim_n f_n = f$ *y* $\lim_n g_n = g$, *se tiene* $f \simeq g$.

13.3. *Si* f *y* g *son integrables Pettis y* $f \simeq g$, *se tiene*

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu$$

para todo $A \in \Sigma$.

DEMOSTRACIÓN.—De igual forma que la proposición 20 de [11] es evidente.

14. TEOREMA.—*Sea* ρ *un lifting sobre el álgebra de las funciones reales o complejas medibles acotadas. Para este lifting* ρ *existe otro lifting sobre* $\tilde{S}(\Sigma, E)$, *que también denotaremos por* ρ, *con las propiedades:*

14.1. *Si* $f \in \tilde{S}(\Sigma, E)$ *se tiene* $\rho(f) \in \tilde{S}(\Sigma, E)$.

14.2. $\rho(f) \simeq f$.

14.3. $f \simeq g$ *si y sólo si* $\rho(f) = \rho(g)$.

14.4. $\rho(a f + b g) = a \rho(f) + b \rho(g)$.

14.5. $\rho(\varphi f) = \rho(\varphi) \rho(f)$ *para toda función real o compleja* Σ-*medible y acotada* φ.

14.6. $h \circ \rho(f) = \rho(h \circ f)$ *para toda función real o compleja* $\sigma(E, E')$-*continua* h *sobre* E. *En particular, para* $h = x' \in E'$ *y cuando* h *es una seminorma* $\sigma(E, E')$-*continua* p *sobre* E.

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en el teorema 21 de [11] utilizando la topología débil $\sigma(E, E')$.

15. DEFINICIÓN.—Si f es una función $\tilde{\mu}$-medible, se escribe $\rho\,[f] = f$ para denotar que existe una sucesión $(K_n)_1^\infty$ de conjuntos disjuntos $K_n \in \Sigma$ tales que $\mu\,(\Omega \setminus \bigcup_1^\infty K_n) = 0$, $f\,\chi_{K_n} \in \tilde{S}\,(\Sigma, E)$ y

$$f = \sum_1^\infty \rho\,(f\chi_{K_n})$$

en casi todo Ω.

16. PROPOSICIÓN.—*Si* $\rho\,[f] = f$, $\rho\,[g] = g$ *y* $f \simeq g$, *se tiene* $f = g$ *en casi todo* Ω.

DEMOSTRACIÓN.—Resulta fácilmente como la proposición 24 de [11].

17. TEOREMA.—*Sea* $f \in \tilde{\mathcal{L}}\,(\Sigma, \mu, E)$ *y* F *un subconjunto* $\sigma(E, E')$-*cerrado de* E *tal que*

$$\frac{1}{\mu\,(A)} \int_A f\,d\mu \in F,$$

para todo $A \in \Sigma^+$. *Entonces*

17.1. *Existe una función* $\tilde{\mu}$-*medible* $g \simeq f$ *tal que* $\rho\,[g] = g$ *y* $g\,(t) \in F$ *para todo* $t \in \Omega$.

17.2. *Para todo* $\sigma\,(E, E')$-*entorno de* 0 *se tiene* $f\,(t) \in F + U$ *para casi todo* $t \in \Omega$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en el teorema 25 de [11] utilizando la topología débil $\sigma\,(E, E')$.

§ 4. El teorema de Radon-Nikodym para las funciones $\tilde{\mu}$-integrables

18. LEMA.—*Sea* E *un e. l. c. casi completo. Si* $m : \Omega \longrightarrow E$ *es una medida vectorial tal que* $A_\Omega\,(m)$ *es débilmente relativamente compacto, existe una función* $f \in \tilde{\mathcal{L}}^1\,(\Sigma, \mu, E) \cap \tilde{S}\,(\Sigma, E)$ *tal que*

$$m\,(A) = \int_A f\,d\mu \quad (= m_f\,(A)),$$

para todo $A \in \Sigma$ *y* $f\,(\Omega) \subset \overline{\mathrm{co}}\,A_\Omega\,(m)$.

DEMOSTRACIÓN.—Procederemos, en primer lugar, de manera análoga como en el lema 3. Por el teorema de Radon-Nikodym para las funciones escalares, para cada $x' \in E'$, existe una función escalar integrable $f_{x'}$ tal que

$$\langle m(A), x' \rangle = \int_A f_{x'}\, d\mu,$$

para todo $A \in \Sigma$. Inmediatamente, resulta

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f_{x'}\, d\mu \in x'(A\Omega(m)),$$

para todo $A \in \Sigma^+$ y, por tanto,

$$f_{x'}(t) \in \overline{x'(A\Omega(m))},$$

para casi todo $t \in \Omega$. Sea ρ un lifting sobre el álgebra $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}$ de las funciones reales o complejas medibles esencialmente acotadas. Entonces

$$\rho(f_{x'})(t) \in x'(\overline{A\Omega(m)}),$$

para todo $t \in \Omega$.

Se ve fácilmente que

$$x' \longrightarrow \rho(f_{x'})(t),$$

es una forma lineal sobre E′. Por tanto, existe una función $f: \Omega \longrightarrow E'^*$ tal que

$$\langle f(t), x' \rangle = \rho(f_{x'})(t) \in x'(\overline{A\Omega(m)}),$$

para todo $t \in \Omega$ y todo $x' \in E'$, de donde se deduce por el teorema de Krein que

$$f(t) \in A\Omega(m)^{00} = \overline{\text{aco}}\, A\Omega(m) \subset E,$$

por ser E casi completo y A (m) débilmente relativamente compacto.

Para demostrar que $p \circ (f - x)$ es Σ-medible para toda seminorma continua p sobre E y $x \in$ E, basta proceder de manera completamente análoga como en el lema 3.

Por otra parte, si

$$U = \{ x \in E : p(x) \leq 1 \},$$

y π_U es la aplicación canónica $E \longrightarrow E_U$, se tiene que

$$A_\Omega (\pi_U \circ m) = \pi_U (A_\Omega (m))$$

es débilmente relativamente compacto en E_U y, por tanto, se puede cubrir $A_\Omega (m)$ por un conjunto contable de p-bolas de radio 1/4 y, por consiguiente, también se puede cubrir $f(\Omega) \subset A_\Omega (m)^{00}$ por un conjunto contable de p- bolas de radio 1. Entonces existe una familia contable $(A_i)_{i \in I}$ de conjuntos disjuntos $A_i \in \Sigma^+$ y otra familia $(y_i)_{i \in I}$ de elementos $y_i \in E$ tales que $Z = \Omega \setminus \bigcup_i A_i$ es de medida nula y se verifica

$$p(f(t) - y_i) \leq 1 \quad \text{para todo} \quad t \in A_i .$$

Sea $x_i = m(A_i)/\mu(A_i)$, entonces $p(x_i - y_i) \leqslant 1$ y si se pone

$$f_p = \sum_i x_i \chi_{A_i} + f \chi_Z$$

se tiene como en el teorema 10 que $(f_p)_p$ es una red de funciones $f_p \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$ uniformemente convergente a f. Por tanto, para cada $A \in \Sigma$, existe

$$\lim_p \int_A f_p \, d\mu \in \hat{E} \quad \text{(compleción de E)}.$$

Vamos a probar que

$$\lim_p \int_A f_p \, d\mu = m(A)$$

para todo $A \in \Sigma$. En efecto, si $x' \in E'$ y $\hat{x}'$ es la extensión continua de x' a $\hat{E}$, se tiene

$$\langle m(A), \hat{x}' \rangle = \int_A \langle f, \hat{x}' \rangle \, d\mu = \lim_p \int_A \langle f_p, \hat{x}' \rangle \, d\mu = \langle \lim_p \int_A f_p \, d\mu, \hat{x}' \rangle$$

y, por tanto,

$$\lim_p \int_A f_p \, d\mu = m(A).$$

Entonces $f \in \overline{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E)$ y

$$m(A) = \int_A f \, d\mu,$$

para todo $A \in \Sigma$. Además $f(\Omega) \subset \overline{\mathrm{co}}\, A_\Omega(m)$ es débilmente relativamente compacto. Por tanto, $f \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E) \cap \tilde{S}(\Sigma, E)$.

19. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. casi completo. Entonces se verifica:*

19.1. *Si* $\mathrm{f} \in \tilde{S}(\Sigma, E)$, *se tiene* $\rho(\mathrm{f}) \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E) \cap \tilde{S}(\Sigma, E)$.

19.2. *Si* $\mathrm{f} \in \tilde{M}(\Sigma, \mu, E)$ *es integrable Pettis y* $(K_n)_1^\infty$ *es una sucesión de conjuntos disjuntos* $K_n \in \Sigma$ *tal que cada* $\mathrm{f}(K_n)$ *es débilmente relativamente compacto y* $\mu(\Omega \setminus \bigcup_1^\infty K_n) = 0$, *la función*

$$\mathrm{g} = \sum_1^\infty \rho(\mathrm{f}\,\chi_{K_n}) \in \tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu\, E),$$

y satisface $\mathrm{f} \simeq \mathrm{g}$ *y* $\rho[\mathrm{g}] = \mathrm{g}$.

19.3. *Si* $\mathrm{f} \in \tilde{M}(\Sigma, \mu, E)$ *y* $\mathrm{p} \circ \mathrm{f}$ *es integrable para cada seminorma continua* p *sobre E,* f *es integrable Pettis. Si además* $\rho[\mathrm{f}] = \mathrm{f}$, $\mathrm{f} \in \tilde{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E)$.

DEMOSTRACIÓN.

19.1. Basta proceder como en el lema 18.

19.2. Basta construir una red $(g_p)_p$ de funciones $g_p \in \mathcal{L}(\Sigma, \mu, E)$ tal que

$$p(g_p(t) - g(t)) \leq 1$$

para todo $t \in H_n = \rho(K_n)$ y $n \in \mathbf{N}$.

19.3. Se puede proceder como en el teorema 18 de [11], teniendo en cuenta 19.2.

20. Definición.—Sea E_0 límite inductivo $\varinjlim E_i$ de una familia de e. l. c. tales que cada $E_i \subset E$ y la inyección canónica $E_i \hookrightarrow E$ es continua. Una función $f\colon \Omega \longrightarrow E$ se dice $(E_i)^{\sim}$*-medible* y se escribe $f \in \tilde{M}(\Sigma, \mu, (E_i))$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $K \in \Sigma$ y E_i $(i \in I)$ tales que $\mu(\Omega \backslash K) < \varepsilon$ y $f\chi_K \in \tilde{M}(\Sigma, \mu, E_i)$. Una función f se dice (E_i) *-integrable* y se escribe $f \in \tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, (E_i))$ si

$$f \in \tilde{M}(\Sigma, \mu, (E_i)) \cap \bar{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E).$$

Por tanto,

$$\tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, (E_i)) = \tilde{M}(\Sigma, \mu, (E_i)) \cap \bar{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E).$$

Igualmente, se define

$$\tilde{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, (E_i)) = \tilde{M}(\Sigma, \mu, (E_i)) \cap \bar{\mathcal{L}}^1(\Sigma, \mu, E).$$

21. Teorema.—*Sea E un e. l. c. y $m\colon \Sigma \longrightarrow E$ una (E_i)-medida vectorial μ-continua. Si cada E_i es casi completo, las siguientes propiedades son equivalentes:*

21.1. *Existe* $f \in \tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, (E_i))$ *tal que* $m = m_f$.

21.2. *Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $K_\varepsilon \in \Sigma^+$ *y un espacio* E_i *con* $i = i(\varepsilon)$ *tales que* $\mu(\Omega \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ *y* $A(K_\varepsilon)$ *es débilmente relativamente compacto en* E_i.

21.3. *Para cada* $S \in \Sigma^+$ *existe* $T \in \Sigma_S^+$ *y un espacio* E_i *tales que* $A(T)$ *es débilmente relativamente compacto en* E_i.

Si se cumplen estas condiciones se tiene $f \in \tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E_0)$ *siendo* $E_0 = \varinjlim E_i$ *y existe una subfamilia contable* $(E_j)_{j \in J}$ *de* $(E_i)_{i \in I}$ *tal que* $f \in \tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, (E_j))$. *Si* $m\colon \Sigma \longrightarrow E$ *es de variación acotada,*

$f \in \tilde{\mathcal{L}}^1 (\Sigma, \mu, (E_j))$. *Si* $E'_0 = \underrightarrow{lim}\, E_j$ *se tiene* $f \in \tilde{\mathcal{L}} (\Sigma, \mu, \bar{E}'_0)$ *siendo* $\bar{E}'_0$ *la clausura de* E'_0 *en* E_0 *dotada de la topología inducida por* E_0.

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en el teorema 4, teniendo en cuenta el lema 18 y el teorema 19.

22. OBSERVACIÓN.—Si para cada sucesión $(i_n)_1^\infty$ de índices $i_n \in I$ hay un $i \in I$ que verifica $i_n \leq i$ para todo $n \in \mathbf{N}$, existe un E_i tal que $f \in \tilde{M} (\Sigma, \mu, E_i)$, y también $f \in \tilde{\mathcal{L}} (\Sigma, \mu, E_i)$ y $m (\Sigma) \subset E_i$ si E_i es cerrado en E_0. Si además cada E_i es casi completo y, cuando $m (\Sigma) \subset E_i$, $m: \Sigma \longrightarrow E_i$ es de variación acotada, se puede asegurar que existe un E_i tal que $f \in \tilde{\mathcal{L}}^1 (\Sigma, \mu, E_i)$. Esto último resulta del teorema 16 de [11] y del teorema 19.

23. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. casi completo, F un subespacio cerrado de E, dotado de una topología más fina que la inducida sobre él por E y* $m = m_f$ *para* $f \in \tilde{\mathcal{L}} (\Sigma, \mu, E)$. *Si E y F inducen la misma topología sobre la envoltura absolutamente convexa y cerrada* $B = \overline{\text{aco}}\, m (\Sigma)$ *de* $m (\Sigma)$ *en E, existe una función* $g \simeq f$ *tal que* $\rho [g] = g$, $g \in \bar{\mathcal{L}} (\Sigma, \mu, F)$ *y* $m_f = m_g$.

Supongamos que, para toda sucesión $x = (x_n)_1^\infty \in I^1_N (E)$ *con* $x_n \in B$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$, *se tiene* $x \in I^1_N (F)$. *Entonces, si* $f \in \tilde{\mathcal{L}}^1 (\Sigma, \mu, E)$ *resulta* $g \in \bar{\mathcal{L}}^1 (\Sigma, \mu, F)$. *Esta conclusión también es cierta si* $m: \Sigma \longrightarrow F$ *es de variación acotada.*

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en el teorema 6, utilizando el teorema 17.

24. TEOREMA.—*Sea E un e. l. c. casi completo, D un subconjunto absolutamente convexo acotado y cerrado de E, y* $m: \Omega \longrightarrow E_D$ *una medida de variación acotada. Sea* $m = m_f$ *para una función* $f \in \tilde{\mathcal{L}} (\Sigma, \mu, E)$ *y F un subespacio de E, dotado de una topología más fina que la inducida sobre él por E con un sistema fundamental de entornos de 0 cerrados en E, tal que induce sobre D* ($\subset F$) *la misma topología que E. Entonces, existe una función* $\tilde{\mu}$*-medible* $g \simeq f$ *que verifica* $\rho [g] = g$ *y* $g \in \mathcal{L}^1 (\Sigma, \mu, F)$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta proceder como en el teorema 8, teniendo en cuenta los teoremas 17 y 19.

25. PROPOSICIÓN.—*Sea E un e. l. c. casi completo, $D \subset E$ un conjunto absolutamente convexo acotado, cerrado y metrizable y* $\mathrm{m}: \Omega \longrightarrow E_D$ *una medida de variación acotada. Si* $\mathrm{m} = \mathrm{m}_f$ *para una función* $f \in \tilde{\mathcal{L}}(\Sigma, \mu, E)$, *existe un conjunto absolutamente convexo acotado completante $B \subset E$ que absorbe a D, y una función* $g: \Omega \longrightarrow E_B$ *integrable Bochner de modo que* $\mathrm{m} = \mathrm{m}_f$.

DEMOSTRACIÓN.—Esta proposición, que coincide esencialmente con la proposición 7 de [2] en virtud del teorema 22, se puede probar como consecuencia del teorema 24 siguiendo el proceso de Bombal para construir F en [2].

26. OBSERVACIÓN.—Como la topología débil es la misma para todas las topologías compatibles con un mismo par dual y todo espacio casi completo es casi completo para la topología de Mackey, se deduce que los resultados de esta sección son válidos para las topologías de Mackey de los espacios considerados.

Bibliografía

[1] BOMBAL, F.: *Medida e integración en espacios bornológicos.* Aparecerá en la «Rev. R. Acad. Ci. Madrid».

[2] — — *El teorema de Radon-Nikodym en espacios bornológicos.* Aparecerá en la «Rev. R. Acad. Ci. Madrid».

[3] CHI, G. Y. H.: *On the Radon-Nikodym theorem in locally convex spaces.* «Measure Theory», Lect. Notes in Math., n.º 541. Springer, Berlín, 1976.

[4] DIESTEL, J. and UHL, J. Jr.: *Vector Measures.* Math. Surveys, 15. «Amer. Math. Soc.», Providence, R. I., 1977.

[5] GILLIAM, D.: *On integration and the Radon-Nikodym theorem in quasicomplete locally convex topological vector spaces.* «J. Reine Angew. Math.», **292** (1977), 125-137.

[6] GROTHENDIECK, A.: *Topological Vector Spaces.* Gordon and Breach, N. Y., 1975.

[7] IONESCU TULCEA, A. and C.: *Topics in the Theory of Lifting.* Springer, Berlín, 1969.

[8] KÖTHE, G.: *Topological Vector Spaces* I. Springer, New York, 1969.

[9] MC ARTHUR, C. W.: *On theorem of Orlicz and Pettis.* «Pac. J. of Math.», **22** (1969), 297-302.

[10] RIEFFEL, M. A.: *The Radon-Nikodym theorem for the Bochner integral.* «Trans. Amer. Math. Soc.», **131** (1968), 466-487.

[11] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo*. «Rev. R. Acad. Ci. Madrid», **73** (1979), 361-387.

[12] SAAB, E.: *Sur la propriété de Radon-Nikodym dans les espaces localement convexes de type* (BM). C. R. Acad. Sc. Paris, t. **283** (1976), Sér. A, 899-902.

[13] THOMAS, E.: *Totally summable functions with values in locally convex spaces*. «Measure Theory», Lect. Notes in Math., n.º 541. Springer, Berlín, 1976.

[14] TWEDDLE, I.: *Weak compactness in locally convex spaces*. «Glaskow Math. J.», **9** (1968), 123-127.

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid