COMPORTAMIENTO ASINTOTICO Y SOLUCIONES INVARIANTES DE SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS FINITAS CON VALORES INICIALES ALEATORIOS Y TEORIA ESTOCASTICA DEL CONTROL

Darío Maravall Casesnoves

Recibido: 10-X-79

In this paper another author's own researches are prolongued and the asintotic behaviour of the solutions of homogeneous and non-homogeneous systems of linear differential equations and finite difference equations whith random initial values are also expounded.

The necessary and sufficient conditions for the existence of invariant solutions and quadratic first integrals are obtained.

The necessary and sufficient conditions for the convergence of matrices series and integrals are investigated. Laplace and Fourier matrix integral transforms of a function are also defined.

1. Comportamiento asintótico de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas con valores iniciales aleatorios

Dado un sistema de m ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, escrito en forma matricial:

$$\frac{d\,\xi}{d\,t} = \mathrm{A}\,\xi\,, \qquad \mathrm{A} = \| a_{ij} \| \tag{1}$$ (*)

si:

$$\varphi_0(z) = \varphi_0(z_1, \ldots, z_m) \tag{2}$$

es la función característica (fc) de los valores iniciales aleatorios,

(*) A es una matriz no degenerada, es decir de determinante distinto de cero.

hemos demostrado en B) y E), véase bibliografía, que la fc de la solución del sistema, que es una variable aleatoria (v. a.) vale:

$$\varphi(\mathbf{z}, t) = \varphi(\mathbf{z}\,\mathrm{B}^{-1}(t)\,\mathrm{B}(0)) \tag{3}$$

siendo B (t) la matriz, tal que:

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\,\mathrm{B}(t) \tag{4}$$

es la integral general del sistema:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = -\mathbf{z}\,\mathbf{A} \tag{5}$$

Obsérvese que el resultado (4) es invariante al cambio:

$$\mathrm{B}(t) \rightarrow \mathrm{D}\,\mathrm{B}(t) \tag{6}$$

siendo D una matriz arbitraria de términos constantes, por ser:

$$[\mathrm{D}\,\mathrm{B}(t)]^{-1}\,\mathrm{D}\,\mathrm{B}(0) = \mathrm{B}^{-1}(t)\,\mathrm{B}(0) \tag{7}$$

Si todas las raíces $p_1, \ldots, p_m$ de la ecuación característica del sistema (1), que son las del (5) cambiadas de signo, son distintas, se tiene que:

$$\mathrm{B}(t) = \begin{Vmatrix} e^{-p_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{-p_2 t} & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & e^{-p_m t} \end{Vmatrix} \mathrm{B}(0) \tag{8}$$

y de aquí:

$$\mathrm{B}^{-1}(t) = \mathrm{B}^{-1}(0) \begin{Vmatrix} e^{p_1 t} & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & e^{p_m t} \end{Vmatrix} \tag{9}$$

Si p_1 es raíz doble en las matrices diagonales (8) y (9) hay que cambiar la primera submatriz 2×2 por las:

$$\begin{Vmatrix} e^{-p_1 t} & 0 \\ e^{-p_1 t}\,t & e^{-p_1 t} \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} e^{p_1 t} & 0 \\ -e^{p_1 t}\,t & e^{p_1 t} \end{Vmatrix} \tag{10}$$

respectivamente, que son inversas la una de la otra. Si p_1 es raíz triple, hay que cambiar en las matrices diagonales de (8) y (9) las primeras submatrices 3×3 por las:

$$\left\| \begin{matrix} e^{-p_1 t} & 0 & 0 \\ e^{-p_1 t}\, t & e^{-p_1 t} & 0 \\ e^{-p_1 t} \dfrac{t^2}{2} & e^{-p_1 t}\, t & e^{-p_1 t} \end{matrix} \right\| ; \quad \left\| \begin{matrix} e^{p_1 t} & 0 & 0 \\ -\, e^{p_1 t}\, t & e^{p_1 t} & 0 \\ e^{p_1 t} \dfrac{t^2}{2} & -\, e^{p_1 t}\, t & e^{p_1 t} \end{matrix} \right\| \qquad (11)$$

respectivamente, que son inversas.

Supongamos ahora que p_1 valga cero y que las partes reales de las otras raíces p sean negativas:

$$p_1 = 0; \quad \mathrm{R}\, p_2 < 0; \ldots ; \mathrm{R}\, p_m < 0 \qquad (12)$$

entonces cuando t tiende a infinito, la matriz diagonal de (9) tiende a la:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\| \qquad (13)$$

y si representamos por b'_{ij}, b_{ij} los términos generales de las matrices $\mathrm{B}^{-1}(0)$ y $\mathrm{B}(0)$:

$$b'_{ij} = \frac{\mathrm{B}_{ji}}{|\,\mathrm{B}\,|} \qquad (14)$$

se tiene que:

$$\mathrm{B}^{-1}(\infty)\, \mathrm{B}(0) = \left\| \begin{matrix} b'_{11} b_{11} & b'_{11} b_{12} & \ldots & b'_{11} b_{1m} \\ b'_{21} b_{11} & b'_{21} b_{12} & \ldots & b'_{21} b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b'_{m1} b_{11} & b'_{m1} b_{12} & \ldots & b'_{m1} b_{1m} \end{matrix} \right\| \qquad (15)$$

y la (3) para $t = \infty$, vale:

$$\varphi\, z\, \infty) = \varphi_0 (b_{11} (b'_{11} z_1 + \ldots + b'_{n1} z_m), \ldots, b_{1m} (b'_{11} z_1 + \ldots + b'_{n1} z_m)) \qquad (16)$$

que puede escribirse:

$$\psi (b'_{11} z_1 + \ldots + b'_{m1} z_m) \qquad (17)$$

que muestra que las v. a.:

$$\frac{\xi_1}{b'_{11}}; \ldots; \frac{\xi_m}{b'_{m1}} \tag{18}$$

convergen en probabilidad, unas a otras.

La fc de la distribución marginal de la v. a. ξ_1, se obtiene haciendo en (16) todas las z iguales a cero, menos la z_1; es por tanto:

$$\varphi\,(b'_{11}\, b_{11}\, z_1, b'_{11}\, b_{12}\, z_1, \ldots, b'_{11}\, b_{1m}\, z_1) \tag{19}$$

Su valor medio, vale:

$$b'_{11}\,(b_{11}\, \xi_1(0) + b_{12}\, \xi_2(0) + \ldots + b_{1m}\, \xi_m(0), \tag{20}$$

Si las v. a. son absolutamente continuas, existe su función de frecuencias (ff) $f(x_1, \ldots, x_m, t)$, cuando t tiende a infinito no tiende a una ff, por ser su fc de la forma (17), pero en cambio cualquiera de las ff de las distribuciones marginales de las ξ si a una ff, la de ξ_1 tiende a la ff que corresponde a la fc (19).

Supongamos ahora que p_1 es raíz real simple, y que:

$$R\,p_2 < p_1; \ldots; R\,p_m < p_1 \tag{21}$$

las partes reales de las otras raíces p son menores que p_1, entonces la fc de la distribución de las v. a.

$$\xi_1\, e^{-p_1 t}, \ldots, \xi_m\, e^{-p_1 t}$$

es:

$$\varphi_0 \left(\mathbf{z}\, B^{-1}(0) \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{(p_2 - p_1)\,t} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & e^{(p_m - p_1)\,t} \end{Vmatrix} B(0) \right) \tag{22}$$

y cuando t tiende a infinito, se obtiene el mismo resultado anterior, es decir que la fc para $t = \infty$ de las:

$$\xi_1\, e^{-p_1 t}; \ldots; \xi_m\, e^{-p_1 t} \tag{23}$$

es la (16), y por tanto todas estas v. a. convergen en probabilidad unas a otras, convergen a ser casi ciertamente iguales.

Si:

$$p_1 > 0 \tag{24}$$ (*)

cuando t tiende a infinito, las v. a. ξ tienden a infinito, pero las (23) tienden a una distribución asintótica de probabilidad, de modo que la distribución marginal de la primera (23) tiende a la fc (19). Existe por tanto una posibilidad de reducción a escala exponencial (multiplicación por $e^{-p_1 t}$) de modo que v. a. infinitamente grandes se reduzcan a v. a. a escala ordinaria.

Si:

$$p_1 < 0 \tag{25}$$ (**)

cuando t tiende a infinito, las v. a. ξ tienden a cero, pero las (23) tienden a la misma distribución asintótica de probabilidad. Existe en este caso una posibilidad de amplificación a escala exponencial, de modo que v. a. infinitamente pequeñas, se amplíen a v. a. a escala ordinaria.

Los resultados anteriores muestran la mayor riqueza matemática de esta teoría probabilística de las ecuaciones diferenciales, respecto a la teoría clásica determinista.

Supongamos ahora que p_1 sea una raíz real doble, y que como anteriormente se cumplan las (21), entonces la fc de las v. a.:

$$\frac{\xi_1}{t\, e^{p_1 t}}, \ldots, \frac{\xi_m}{t\, e^{p_1 t}} \tag{26}$$

cuando t tiende a infinito, por lo dicho en (10) la fc de las v. a. (26) tiende a la:

$$\varphi\left(z\, B^{-1}(0) \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\| B(0) \right) \tag{27}$$

es decir a la:

$$\varphi(-b_{11}(b'_{12} z_1 + \ldots + b'_{m2} z_m), \ldots, -b_{1m}(b'_{12} z_1 + \ldots + b'_{m2} z_m)) \tag{28}$$

(*) Porque:

$$\varphi(\infty, \infty) = 0 \tag{24 bis}$$

(**) Porque:

$$\varphi(0, \infty) = 1 \tag{25 bis}$$

que muestra que las v. a. (26) convergen en probabilidad unas a otras, a ser casi ciertamente iguales, cuando el tiempo tiende a infinito.

Y en general si p_1 es una raíz real de multiplicidad h, y se cumplen las (21), las v. a. (29) convergen en probabilidad unas a otras, por ser la fc de la distribución de probabilidad asintótica de estas v. a.:

$$\frac{\xi_1}{t^h e^{p_1 t}}; \ldots ; \frac{\xi_m}{t^h e^{p_1 t}} \tag{29}$$

la:

$$\varphi\left((-1)^{h-1} b_{11} (b'_{1h} z_1 + \ldots + b'_{mh} z_m), \ldots, (-1)^{h-1} b_{1m} (b'_{1h} z_1 + \ldots + b'_{mh} z_m)\right) \tag{30}$$

A medida que crece la multiplicidad de la raíz p_1, varía la escala de amplificación o reducción (29) de las v. a. ξ que convergen a cero o infinito, para llevarlas a escala ordinaria, según se dé (25) o (24), pero se obtiene siempre el mismo resultado, que es la existencia de una distribución asintótica de probabilidad, cuya fc es combinación lineal de las m variables z (convergencia en probabilidad antecitada).

Un análisis detallado para el caso de dos variables ha sido realizado por la profesora M.ª Dolores Maravall Gómez-Allende en sus investigaciones sobre el péndulo estocástico.

Supongamos ahora el caso de un sistema de m ecuaciones lineales en diferencias finitas de primer orden y coeficientes constantes, cuando los valores iniciales son aleatorios:

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \mathrm{A}\, \boldsymbol{\xi}_n \tag{31}$$

En B) y E) hemos demostrado que si (2) es la fc de los valores iniciales aleatorios, se cumple para las v. a. soluciones de (31) en el instante enésimo:

$$\varphi_n(\mathbf{z}) = \varphi_{n-1}(\mathbf{z}\,\mathrm{A}) = \varphi_0(\mathbf{z}\,\mathrm{A}^n) \tag{32}$$

que se escribe también:

$$\varphi_n(\mathbf{z}) = \varphi_0(\mathbf{z}\,\mathrm{B}_0^{-1}\,\mathrm{B}_n) \tag{33}$$

siendo B_n la matriz tal que:

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{c}\, B_n \tag{34}$$

es la solución del sistema:

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_n\, A \tag{35}$$

y es:

$$B_n = \begin{Vmatrix} r_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r^n_m \end{Vmatrix} B(0) \tag{36}$$

siendo las r las raíces de la ecuación característica del sistema (31) o (35) que son las mismas.

Los resultados obtenidos para las ecuaciones diferenciales en lo relativo al comportamiento asintótico, se generalizan a las ecuaciones en diferencias finitas, sin más que efectuar el cambio de (3) por (33) y el de $e^{p\,t}$ por r^n y t por n en las potencias, y de «parte real menor que cero» por «módulo menor que la unidad».

Sin embargo existe otra posibilidad para las ecuaciones en diferencias finitas, sin homólogo en las ecuaciones diferenciales, y es el que corresponde a valores negativos de las r, porque en ese caso es:

$$r^n = (-1)^n \mid r \mid^n \tag{37}$$

mientras que para las exponenciales $e^{p\,t}$ el signo siempre es el mismo.

En el caso en que $r_1 < 0$, para las v. a.:

$$\frac{\xi_1}{r_1^n}; \dots; \frac{\xi_m}{r_1^n} \tag{38}$$

cuando n tiende a infinito, se obtienen los mismos resultados que para $r_1 > 0$ mientras que para las:

$$\frac{\xi_1}{\mid r_1 \mid^n}; \dots; \frac{\xi_m}{\mid r_1 \mid^n} \tag{39}$$

se obtiene:

$$n \to \infty; \quad \varphi_{2n}(\mathbf{z}) = \varphi_{2n+1}(-\mathbf{z}) \tag{40}$$

alternativamente según que n sea par o impar, cambia el signo del argumento z de la fc de la distribución asintótica.

Supongamos ahora el caso en que $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, y los módulos de las restantes r inferiores a la unidad; cuando n tiende a infinito, la fc tiende a la:

$$\varphi_0 \left(\mathbf{z}\, B_0^{-1} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mp 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} B_0 \right) \tag{41}$$

que es igual a:

$$\begin{gathered} \varphi_0 (b_{11} (b'_{11} z_1 + \ldots + b'_{m1} z_m) \mp b_{21} (b'_{12} z_1 + \ldots + b'_{m2} z_m), \ldots \\ \ldots, b_{1m} (b'_{11} z_1 + \ldots + b'_{m1} z_m) \mp b_{2m} (b'_{12} z_1 + \ldots + b'_{m2} z_m)) \end{gathered} \tag{42}$$

que es una función de dos variables, combinaciones lineales de las z que se escribe:

$$\phi (b'_{11} z_1 + \ldots + b'_{m1} z_m, \mp b'_{12} z_1 \ldots \mp b'_{m2} z_m) \tag{43}$$

que muestra que la v. a. emedimensional ξ cuando el tiempo tiende a infinito, converge en probabilidad a la v. a. bidimensional, cuya fc es la función de dos variables (43). En los casos anteriores la v. a. emedimensional convergía en probabilidad a una v. a. unidimensional.

El profesor Darío Maravall Gómez-Allende en sus investigaciones sobre poblaciones y teoría de autómatas ha investigado profundamente el caso de dos variables, con anterioridad a la redacción de esta memoria.

2. Sistemas singulares o degenerados de ecuaciones diferenciales o en diferencias finitas. Distribuciones multinomiales de probabilidades aleatorias

En el caso en que la matriz A del sistema (31) sea tal, que la suma de los elementos de cada columna es igual a la unidad:

$$a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{m1} = \ldots = a_{1m} + a_{2m} + \ldots + a_{mm} = 1 \tag{44}$$

se sigue que:

$$\xi_{1n} + \ldots + \xi_{mn} = \xi_{10} + \ldots + \xi_{m0} \tag{45}$$

y si en (32) hacemos todas las z iguales entre sí, se obtiene:

$$\varphi_n(z,z,\ldots,z) = \varphi_0(z,z,\ldots,z) \tag{46}$$

La (45) muestra que en la teoría clásica determinista la suma de las ξ es constante, es una integral primera. La (46) muestra que en la teoría probabilista, la v. a. suma de las v. a. ξ es una v. a. cuya distribución de probabilidad es constante (independiente del tiempo), a lo que hemos propuesto llamarle también *integral primera* en esta nueva teoría.

Si la suma de todos los elementos de cada columna de A es una constante C, lo que equivale a cambiar 1 por C en (44), las v. a.:

$$\frac{\xi_{1n}}{C^n}, \ldots, \frac{\xi_{mn}}{C^n} \tag{47}$$

se comportan como en el caso anterior.

Cuando en un sistema (31) se cumple la condición (44) le podemos llamar *singular* o *degenerado*, y mientras que en la teoría clásica determinista solamente da origen a un problema, en esta teoría probabilista da origen a dos problemas. Uno es el tratado en el § 1, cumpliéndose en este caso particular el teorema relativo a la existencia de la integral primera (46). Otro resulta de imponer la condición restrictiva de que en todo instante n se ha de cumplir la relación:

$$\xi_{1n} + \xi_{2n} + \ldots + \xi_{mn} = 1 \tag{48}$$

compatible con (45), pero no equivalente. No hay pérdida de generalidad en suponer el segundo miembro de (48) igual a la unidad, porque si fuera otra constante C, dividiendo las ξ por C se lleva a este caso.

Llevando el valor de ξ_m deducido de (48) a las $m-1$ primera ecuaciones de (31), se obtiene:

$$\boldsymbol{\xi}'_{n+1} = A' \boldsymbol{\xi}'_n + \mathbf{a}' \tag{49}$$

donde ahora $\boldsymbol{\xi}'$ es el vector de $m-1$ componentes $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$, $\mathbf{a}'$

el vector de $m-1$ componentes $a_{1m}, \ldots, a_{m-1m}$, y A′ la matriz:

$$A' = \left\| \begin{array}{c} a_{11} - a_{1m} \ldots a_{1m-1} - a_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m-11} - a_{m-1m} \ldots a_{m-1m-1} - a_{m-1m} \end{array} \right\| \qquad (50)$$

Si llamamos $\mathbf{z}'$ al vector de $m-1$ componentes $z_1, \ldots, z_{m-1}$, si $\varphi_0(\mathbf{z}')$ es la fc de los valores iniciales del vector ξ', la fc de este vector en el instante enésimo viene dada por:

$$\varphi_{n+1}(\mathbf{z}') = e^{i(a_{1m} z'_1 + \ldots + a_{m-1m} z'_{m-1})} \varphi_n(\mathbf{z}' A') \qquad (51)$$

de la que se sigue que:

$$\varphi_n(\mathbf{z}') = e^{i < \mathbf{z}' (\mathrm{I} + A' + \ldots + A'^{n-1}) \mathbf{a}' >} \varphi_0(\mathbf{z}' A'^n) \qquad (52\ ^*)$$

La fc del vector:

$$\xi'_n - (\mathrm{I} + A' + \ldots + A'^{n-1}) \mathbf{a}' \qquad (53)$$

es la:

$$\varphi_0(\mathbf{z}' A'^n) \qquad (54)$$

cuyo método de resolución, comportamiento asintótico, etc., es el mismo que el de los sistemas investigados en el § 1.

Si:

$$\lim_{n \to \infty} A'^n = \| 0 \| \qquad (55)$$

se sigue que el vector ξ'_n cuando n tiende a infinito converge en probabilidad a la solución del sistema (31) cierto, que es el sustraendo de (53).

Un caso curioso, es aquel en que:

$$\lim_{n \to \infty} A'^n = (-1)^n A'' \qquad (56)$$

y existen entonces los dos límites:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{2n} A'^i; \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{2n+1} A'^i \qquad (57)$$

(*) I es la matriz unidad.

porque se sigue que cuando n tiende a infinito, según que n sea par o impar la fc (52) converge alternativamente a dos límites distintos. Este caso se da cuando -1 es raíz característica de A′ y las $m-2$ otras raíces son de módulo menor que la unidad.

Si la matriz A de (31) es la traspuesta de una estocástica, entonces se cumplen las (44) con todas las a_{ij} no negativas, y si inicialmente el vector ξ es un vector de probabilidad, lo es en todo instante, y si $\varphi_0(z')$ es la fc de una v. a. de $m-1$ dimensiones, tal que:

$$\xi'_1 \geq 0, \ldots, \xi'_{m-1} \geq 0; \quad 0 \leq \xi'_1 + \ldots + \xi'_{m-1} \leq 1 \tag{58}$$

en todo instante $\varphi_n(z')$ es la fc de una v. a. que cumple también la anterior condición (58).

El proceso puede describir la evolución en el tiempo (discreto) de una distribución de probabilidades multinomial, cuya fc es:

$$(\xi_1 e^{iz_1} + \ldots + \xi_m e^{iz_m})^a \tag{59}$$

de modo que para los valores medios, se tiene:

$$a\bar{\xi}_i; \quad i = 1, 2, \ldots m \tag{60}$$

y para los valores medios cuadráticos:

$$a(a-1)\overline{\xi_i \xi_j}; \quad a(a-1)\overline{\xi_i^2} + a\bar{\xi}_i; \quad i, j = 1, 2, \ldots, m \tag{61}$$

Supongamos ahora que la matriz A del sistema (1) sea tal que la suma de todos los elementos de cada columna sea igual a cero:

$$a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{m1} = \ldots = a_{1m} + a_{3m} + \ldots + a_{mm} = 0 \tag{62}$$

entonces se sigue que se cumplen también las (45) y (46), porque como demostramos en B) y en E), la ecuación en derivadas parciales a que satisface $\varphi(z, t)$ es la:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} z_j \tag{63}$$

que al hacer todas las z iguales entre sí, en virtud de las (62) da:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \varphi(\mathbf{z}, t) = \varphi(\mathbf{z}, 0) \tag{64}$$

que muestra la existencia de la integral primera (64), como sucedía en el caso discreto (46).

También la condición (48) da origen a dos problemas distintos dentro de la teoría probabilista, porque si imponemos la condición (48) el sistema (1) se transforma en el:

$$\frac{d\,\xi}{d\,t} = \mathrm{A}'\,\xi + \mathbf{a}' \tag{65}$$

con el mismo significado para las letras que en el caso discreto.

Por el mismo método indicado en B) y en E), la solución del sistema (65) cuando los valores iniciales de las componentes del vector $\mathbf{z}'$ son aleatorios, se obtiene resolviendo la ecuación funcional:

$$\varphi(\mathbf{z}', t + d\,t) = e^{i < \mathbf{z}', \mathbf{a}' > d\,t}\,\varphi(\mathbf{z}'(\mathrm{I} + \mathrm{A}'\,d\,t)) \tag{66}$$

cuya solución es la misma, aun cuando la $\varphi(\mathbf{z}, t)$ no sea derivable que la de la ecuación en derivadas parciales, que se obtiene a partir de la ecuación funcional (66), cuando φ tiene derivadas de primero y segundo orden continuas, que es:

$$\varphi(\mathbf{z}', t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,d\,t = (1 + i\,\langle\, \mathbf{z}; \mathbf{a}'\,\rangle\,d\,t)\left[\varphi + d\,t \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z'_i} \sum_{j=1}^{m-1} a'_{ji}\,z'_j\right] \tag{67}$$

de la que se sigue que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi\, i \sum_{i=1}^{m-1} a'_i\,z'_i + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial z'_i} \sum_{j=1}^{m-1} a'_{ji}\,z'_j \tag{68 *}$$

que se distingue de la (63) por el primer sumando del segundo miembro.

Para integrar la (68), formemos el sistema de ecuaciones diferenciales auxiliar que es el:

$$-\,d\,t = \ldots = \frac{d\,z'_i}{\Sigma\, a'_{ji}\,z'_j} = \ldots = \frac{-\,d\,\varphi}{\varphi\, i\, \Sigma\, a'_i\,z'_i} \tag{69}$$

(*) No debe confundirse $i = \sqrt{-1}$ con i como subíndice.

que se pueden escribir en la forma:

$$\frac{d\,\mathbf{z}'}{d\,t} = -\,\mathbf{z}'\,A'; \qquad i\,\langle\,\mathbf{z}'\,\mathbf{a}'\,\rangle\,d\,t = \frac{d\,\varphi}{\varphi} \tag{70}$$

que admite las integrales primeras:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{C}'\,B'(t); \qquad \varphi = h\,e^{\int_0^t i<\mathbf{C}'B'(\tau)\,\mathbf{a}'>\,d\tau} \tag{71}$$

la segunda, se obtiene sustituyendo en la segunda (70) el vector $\mathbf{z}'$ por su valor deducido de la primera (70).

Una solución de (67) es: el resultado de sustituir en:

$$h = g\,(\mathbf{C}') \tag{72}$$

siendo g una función arbitraria, h y $\mathbf{C}'$ por sus valores deducidos de (71). Y como para $t = 0$, de (71) y (72) se sigue que:

$$h = \varphi = g\,(\mathbf{z}'\,B'^{-1}\,(0)) \tag{73}$$

y si $\varphi_0\,(\mathbf{z}')$ es la fc inicial, ha de ser:

$$\varphi_0\,(\mathbf{z}') = g\,(\mathbf{z}'\,B'^{-1}\,(0)) \Longrightarrow g\,(\mathbf{z}') = \varphi_0\,(\mathbf{z}'\,B'\,(0)) \tag{74}$$

y por tanto sustituyendo en (72) g por su valor (74), y h y $\mathbf{C}'$ por sus valores deducidos de las (71), después de sustituir también en la segunda (71) $\mathbf{C}'$ por su valor deducido de la primera (72), se obtiene como solución de (66) o (68) con la condición inicial de que para $t = 0$ valga $\varphi_0\,(\mathbf{z}')$, la expresión:

$$\varphi\,(\mathbf{z}', t) = \varphi\,(\mathbf{z}'\,B'^{-1}\,(t)\,B'\,(0))\,e^{i\int_0^t <\mathbf{z}'\,B'^{-1}(t)\,B'(\tau)\,\mathbf{a}'>\,d\tau} \tag{75}$$

que da la fc en el instante t del vector aleatorio $\boldsymbol{\xi}'$ solución del sistema (65) que inicialmente es igual al vector aleatorio de fc la antecitada $\varphi_0\,(\mathbf{z}')$. Obsérvese que la fc del vector:

$$\boldsymbol{\xi}' - \int_0^t \langle\mathbf{z}'\,B'^{-1}\,(t)\,B'\,(\tau)\,\mathbf{a}'\rangle\,d\,\tau \tag{76}$$

tiene una fc que se obtiene por el método indicado en el § 1, y al que le es aplicable la discusión allí expuesta.

Supongamos ahora que además de cumplirse las condiciones (62), todos los elementos de la diagonal de A son negativos y los restantes no negativos, en ese caso si inicialmente $\xi(0)$ es un vector de probabilidad, lo sigue siendo en todo instante t, porque por lo visto anteriormente, la suma de todas las componentes de ξ sigue siendo la unidad, y cada una de ellas está constantemente comprendida entre 1 y 0, porque si en un instante dado una cualquiera la $\xi_i(t)$ llega a valer 1, entonces las restantes componentes son nulas, y se tiene que:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = a_{ii} < 0 \tag{77}$$

luego $\xi_i(t)$ decrece y no supera el valor 1. Si por el contrario $\xi_i(t)$ llega a valer cero, entonces es:

$$\frac{d\xi_i}{dt} > 0 \tag{78}$$

por ser todas las a_{ij} con j distinta de i positivas, luego $\xi_i(t)$ crece y no se hace por tanto nunca inferior a cero.

El proceso en este caso puede describir la evolución en el tiempo (continuo) de una distribución multinomial de probabilidades aleatorias.

Con anterioridad a la redacción de esta memoria el profesor Darío Maravall Gómez-Allende había investigado profundamente el caso de dos variables al desarrollar un modelo probabilístico de la teoría del aprendizaje en sus investigaciones sobre la teoría de los autómatas probabilísticos.

3. Soluciones invariantes e integrales primeras cuadráticas de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales o en diferencias finitas con valores iniciales aleatorios

La condición para que el sistema (31) tenga una solución invariante es que:

$$\varphi_{n+1}(\mathbf{z}) = \varphi_n(\mathbf{z}\,\mathrm{A}) = \varphi_n(\mathbf{z}) \tag{79}$$

lo que exige que el argumento de la función φ_0 sea una forma cuadrática:

$$\langle \mathbf{z} \, M \, \mathbf{z} \rangle \tag{80}$$

y como la sustitución de $\mathbf{z}$ por $\mathbf{z}$ A en (79), equivale a efectuar en (80) la sustitución de la matriz M por la A M A^t, siendo A^t la traspuesta de A, la condición para que exista una solución invariante de (31) es:

$$A \, M \, A^t = M \tag{81}$$

En particular la condición para que una distribución de probabilidad de simetría esférica (M = I) sea solución invariante es que:

$$A \, A^t = I \Longrightarrow A^t = A^{-1} \tag{82}$$

es decir que A sea una matriz ortogonal.

En el caso del sistema (1) la condición de solución invariante es que hasta infinitésimos de primer orden se cumpla la:

$$(I + A \, d\,t) \, M \, (I + A^t \, d\,t) = M \Longrightarrow A \, M + M \, A^t = \| \, 0 \, \| \tag{83}$$

debido a que la $\varphi(\mathbf{z}, t)$ obedece a la ecuación funcional:

$$\varphi(\mathbf{z}, t + d\,t) = \varphi(\mathbf{z} \, (I + A \, d\,t), t) \tag{84}$$

En particular la condición para que una distribución de probabilidad de simetría esférica sea solución invariante es que:

$$A + A^t = 0 \tag{85}$$

es decir que A sea una matriz antisimétrica.

En E) hemos expuesto la condición para que una v. a. sea una integral primera (distribución de probabilidad independiente del tiempo) de los sistemas (1) y (31). Vamos a ver ahora la condición para que el valor medio de una forma cuadrática, o una forma cuadrática de los valores medios, respectivamente:

$$\langle \overline{\xi \, M \, \xi} \rangle \; ; \quad \langle \overline{\xi} \, M \, \overline{\xi} \rangle \tag{86}$$

sean integrales primeras del sistema (31) o el (1).

Supongamos que las v. a. soluciones de (31) sean absolutamente continuas, tengan ff, entonces en E) demostramos que para éstas se cumple la:

$$f_{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|A|} f_n(A^{-1}\mathbf{x}) \tag{87}$$

y si utilizamos la notación simbólica:

$$\int d\mathbf{x} = \int \ldots \int d x_1 \ldots d x_m \tag{88}$$

la constancia en el tiempo de la primera (86) exige que:

$$\frac{1}{|A|} \int \langle \mathbf{x}\, M\, \mathbf{x} \rangle f_n(A^{-1}\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int \langle \mathbf{x}\, M\, \mathbf{x} \rangle f_n(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{89}$$

y si efectuamos el cambio de variable:

$$A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y} \Rightarrow \frac{d\mathbf{x}}{|A|} = d\mathbf{y} \tag{90}$$

en la primera integral múltiple (89), se transforma en la:

$$\int \langle \mathbf{y}\, A^t\, M\, A\, \mathbf{y} \rangle f_n(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \tag{91}$$

y para que sea igual a la segunda integral (89) se ha de cumplir que:

$$A^t M \mathbf{A} = M \tag{92}$$

que coincide con (81) si A es una matriz simétrica.

Para el sistema (1) por la misma razón que en (83) se obtiene a partir de (92) efectuando la sustitución de A por I + A $d\,t$, como condición:

$$A^t M + M \mathbf{A} = \| 0 \| \tag{93}$$

(83) y (93) coinciden si A es simétrica, y en ese caso la (83) o la (93), que son iguales, significan que A y M anticonmutan.

La condición para que sea integral primera la segunda (86) es la misma y se demuestra de análoga manera. Asimismo esta demostración se puede extender al caso de v. a. que no tengan ff (que no sean absolutamente continuas).

En sus investigaciones sobre el péndulo estocástico la profesora M.ª Dolores Maravall Gómez-Allende había encontrado integrales primeras de la forma (86) para el caso de la ecuación diferencial lineal del péndulo.

Las (86) son integrales primeras, cuando lo son, que también son cantidades ciertas, pero:

$$\langle \xi \, M \, \xi \rangle \tag{94}$$

en ese caso también es una integral primera, y es una v. a., cuya fc se obtiene efectuando en las integrales (89) el cambio:

$$\langle \mathbf{x} \, M \, \mathbf{x} \rangle \longrightarrow e^{i\, z \langle \mathbf{x}\, M\, \mathbf{x} \rangle}. \tag{95}$$

Mientras que para la existencia de soluciones invariantes es preciso que la fc sea función de una forma cuadrática, por el contrario para que existan integrales primeras cuadráticas no hace falta que se cumpla esta condición.

4. Sistemas no homogéneos de ecuaciones lineales diferenciales o en diferencias finitas con valores iniciales aleatorios. Entradas gaussianas

Si en vez del sistema homogéneo (31) consideramos el no homogéneo:

$$\xi_{n+1} = A\, \xi_n + \mathbf{n} \tag{96}$$

y $\psi(\mathbf{z})$ es la fc del vector aleatorio $\mathbf{n}$, en B), C) y E) hemos demostrado que la solución del sistema (96) es la de la ecuación funcional:

$$\varphi_{n+1}(\mathbf{z}) = \varphi_n(\mathbf{z}\, A)\, \psi(\mathbf{z}) \tag{97}$$

de la que se sigue que:

$$\varphi_n(\mathbf{z}) = \varphi_0(\mathbf{z}\, A^n)\, \psi(\mathbf{z}\, A^{n-1}) \ldots \psi(\mathbf{z}\, A)\, \psi(\mathbf{z}) \tag{98}$$

Supongamos ahora que $\mathbf{n}$ sea una v. a. gaussiana, entonces es:

$$\psi(\mathbf{z}) = e^{i<\mathbf{z}\,\mathbf{m}> - \frac{1}{2}<\mathbf{z}\,M\,\mathbf{z}>} \tag{99}$$

y la (98) se escribe:

$$\varphi_n(\mathbf{z}) = \varphi_0(\mathbf{z}\,A^n)\, e^{i<\mathbf{z}\,\mathbf{m}_n> - \frac{1}{2}<\mathbf{z}\,M_n\,\mathbf{z}>} \tag{100}$$

siendo:

$$\mathbf{m}_n = (A^{n-1} + \ldots + A + I)\,\mathbf{m} \tag{101}$$

y:

$$M_n = A^{n-1}\,M\,A^{t\,n-1} + \ldots + A\,M\,A^t + M \tag{102}$$

que da la solución de este problema. Si existen los límites:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{m}_n; \qquad \lim_{n\to\infty} M_n \tag{103}$$

existen también los límites:

$$\lim_{n\to\infty} A^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_0(\mathbf{z}\,A^n) = \varphi_0(\mathbf{0}) = 1 \tag{104}$$

y la solución del sistema (96) es una v. a. gaussiana, cuya fc es la exponencial de (100) y por tanto la solución es independiente del valor inicial de la fc $\varphi_0(\mathbf{z})$, lo que es un teorema ergódico.

Si la matriz M conmuta con la A o con la A^t (traspuesta de la A), entonces se escribe la (102) en la forma:

$$M_n = M\,[(A\,A^t)^{n-1} + \ldots + (A\,A^t) + I] \quad \text{ó} \quad M_n = [(A\,A^t)^{n-1} + \ldots + I]\,M \tag{105}$$

de más fácil cálculo. Si las matrices $I - A$ y $I - A\,A^t$ son invertibles, lo que sucede si la unidad no es raíz característica de A ni de $A\,A^t$, y si existe el límite (104), lo que sucede si todas las raíces características de A son de módulo inferior a la unidad, entonces es:

$$\mathbf{m}_\infty = (I - A)^{-1}\,\mathbf{m}; \quad M_\infty = M\,(I - A\,A^t)^{-1} \quad \text{ó} \quad M_\infty = (I - A\,A^t)^{-1}\,M \tag{106}$$

Pasemos ahora de las ecuaciones en diferencias finitas a las ecuaciones diferenciales y sea el sistema:

$$\frac{d\,\boldsymbol{\xi}}{d\,t} = \mathrm{A}\,\boldsymbol{\xi} + \mathbf{n} \tag{107}$$

siendo (99) la fc del vector $\mathbf{n}$. La solución de este sistema, es la fc que obedece a la ecuación funcional:

$$\varphi\,(\mathbf{z},\, t + d\,t) = \varphi\,(\mathbf{z}\,(\mathrm{I} + \mathrm{A}\,d\,t),\, t)\; e^{(i\,\langle \mathbf{z}\,\mathbf{m}\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{z}\;\mathrm{M}\;\mathbf{z}\rangle)\,d\,t} \tag{108}$$

y si existen las derivadas primeras y segundas de φ y son continuas, la (108) equivale a la ecuación en derivadas parciales que resulta de sustituir en la (67) el primer factor del segundo miembro por el:

$$1 + (i\,\langle \mathbf{z}\,\mathbf{m}\rangle - \frac{1}{2}\,\langle \mathbf{z}\;\mathrm{M}\;\mathbf{z}\rangle)\,d\,t \tag{109}$$

y en la (68) el primer sumando del segundo miembro por:

$$\varphi\,(i\,\langle \mathbf{z}\,\mathbf{m}\rangle - \frac{1}{2}\,\langle \mathbf{z}\;\mathrm{M}\;\mathbf{z}\rangle) \tag{110}$$

por lo que el sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales es el (69) si se sustituye la última por la:

$$-\,d\,t = \frac{-\,d\,\varphi}{\varphi\,(i\,\langle \mathbf{z}\,\mathbf{m}\rangle - \frac{1}{2}\,\langle \mathbf{z}\;\mathrm{M}\;\mathbf{z}\rangle)} \tag{111}$$

que se resumen en el primer sistema (70) y en vez de la segunda (70) la:

$$\frac{d\,\varphi}{\varphi} = \left(i\,\langle \mathbf{z}\,\mathbf{m}\rangle - \frac{1}{2}\,\langle \mathbf{z}\;\mathrm{M}\;\mathbf{z}\rangle\right) d\,t \tag{112}$$

cuyas integrales primeras son el primer vector de (71) y en vez de la segunda (71) la:

$$\varphi = h\, e^{\int_0^t (i\,\langle \mathbf{C}\,\mathrm{B}\,(\tau)\,\mathbf{m}\rangle - \frac{1}{2}\,\langle \mathbf{C}\;\mathrm{B}\,(\tau)\;\mathrm{M}\;\mathrm{B}^t\,(\tau)\,\mathbf{C}\rangle)\,d\,\tau} \tag{113}$$

por lo que la solución de (108) es el resultado de sustituir en (75) la exponencial por la:

$$e^{\int_0^t \left(i < \mathbf{z}\, B^{-1}(t)\, B(\tau)\, \mathbf{m} > - \frac{1}{2} < \mathbf{z}\, B^{-1}(t)\, B(\tau)\, M\, B^{t}(\tau)\, B^{t-1}(t)\, \mathbf{z} > \right) d\tau} \qquad (114)$$

Si:

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(\mathbf{z}\, B^{-1}(t)\, B(0)) = \varphi(0) = 1 \qquad (115)$$

lo que sucede si las partes reales de las raíces de la ecuación característica del sistema homogéneo, que resulta de suprimir el vector $\mathbf{n}$ en (107), son negativas, entonces la solución de (107) cuando el tiempo tiende a infinito converge en probabilidad a la v. a. gaussiana de fc (114).

5. Caso de coeficientes variables en el tiempo

En los § 1 a § 4 hemos considerado los coeficientes constantes en los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales o en diferencias finitas, pero el método de resolución anterior se generaliza sin más, al caso en que los coeficientes son variables en el tiempo, porque la segunda (70) o la (111) es una ecuación diferencial de variables separadas. Lo que no se generaliza es la discusión anterior (comportamiento asintótico, soluciones invariantes, etc.) porque ésta depende de la forma particular que tienen las matrices B (t), que para coeficientes constantes dependen de exponenciales o de productos de exponenciales por polinomios. Véase B), C) y E).

6. Una nueva fórmula del cálculo matricial. Transformadas matriciales de Laplace y de Fourier

Por lo visto en las fórmulas (31) a (36) la potencia enésima de una matriz A no degenerada, se puede escribir en la forma:

$$A^n = B_0^{-1}\, B_n = B_0^{-1}\, \Delta_n\, B_0 \qquad (116)$$

siendo las matrices B (0), B^{-1} (0) de términos constantes, y la Δ_n igual a la primera matriz del segundo miembro de (36) si todas las raíces r de la ecuación característica de la matriz A son distintas.

En caso de que r_1 sea raíz doble o triple, la primera submatriz diagonal 2×2 ó 3×3 respectivamente de la Δ_n se escribe

$$\begin{Vmatrix} r_1^n & 0 \\ n\, r_1^{n-1} & r_1^n \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} r_1^n & 0 & 0 \\ n\, r_1^{n-1} & r_1^n & 0 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} r_1^{n-2} & n\, r_1^{n-1} & r_1^n \end{Vmatrix} \tag{117}$$

y en general si r_1 es una raíz de multiplicidad h, la primera submatriz diagonal $h \times h$ de Δ_n, es una submatriz triangular inferior, cuya primera fila tiene el único elemento no nulo igual a r_1^n, la fila k tiene k elementos no nulos, que por orden son los:

$$\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\, r_1^{k-1}} (r_1^n) \ldots \frac{d}{d\, r_1} (r_1^n), \quad r_1^n \tag{118}$$

y así hasta la h fila, que tiene los h primeros elementos no nulos, que por orden son los:

$$\frac{1}{(h-1)!} \frac{d^{h-1}}{d\, r_1^{h-1}} (r_1^n) \ldots \frac{d}{d\, r_1} (r_1^n), \quad r_1^n \tag{119}$$

Las matrices Δ_n, n variable, correspondientes a una misma matriz no degenerada A, forman un grupo conmutativo, respecto a la multiplicación, isomorfo al grupo aditivo de los números enteros. Si r_1 es una raíz simple es:

$$A^{-n} = B_0^{-1} \Delta_{-n} B_0; \quad \Delta_{-n} = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{r_i^n} \delta_{ij} \end{Vmatrix} \tag{120 *}$$

donde las δ_{ij} son las deltas de Kronecker. Si r_1 es una raíz doble o triple, la primera submatriz diagonal se ha de sustituir por una triangular 2×2 ó 3×3 respectivamente:

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{1}{r_1^n} & 0 \\ -\dfrac{n}{r_1^{n+1}} & \dfrac{1}{r_1^n} \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{r_1^n} & 0 & 0 \\ -\dfrac{n}{r_1^{n+1}} & \dfrac{1}{r_1^n} & 0 \\ \dfrac{n(n+1)}{2\, r_1^{n+2}} & -\dfrac{n}{r_1^{n+1}} & \dfrac{1}{r_1^n} \end{Vmatrix} \tag{121}$$

(*) $\Delta_0 = I$.

y en general si es raíz de multiplicidad h, la primera submatriz diagonal se ha de sustituir por un triangular inferior $h \times h$, cuyas tres primeras filas, solamente tienen como elementos no nulos, los mismos que la segunda (121), la fila k tiene los k primeros elementos no nulos, y los restantes nulos, por orden son:

$$\frac{1}{(k-1)!}\,\frac{d^{k-1}}{d\,r_1^{k-1}}\left(\frac{1}{r_1^n}\right)\ldots\frac{d}{d\,r_1}\left(\frac{1}{r_1^n}\right),\quad\frac{1}{r_1^n} \tag{122}$$

y la fila h los h elementos no nulos, por orden:

$$\frac{1}{(h-1)!}\,\frac{d^{h-1}}{d\,r_1^{h-1}}\left(\frac{1}{r_1^n}\right)\ldots\frac{d}{d\,r_1}\left(\frac{1}{r_1^n}\right),\quad\frac{1}{r_1^n} \tag{123}$$

y los restantes nulos.

Esta representación (116) de la matriz A^n, permite calcular con facilidad potencias enteras positivas o negativas de A, así como las sumas de estas potencias.

Si $f(z)$ es una función analítica desarrollable en serie de Taylor:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{124}$$

la función $f(A)$ está definida, si las series que resultan de sustituir en (124) z por las raíces $r_1, \ldots, r_m$ de la ecuación característica de A son convergentes, es decir si las r son interiores al círculo de convergencia de (124), y entonces debido a la (116) es:

$$f(A)=B_0^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Delta_n B_0 = B_0^{-1}\Delta(f) B_0 \tag{125}$$

siendo $\Delta(f)$ la matriz que resulta de sustituir en Δ_n las $r^n_1, \ldots, r^n_m$, por $f(r_1), \ldots, f(r_m)$; así que por ejemplo si r_1 es una raíz de multiplicidad h las (118) o (119) para $\Delta(f)$ serían:

$$\frac{1}{(h-1)!}\,\frac{d^{h-1}f(r_1)}{d\,r_1^{h-1}}\ldots\frac{d f(r_1)}{d\,r_1},\ f(r_1) \tag{126}$$

y los restantes elementos de estas filas nulos.

Si $g(z)$ es una función desarrollable en serie de Laurent:

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \tag{127}$$

debido a la definición de Δ_{rn}, se sigue que g (A) está definida si todas las raíces r pertenecen a la corona circular de convergencia de (127), es decir si las series que resultan de sustituir en (127) z por cada una de las r es convergente, y entonces es válida para g la fórmula (125) y la (126), con sólo sustituir en ella f y sus derivadas por g y sus derivadas.

La fórmula (116) permite pues, la investigación de las propiedades de las series de potencias enteras positivas y negativas de matrices no degeneradas. Asimismo se puede definir la función $f(z\,\mathrm{A})$ o $g(z\,\mathrm{A})$, y si por ejemplo todas las r son distintas es:

$$f(z\,\mathrm{A}) = \| f(z\,r_i)\,\delta_{ij} \| \tag{128}$$

o por ejemplo la primera (117) se escribiría:

$$\begin{Vmatrix} f(z\,r_1) & 0 \\ z\,f'(zr_1) & f(z\,r_1) \end{Vmatrix} \tag{129}$$

De lo anterior se sigue que toda función transcendente entera, por ser analítica en todo el plano, está definida para una matriz no degenerada.

La representación (116) *no es única*, porque la numeración de las raíces r de la ecuación característica de A puede ser cualquiera, porque por ser la inversa de la inversa de A igual a A, y también por ser la traspuesta de la traspuesta de A igual a A, se obtienen nuevas representaciones de A^n distintas de (116). Utilizando la última de estas propiedades, la representación de A^n emplea matrices triangulares superiores si hay alguna raíz múltiple de la ecuación característica.

La matriz que figura en (3) se escribe:

$$\mathrm{B}^{-1}(t)\,\mathrm{B}(0) = \mathrm{B}^{-1}(0)\,\Delta(t)\,\mathrm{B}(0) \tag{130}$$

siendo $\Delta(t)$ la segunda matriz del segundo miembro de (9), la segunda (10) o la segunda (11) según que p_1 sea raíz, simple, doble o triple de la ecuación característica de A, y en general si p_1 es una raíz de multiplicidad h, la primera submatriz diagonal $h \times h$ se ha de sustituir por una triangular inferior $h \times h$, cuyas tres primeras filas como elementos no nulos tienen los mismos que la segunda (11), la k fila tiene como únicos elementos no nulos, y por este orden los:

$$\frac{-(1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1} e^{p_1 t}}{d_{p_1}{}^{k-1}} \ldots - t e^{p_1 t}, \quad e^{p_1 t} \tag{131}$$

y así hasta la fila h. Obsérvese el cambio de signo en las derivadas de orden impar que se observa en $\Delta(t)$ respecto a Δ_n, ello es debido a que las matrices B que figuran en (3) y en (33) no son las mismas, las primeras proceden de resolver el sistema (5), con el signo menos, mientras que las segundas proceden de resolver el sistema (31) con el signo más.

Las $\Delta(t)$ correspondientes a una misma matriz A forman un grupo conmutativo respecto a la multiplicación, isomorfo al grupo aditivo de los números reales. Por tanto las fórmulas (75), (76) y (114) se pueden simplificar notablemente, porque se cumple que:

$$B^{-1}(t)\,B(\tau) = B^{-1}(0)\,\Delta(t)\,\Delta(-\tau)\,B(0) = B^{-1}(0)\,\Delta(t-\tau)\,B(0) = B^{-1}(t-\tau)\,B(0) \tag{132}$$

y al integrar en dichas fórmulas entre 0 y t, haciendo el cambio de variable $t - \tau = \sigma$, se puede efectuar en dichas integrales la sustitución:

$$B^{-1}(t)\,B(\tau) \longrightarrow B^{-1}(t-\tau) \tag{133}$$

Igual que hemos aplicado a las series de matrices la representación (116) se puede aplicar a las integrales de matrices la (130), y así calcular:

$$\int_0^t B^{-1}(t)\,B(0)\,f(t)\,d\,t$$

que si todas las raíces p de la ecuación característica de la matriz A son distintas se escribe:

$$B^{-1}(0)\,\|\,F(-p_i)\,\delta_{ij}\,\|\,B(0) \tag{135}$$

donde las δ_{ij} son las deltas de Kronecker y las $F(-p_i)$, el resultado de sustituir en la transformada de Laplace (TL) de $f(t)$ p por cada una de las p_i. Para que la integral (134) exista es preciso que sean convergentes las integrales:

$$\int_0^\infty e^{p_i t} f(t)\, dt \tag{136}$$

es decir que todas las p_i sean inferiores a la abscisa de convergencia de la TL de $f(t)$.

Si una p_i es raíz de multiplicidad h, de la forma de $\Delta(t)$ se sigue que la primera submatriz diagonal $h \times h$ de (135) ha de ser sustituida por una triangular inferior, cuya k fila tiene por elementos no nulos, y escritos en este orden los:

$$\frac{1}{(k-1)!} F^{k-1}(-p_i) \ldots F'(-p_i), \quad F(-p_i) \tag{137}$$

Como (4) es la solución del sistema (5), que para $t = 0$ es igual a $\mathbf{C}$ B (0), se sigue que:

$$B(t) = B(0)\, e^{-At} \Rightarrow B^{-1}(t)\, B(0) = e^{At} \tag{138}$$

y por tanto la (3) se escribe:

$$\varphi(\mathbf{z}, t) = \varphi(\mathbf{z}\, e^{At}) \tag{139}$$

y la integral (134) se escribe:

$$\int_0^t e^{At} f(t)\, dt \tag{140}$$

La matriz exponencial que figura en estas tres últimas fórmulas, se obtiene sustituyendo en (116) la matriz Δ_n por la que resulta de cambiar el signo de t en los polinomios de $\Delta(t)$ de (130), cuando existen éstos, es decir cuando hay raíces múltiples de la ecuación característica de A; porque las matrices B que figuran en las fórmulas (3) a (9) o (130) a (135) no son las mismas utilizadas en las fórmulas (33) a (36) o (116) a (125), las primeras proceden de la resolución del sistema (5) y las últimas de la resolución del sistema (31). Utilizando estas últimas matrices B, por (116) es:

$$B^{-1}(0)\,\Delta(t)\,B(0) = e^{At} = B_0^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\,\Delta_n}{n\,!}\right)B_0 \qquad (141\ *)$$

Definida la integral (140) se pueden definir las transformadas matriciales de Laplace y de Fourier de una función $f(t)$ mediante las fórmulas:

$$\int_0^{\infty} e^{-(A+p)t} f(t)\,dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{(A+iw)t} f(t)\,dt \qquad (142)$$

La abscisa de convergencia de la TL matricial es la de la de TL ordinaria (o escalar) sumada al valor máximo de las partes reales de la ecuación característica de la matriz A.

Las fórmulas anteriores se pueden extender a otras transformadas integrales.

Bibliografía

Los libros y memorias del autor a los que se hace referencia en el texto son los siguientes:

A) *Líneas de Investigación en los Procesos Estocásticos y el Movimiento Browniano* (editado por el Instituto de España 1975).

B) *Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos* (editorial Paraninfo 1974).

C) *Matemática Financiera* (editorial Dossat 1970).

D) *Ecuaciones Diferenciales y Matrices* (editorial Dossat 1965).

E) *Ecuaciones Diferenciales y Ecuaciones Integrales con condiciones iniciales aleatorias* («Revista de la Real Academia de Ciencias» 1978).

F) *Ecuaciones en Diferencias Finitas y Ecuaciones Diferenciales Lineales con coeficientes aleatorios* («Revista de la Real Academia de Ciencias» 1978).

G) *La integración de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con valores iniciales aleatorios* («Boletinul Institutului Politehnic din IAŞI 1978).

(*) Ya dijimos que la matrices B (0) y B_0 son distintas. Si representamos por $\Delta(-t, -\mathbf{p})$ la matriz que resulta de sustituir en $\Delta(t)$ el tiempo t por $-t$, y las raíces $p_1, \ldots, p_m$ por $-p_1, \ldots, -p_m$, la (141) se escribe también:

$$e^{At} = B_0^{-1}\,\Delta(-t, -\mathbf{p})\,B_0. \qquad \mathbf{(141\ bis)}$$