Formes d'inertie et complexe de Koszul associés à des polynômes plurihomogènes

Azzouz Awane, Abdelouahab Chkiriba, and Michel Goze

UFR de Géométrie Différentielle et Applications
Faculté des Sciences Ben M'sik
B.P. 7955. Boulevard Driss Harti
Casablanca — Maroc
a.awane@univh2m.ac.ma a.chkiriba@univh2m.ac.ma

Faculté des Sciences et Techniques
Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière
F. 68093 Mulhouse Cedex
M.Goze@uha.fr

Recibido: 3 de Noviembre de 2003
Aceptado: 14 de Octubre de 2004

ABSTRACT

The existence of common zero of a family of polynomials has led to the study of inertial forms, whose homogeneous part of degree 0 constitutes the ideal resultant. The Kozsul and Čech cohomologies groups play a fundamental role in this study. An analogueous of Hurwitz theorem is given, and also, one finds a N. H. McCoy theorem in a particular case of this study.

Key words: plurihomogeneous polynomials, inertial forms, Koszul complex, local cohomology.

2000 Mathematics Subject Classification: 13D45, 14XX, 14KXX.

1. Introduction

La notion de formes d'inertie (Trägheitsformen) due à F. Mertens [13] au XIX-ième siècle, est liée au problème fondamental de la théorie de l'élimination, c'est-à-dire, à l'existence des zéros communs d'une famille donnée de polynômes.

Ce travail a été élaboré avec l'aide de la coopération franco-marocaine Action inétgrée A.I. MA/02/32 et du programm PAS 27/2001 financé par l'AUPELF.

Ce problème a été abordé par plusieurs auteurs avant Mertens comme J. J. Sylvester ou Cayley dans le cas où le nombre des polynômes coïncide avec celui des variables en utilisant la notion de résultant, qui est ici, une forme d'inertie de degré zéro.

En considérant des polynômes génériques (les coefficients sont des indéterminées) homogènes, A. Hurwitz a étudié dans [8] l'idéal gradué associé à des formes d'inertie ce qui correspond à l'homologie du complexe de Koszul définie par ces polynômes. Cette étude a été reprise par J. P. Jouanolou [9, 10] dans le cadre de la théorie des schémas, en utilisant notamment des méthodes homologiques.

Dans ce travail on introduit l'idéal des formes d'inertie relatives à des polynômes $f_1, \ldots, f_r$ génériques plurihomogènes c'est à dire homogènes par rapport à s paquets de variables $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_s$, dont la partie plurihomogène $\mathfrak{A}$ de multidegré $(0, \ldots, 0)$ est l'idéal résultant. On donne un certain nombre de caractérisations qui nous permettent de retrouver les formules de Perron et de Perrin données dans le cas $s = 1$.

En adoptant ici les méthodes utilisées par J. P. Jouanolou [10], nous définissons le complexe de Koszul $K^\bullet$ par les polynômes (f_i) et le complexe de Čech $\mathcal{C}^\bullet$ par les monômes

$$(\sigma_{i_1,\ldots,i_s} = X_{1,i_1} \cdots X_{s,i_s})_{i_1,\ldots,i_s}.$$

Ceci nous permet d'étudier deux suites spectrales $'E$ et $''E$ associées au bicomplexe $K^\bullet \otimes_A \mathcal{C}^\bullet$ et conduit à l'étude de la cohomologie de Koszul et à la cohomologie locale, cette dernière n'est autre que la cohomologie de Čech.

Nous donnons enfin, un résultat analogue au théorème de Hurwitz [8] et dans un cas particulier nous retrouvons un théorème de N. H. McCoy [12].

2. Données et notations

Soient K un anneau commutatif intègre et $\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_s$ des paquets de variables avec

$$\underline{X}_j = (X_{j,1}, \ldots, X_{j,n_j+1})$$

pour tout $1 \leq j \leq s$. On suppose de plus que $n_s \geq n_{s-1} \geq \cdots \geq n_1 \geq 1$.

Soit $r \in \mathbb{N}$ fixé et $d_{i,1}, \ldots, d_{i,s}$ avec $i = 1, \ldots, r$ des entiers naturels non nuls. Pour tout $i = 1, \ldots, r$, on considère le polynôme générique homogène par rapport à chaque paquet de variables $\underline{X}_j$ de degré $d_{i,j}$ donné par

$$f_i = \sum U_{i,\underline{\alpha}_1,\ldots,\underline{\alpha}_s} \underline{X}_1^{\underline{\alpha}_1} \cdots \underline{X}_s^{\underline{\alpha}_s}, \tag{1}$$

la sommation étant prise pour $\alpha_1 \in \mathbb{N}^{n_1+1}$ tel que $|\underline{\alpha}_1| = d_{i,1}, \ldots, \underline{\alpha}_s \in \mathbb{N}^{n_s+1}$ avec $|\underline{\alpha}_s| = d_{i,s}$ et où les $U_{i,\underline{\alpha}_1,\ldots,\underline{\alpha}_s}$ sont des indéterminées sur K et

$$\underline{X}_j^{\underline{\alpha}_j} = X_{j,1}^{\alpha_{j,1}} \cdots X_{j,n_j+1}^{\alpha_{j,n_j+1}}.$$

On désigne par $A = K[U_{i,\underline{\alpha}_1,\ldots,\underline{\alpha}_s}]$ $(1 \leq i \leq r$ et $|\underline{\alpha}_j| = d_{i,j}$ pour tout $j = 1, \ldots, s)$, l'anneau des coefficients universels.

Pour tout $j = 1, \dots, s$, l'algèbre de polynômes $C_j = A[X_{j,1}, \dots, X_{j,n_j+1}]$ est notée $A[\underline{X}_j]$. Si l'on considère que $\deg(X_{j,l}) = 1$ pour $1 \leq l \leq n_j + 1$, cette algèbre est naturellement $\mathbb{N}$-graduée. L'algèbre $C = C_1 \otimes_A \cdots \otimes_A C_s = A[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]$ est $\mathbb{N}^s$-graduée par :

$$\begin{aligned} \deg(a) &= (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^s, \text{ pour tout } a \in A, \\ \deg(X_{j,l}) &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^s \text{ (ici 1 est situé sur la } j\text{-ième position)}, \end{aligned} \tag{2}$$

pour tout $j = 1, \dots, s$ et $1 \leq l \leq n_j + 1$

Définition 2.1. Tout polynôme de C homogène par rapport à la $\mathbb{N}^s$-graduation ainsi définie est dit *polynôme plurihomogène*.

Les polynômes $f_1, \dots, f_r$ sont donc plurihomogènes de degré $\deg(f_i) = \underline{d}_i = (d_{i,1}, \dots, d_{i,s})$, en particulier l'algèbre quotient $B = \frac{C}{(f_1,\dots,f_r)}$ de C par l'idéal $(f_1, \dots, f_r)$ engendré par $f_1, \dots, f_r$ est $\mathbb{N}^s$-graduée.

On note par $\mathfrak{M}$ l'idéal de $C = A[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]$ engendré par les q monômes :

$$\sigma_{i_1 \cdots i_s} = X_{1,i_1} \cdots X_{s,i_s} \text{ où } (i_1, \dots, i_s) \in \prod_{j=1}^{s} [1, n_j + 1] \tag{3}$$

où $q = \prod_{j=1}^{s}(1 + n_j)$ et on notera $\sigma_q = X_{1,n_1+1} \cdots X_{s,n_s+1}$.

3. Formes d'inerties

Comme l'algèbre C est $\mathbb{N}^s$-graduée et les polynômes $f_1, \dots, f_r$ plurihomogènes, alors l'algèbre quotient B est $\mathbb{N}^s$-graduée. Notons par $B_{\sigma_{i_1 \cdots i_s}}$ le localisé de B par $\sigma_{i_1 \cdots i_s}$ muni de la $\mathbb{Z}^s$-graduation provenant de la $\mathbb{N}^s-$ graduation de B. Alors la surjection canonique $p : C \longrightarrow B$ et le morphisme de A-algèbres $\pi : b \longmapsto (\frac{b}{1}, \dots, \frac{b}{1})$ de B à valeurs dans $\prod_{i_1,\dots,i_s} B_{\sigma_{i_1 \cdots i_s}}$ sont gradués de degré $(0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^s$. On a donc

$$\operatorname{Ker} \pi = \{ b \in B \mid \forall m \in \mathfrak{M}, \exists \nu \in \mathbb{N}, m^\nu b = 0 \}.$$

Définition 3.1. L'image réciproque $\mathcal{T} = p^{-1}(\operatorname{Ker} \pi)$ est appelée l'*idéal des formes d'inertie* des polynômes $f_1, \dots, f_r$, et la partie plurihomogène $\mathcal{T}_{(0,\dots,0)} = \mathcal{T} \cap A = \mathfrak{A}$ de degré $(0, \dots, 0)$ est appelée l'*idéal résultant* de $f_1, \dots, f_r$.

Les formes d'inertie, c'est-à-dire les polynômes de $\mathcal{T}$ sont caractérisées par la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Pour tout $f \in C$ les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est une forme d'inertie.*

(ii) *Il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma^{\nu}_{i_1 \cdots i_s} f$ est dans l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_r$, quels que soient $i_1, \dots, i_s$.*

(iii) *Il existe* $\nu \in \mathbb{N}$ *et il existe* $i_1, \ldots, i_s$ *tels que* $\sigma^{\nu}_{i_1 \cdots i_s} f$ *est dans l'idéal engendré par* $f_1, \ldots, f_r$.

(iv) *Il existe des entiers naturels* $\nu_1, \ldots, \nu_s$ *tels que, pour tout* $(\underline{\alpha}_1, \ldots, \underline{\alpha}_s) \in \prod_{j=1}^{s} \mathbb{N}^{n_j+1}$ *avec* $|\underline{\alpha}_j| = \nu_j$ $(1 \leq j \leq s)$*, le polynôme* $\underline{X}_1^{\underline{\alpha}_1} \ldots \underline{X}_s^{\underline{\alpha}_s} f$ *est dans l'idéal engendré par* $f_1, \ldots, f_r$.

On écrit $\sigma^{\nu}_{i_1 \cdots i_s} f = 0$ dans B pour exprimer que $\sigma^{\nu}_{i_1 \cdots i_s} f$ est dans l'idéal engendré par $f_1, \ldots, f_r$.

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.3. *Pour tout* $i_1, \ldots, i_s$ *on a* $\operatorname{Ker} \pi = \operatorname{Ker}(\mathrm{can} : B \longrightarrow B_{\sigma_{i_1 \cdots i_s}})$*, où* can *désigne la projection canonique de* B *sur* $B_{\sigma_{i_1 \cdots i_s}}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{can} : B \longrightarrow B_{\sigma_{i_1 \cdots i_s}}) = \operatorname{Ker}(\mathrm{can} : B \longrightarrow B_{\sigma_{j_1 \cdots j_s}})$$

pour tous monômes $\sigma_{i_1 \cdots i_s}$ et $\sigma_{j_1 \cdots j_s}$ (3). En effet, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & B_{\sigma_{i_1 \cdots i_s}} \arrow[d, "\gamma_2"] \\
B_{\sigma_{j_1 \cdots j_s}} \arrow[r, "\gamma_1"] & B_{\sigma_{i_1 \cdots i_s} \sigma_{j_1 \cdots j_s}}
\end{tikzcd}$$

est commutatif, et puisque $\sigma_{j_1 \cdots j_s}$ n'est pas un diviseur de zéro dans $B_{\sigma_{i_1 \cdots i_s}}$, alors les homomorphismes γ_1 et γ_2 sont injectifs, par conséquent on a

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{can} : B \longrightarrow B_{\sigma_{i_1 \cdots i_s}}) = \operatorname{Ker}(\mathrm{can} : B \longrightarrow B_{\sigma_{j_1 \cdots j_s}}).$$

D'où le lemme. □

Remarque 3.4. Il résulte aussitôt de la caractérisation de l'idéal des formes d'inertie et du fait que les polynômes sont plurihomogènes, que l'idéal $\mathcal{T}$ est $\mathbb{N}^s$−gradué.

Soit $i_1, \ldots, i_s$ tels que $1 \leq i_j \leq n_j + 1$. Pour tous $i = 1, \ldots, r$ et $j = 1, \ldots, s$, on désigne par $U_{i, i_1, \ldots, i_s}$ le coefficient de $X_{1,i_1}^{d_{i,1}} \ldots X_{s,i_s}^{d_{i,s}}$ dans f_i, et on notera dans toute la suite :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i &= U_{i, n_1+1, \ldots, n_s+1} \\
\tau_i &= X_{1,n_1+1}^{d_{i,1}} \cdots X_{s,n_s+1}^{d_{i,s}} \\
h_i &= f_i - \varepsilon_i \tau_i \\
\underline{\tilde{X}}_j &= (X_{j,1}, \ldots, X_{j,n_j}, 1) \text{ (on substitue 1 à } X_{j,n_j+1}) \\
\tilde{f} &= f(\underline{\tilde{X}}_1 \ldots, \underline{\tilde{X}}_s),
\end{aligned}$$

où f est un polynôme de $C = A[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]$, que l'on regardera dans la suite sous la forme suivante $f = f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s) \in A'[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]$ et $A' = K[U_{i,\underline{\alpha}_1,\dots,\underline{\alpha}_s}]$ avec $U_{i,\underline{\alpha}_1,\dots,\underline{\alpha}_s} \neq \varepsilon_i$ $(1 \leq i \leq r)$. Dans ces nouvelles notations, on a une deuxième caractérisation des formes d'inertie :

Proposition 3.5. *Pour tout polynôme f plurihomogène dans C de degré $(\nu_1, \dots, \nu_s)$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \mathcal{T}$,

(ii) $\frac{f}{X_{1,n_1+1}^{\nu_1} \cdots X_{s,ns+1}^{\nu_s}} = 0$ *dans* $(B_{\sigma_q})_{(0,\dots,0)}$,

(iii) $f(-\tilde{h}_1, \dots, -\tilde{h}_r, \tilde{\underline{X}}_1, \dots, \tilde{\underline{X}}_s) = 0$ *dans* C.

Montrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.6. *Pour tout $i_1, \dots, i_s$, il existe un isomorphisme de $A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]$-algèbre :*

$$B_{\sigma_{i_1 \dots i_s}} \longrightarrow A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]_{\sigma_{i_1 \cdots i_s}}.$$

Démonstration. On peut supposer que $i_1 = n_1 + 1, \dots, i_s = n_s + 1$, c'est à dire $\sigma_{i_1 \dots i_s} = \sigma_q$.

Soit donc φ l'homomorphisme de $A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]$-algèbres

$$\varphi : C = A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s][\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r] \longrightarrow A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]_{\sigma_q}$$

défini par $\varphi(\varepsilon_i) = -\frac{h_i}{\tau_i}$, où $\tau_i = X_{1,n_1+1}^{d_{i,1}} \cdots X_{s,n_s+1}^{d_{i,s}}$ et $h_i = f_i - \varepsilon_i \tau_i$.

L'homomorphisme φ est bien défini, car τ_i est inversible dans $A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]_{\sigma_q}$, et puisque $\varphi(f_i) = 0$, pour tout $i = 1, \dots, r$, et $\varphi(\sigma_q)$ est inversible dans $A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]_{\sigma_q}$, alors φ induit un homomorphisme de $A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]$-algèbres

$$\psi : B_{\sigma_q} \longrightarrow A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]_{\sigma_q}.$$

Soit ψ' l'homomorphisme composé

$$\psi' : A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]_{\sigma_q} \xrightarrow{j} C_{\sigma_q} \xrightarrow{p} B_{\sigma_q}$$

où j est l'injection canonique et p et l'homomorphisme induit de la surjection canonique de C dans $B = \frac{C}{(f_1,\dots,f_r)}$. On déduit que $\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}_{A'[\underline{X}_1,\dots,\underline{X}_s]_{\sigma_q}}$, de même on a $\psi' \circ \psi = \mathrm{Id}_{B_{\sigma_q}}$. □

Démonstration de la proposition. Il résulte de la première caractérisation des formes d'inertie que les deux premières assertions sont équivalentes.

Soit $f \in \mathcal{T}$, plurihomogène, de degré $(\nu_1, \dots, \nu_s)$. On a

$$f = f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s) = 0$$

dans B_{σ_q} (première caractérisation des formes d'inertie), donc

$$\psi(f) = f\Big(-\frac{h_1}{\tau_1}, \dots, -\frac{h_r}{\tau_r}, \underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s\Big) = 0 \text{ dans } A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]_{\sigma_q},$$

et, si on remplace X_{j,n_j+1} par 1, pour tout $j = 1, \dots, s$, dans $\psi(f)$, on en déduit que

$$f(-\tilde{h}_1, \dots, -\tilde{h}_r, \tilde{\underline{X}}_1, \dots, \tilde{\underline{X}}_s) = 0$$

dans C, d'où (i) $\Longrightarrow$ (iii).

Réciproque. Supposons que $f(-\tilde{h}_1, \dots, -\tilde{h}_r, \tilde{\underline{X}}_1, \dots, \tilde{\underline{X}}_s) = 0$ dans C . Par homogénéisation par rapport à chaque paquet de variables $\underline{X}_j$ à l'aide de la variable X_{j,n_j+1}, on obtient

$$f\Big(-\frac{h_1}{\tau_1}, \dots, -\frac{h_r}{\tau_r}, \frac{\underline{X}_1}{X_{1,n1+1}}, \dots, \frac{\underline{X}_s}{X_{s,ns+1}}\Big) = 0 \text{ dans } C_{\sigma_q}$$

car h_i est plurihomogène de degré $\underline{d}_i = (d_{i,1}, \dots, d_{i,s})$. Or, pour tout $i = 1, \dots, r$, $-\frac{h_i}{\tau_i} = \varepsilon_i$ dans B_{σ_q}, et comme f est plurihomogène, on en déduit que $\frac{f}{1} = 0$ dans B_{σ_q}, d'où (iii) $\Longrightarrow$ (i). □

On va donner ici une autre caractérisation de l'idéal résultant $\mathfrak{A}$ des polynômes $f_1, \dots, f_r$ c'est à dire, des formes d'inertie de degré $(0, \dots, 0)$.

Considérons l'homomorphisme de C-algèbres $F : T_i \longmapsto \frac{f_i}{\tau_i}$ de $C[T_1, \dots, T_r]$ à valeurs dans C_{σ_q} et l'automorphisme $G : \varepsilon_i \longmapsto \varepsilon_i - T_i$ de l'algèbre $C[T_1, \dots, T_r]$ sur l'anneau $A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s, T_1, \dots, T_r]$, où $T_1, \dots, T_r$ sont des nouvelles variables.

Proposition 3.7. $\operatorname{Ker} F$ *coïncide avec l'image par G de l'idéal $\mathcal{T}[T_1, \dots, T_r]$.*

Démonstration. On considère l'homomorphisme de $A'[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_s]_{\sigma_q}$-algèbres de $C_{\sigma_q}[T_1, \dots, T_r]$ à valeurs dans C_{σ_q} défini par :

$$T_i \longmapsto \frac{f_i}{\tau_i} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_i \longmapsto -\frac{h_i}{\tau_i}.$$

Puisque, pour tout $1 \leq i \leq r$, on a $-\frac{h_i}{\tau_i} = \varepsilon_i$ dans B_{σ_q}, alors l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_r$ est le noyau de l'homomorphisme défini ci dessus, qui induit par conséquent, un isomorphisme $\omega : B_{\sigma_q}[T_1, \dots, T_r] \longrightarrow C_{\sigma_q}$. On sait que l'homomorphisme canonique d'anneaux $u : C \longrightarrow B_{\sigma_q}$ admet pour noyau l'idéal $\mathcal{T}$ des formes d'inertie, et que $\mathcal{T}[T_1, \dots, T_r]$ est le noyau du morphisme d'algèbres $\bar{u}$, qui prolonge u à $C[T_1 \dots, T_r]$. Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} C[T_1, \dots, T_r] \arrow[r, "\bar{u}"] \arrow[d, "G"'] & B_{\sigma_q}[T_1, \dots, T_r] \arrow[d, "\omega"] \\ C[T_1, \dots, T_r] \arrow[r, "F"] & C_{\sigma_q} \end{tikzcd}$$

montre que $\operatorname{Ker} F = G(\mathcal{T}[T_1, \dots, T_r])$. □

On déduit :

Corollaire 3.8 (Formule de Perron). *L'homomorphisme de A-algèbres $\tilde{F} : T_i \longmapsto \tilde{f}_i$, de $A[T_1, \dots, T_r]$ à valeurs dans $A[\underline{\tilde{X}}_1, \dots, \underline{\tilde{X}}_s]$ a pour noyau :* $\operatorname{Ker} \tilde{F} = G(\mathcal{T})[T_1, \dots, T_r]$.

Corollaire 3.9 (Formule de Perrin). *Pour tout $a \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $a \in \mathfrak{A}$,

(ii) *Il existe un polynôme $Q \in A[T_1, \dots, T_r]$ sans terme constant tel que $a = Q(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r)$.*

Démonstration. Soit $a = a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \in \mathfrak{A}$ considéré comme polynôme en $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$. L'égalité $\operatorname{Ker} \tilde{F} = G(\mathfrak{A}[T_1, \dots, T_r])$ montre que $G(a) = a(\varepsilon_1 - T_1, \dots, \varepsilon_r - T_r) \in \operatorname{Ker} \tilde{F}$.

En appliquant $\tilde{F}$ au polynôme $Q(T_1, \dots, T_r) = a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) - a(\varepsilon_1 - T_1, \dots, \varepsilon_r - T_r)$, on obtient $a(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = Q(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r)$.

Réciproquement, s'il existe $Q(T_1, \dots, T_r) \in A[T_1, \dots, T_r]$ sans terme constant tel que $a = Q(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r)$, alors $a - Q(T_1, \dots, T_r) \in \operatorname{Ker} \tilde{F} = G(\mathfrak{A}[T_1, \dots, T_r])$, donc on peut écrire $a - Q(T_1, \dots, T_r) = \sum_\alpha a_\alpha (\varepsilon_1 - T_1)^{\alpha_1} \dots (\varepsilon_r - T_r)^{\alpha_r}$ avec $a_\alpha \in \mathfrak{A}$. D'où, par spécialisation $T_i \longmapsto 0$ pour tout $i = 1, \dots, r$, on déduit $a \in \mathfrak{A}$. $\square$

4. Complexes de Koszul et de Čech

On étudie ici le complexe de Koszul et la cohomologie locale associés à des polynômes plurihomogènes.

Dans ce paragraphe, on désigne par A un anneau commutatif, M un A-module libre et $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r)$ une suite d'éléments de A.

4.1. Complexe de Koszul

Soient $(e_1, \dots, e_r)$ la base canonique du A-module libre A^r. Pour $0 \leq p \leq r$, la p-ième puissance extérieure $\bigwedge^p(A^r)$ du A-module A^r est un A-module libre de rang $C_r^p = \frac{r!}{p!(r-p)!}$ et de base $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r}$, avec la convention $\bigwedge^0(A^r) = A^r$.

Le complexe de chaines de Koszul associé à la suite $\underline{a}$, noté $(K_\bullet(\underline{a}, A), d_\bullet)$, est défini par

$$K_p(\underline{a}, A) = \bigwedge^p(A^r)$$

pour tout $p = 0, \dots, r$, tel que pour $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r$, et

$$d_p : K_p(\underline{a}, A) \longrightarrow K_{p-1}(\underline{a}, A)$$

est donnée par

$$d_p(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} a_{i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \dots \wedge e_{i_p}.$$

On définit aussi, pour tout A-module M, le complexe de chaînes de Koszul associé à la suite $\underline{a}$ et au module M par :

$$K_\bullet(\underline{a}, M) = K_\bullet(\underline{a}, A) \otimes_A M. \tag{4}$$

Si A est $\mathbb{N}$-gradué alors le A-module $\bigwedge^p(A^r)$ est $\mathbb{N}$-gradué par :

$$\begin{cases} \deg(e_k) = \nu_k, \text{ pour } 1 \leq k \leq r, \\ \deg(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \nu_{i_1} + \cdots + \nu_{i_p}, \text{ pour } 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq r. \end{cases} \tag{5}$$

Si $a_1, \dots, a_r$ sont homogènes de degrés $\nu_1, \dots, \nu_r$ alors les différentielles sont homogènes de degré 0. On obtient ainsi une graduation du complexe de Koszul $K_\bullet(\underline{a}, M)$, et pour tout $p = 1, \dots, r$, on a un isomorphisme

$$K_p(\underline{a}, A) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq r} A[-\nu_{i_1} - \cdots - \nu_{i_p}],$$

où $A[\nu]$ est le A-module gradué obtenu par décalage de la graduation de $\nu \in \mathbb{Z}$, c'est à dire, $(A[\nu])_t = A_{\nu+t}$.

4.2. Complexe de Čech

Pour tout $I = \{ i_1, \dots, i_p \mid i_1 < \cdots < i_p \} \subset \{1, \dots, r\}$, on désigne par M_{a_I} le A-module $M_{a_{i_1} \cdots a_{i_p}}$ localisé de M par le produit $a_{i_1} \cdots a_{i_p}$.

Le complexe de Čech associé à la suite $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r)$ et au module M est le complexe noté $(\check{C}^\bullet(\underline{a}, M), d^\bullet)$ défini par

$$\check{C}^p(\underline{a}, M) = \prod_{|I|=p+1} M_{a_I}$$

et pour tout $0 \leq p \leq r-1$, les différentielles $d^p : \check{C}^p(\underline{a}, M) \longrightarrow \check{C}^{p+1}(\underline{a}, M)$ sont définies, pour tout $m = (m_I)_{|I|=p+1}$ et pour tout $J \subset \{1, \dots, r\}$ de cardinal $p+2$, par :

$$(d^p(m))_J = \sum_{j \in J} (-1)^{l_j - 1} \frac{m_{J-\{j\}}}{1} \tag{6}$$

où l_j est la position de j dans $J = \{ j_1, \dots, j_{p+2} \mid j_1 < \cdots < j_{p+2} \}$ et $\frac{m_{J-\{j\}}}{1}$ est l'image de $m_{J-\{j\}}$ par le morphisme canonique $M_{a_{J-\{j\}}} \longrightarrow (M_{a_{J-\{j\}}})_{a_j} = M_{a_J}$.

On note par $\check{H}^\bullet(\underline{a}, M)$ la cohomologie du complexe du Čech $\check{C}^\bullet(\underline{a}, M)$.

Soit maintenant $\alpha : m \longmapsto (\frac{m}{1}, \dots, \frac{m}{1})$ l'homomorphisme de A-modules de M à valeurs dans $\prod_{i=1}^r M_{a_i}$. On vérifie aisément que $d^0 \circ \alpha = 0$ (voir (6)). On a donc un autre complexe :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} \prod_{i=1}^r M_{a_i} \xrightarrow{d^0} \prod_{|I|=2} M_{a_I} \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{r-2}} M_{a_1 \cdots a_r} \xrightarrow{d^{r-1}} 0, \tag{7}$$

appelé complexe de Čech augmenté, qu'on désignera par $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\underline{a}, M)$; d'où les relations :

$$H^0(\check{\mathcal{C}}^\bullet(\underline{a}, M)) = \operatorname{Ker}\alpha, \qquad H^1(\check{\mathcal{C}}^\bullet(\underline{a}, M)) = \frac{\check{H}^0(\underline{a}, M)}{\operatorname{Im}}\alpha,$$

et,

$$H^i(\check{\mathcal{C}}^\bullet(\underline{a}, M)) = H^{\check{i-1}}(\underline{a}, M) \text{ pour } i \geq 2.$$

Soit $J = (a_1, \dots, a_r)$ l'idéal de A engendré par $a_1, \dots, a_r$. On note

$$H^\bullet(\check{\mathcal{C}}^\bullet(\underline{a}, M)) = H_J^\bullet(M).$$

Considérons le schéma affine $X = \operatorname{spec}(A)$ et $U = \bigcup_{i=1}^r D(a_i)$ la réunion des ouverts affines $D(a_i)$ de X, définis respectivement par $a_1, \dots, a_r$.

Le complexe de Čech $\check{C}^\bullet(\underline{a}, M)$ associé à la suite $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r)$ et au module M, n'est rien d'autre que le complexe de Čech habituel associé au recouvrement $U = (D(a_i))_{1 \leq i \leq r}$ et au faisceau $\tilde{M}$ associé au A-module M (voir [7, Chapitre III]). D'après le théorème de Cartan-Leray on a $H^i(U, \tilde{M}) = \check{H}^i(\underline{a}, M)$, pour tout $i = 0, \dots, r$

Proposition 4.1. *Soit Y le sous schéma fermé du schéma affine $X = \operatorname{spec}(A)$ défini par l'idéal $J = (a_1, \dots, a_r)$ de A. On a alors un isomorphisme*

$$H_J^\bullet(M) \longrightarrow H_Y^\bullet(X, \tilde{M})$$

où $H_Y^\bullet(X, \tilde{M})$ est la cohomologie à support dans Y.

Démonstration. De la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow & H_Y^0(X, \tilde{M}) \longrightarrow H^0(X, \tilde{M}) \longrightarrow H^0(U, \tilde{M}) \longrightarrow H_Y^1(X, \tilde{M}) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow & H_Y^i(X, \tilde{M}) \longrightarrow H^i(X, \tilde{M}) \longrightarrow H^i(U, M) \longrightarrow H_Y^{i+1}(X, \tilde{M}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

et du théorème de Cartan-Serre ($H^i(X, \tilde{M}) = 0$ pour $i \geq 1$ [6]) on déduit qu'on a un isomorphisme $H^i(U, M) \simeq H_Y^{i+1}(X, \tilde{M})$, pour $i \geq 1$. La suite

$$0 \longrightarrow H_Y^0(X, \tilde{M}) \longrightarrow H^0(X, \tilde{M}) \longrightarrow H^0(U, \tilde{M}) \longrightarrow H_Y^1(X, \tilde{M}) \longrightarrow 0.$$

est exacte, U étant $X - Y$.

Il résulte du théorème de Cartan-Leray et de la définition du complexe de Čech augmenté que, pour $i \geq 2$, on a un isomorphisme $H_J^i(M) \longrightarrow H_Y^i(X, \tilde{M})$. Pour $i = 0$, on a $H_Y^0(X, \tilde{M}) = \operatorname{Ker}(M \to \Gamma(U, \tilde{M})) = \operatorname{Ker}(\alpha) = H_J^0(M)$. On déduit de la suite exacte précédente que pour $i = 1$ on a $H_Y^1(X, \tilde{M}) = H_J^1(M)$, ce qui achève la démonstration. □

Exemple 4.2. Soient $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans un corps commutatif K, U l'ouvert $\bigcup_{i=1}^{n} D(X_i)$ de spec(R) et soit $J = (X_1, \ldots, X_n)$ l'idéal de R engendré par $X_1, \ldots, X_n$. Puisque $X_1, \ldots, X_n$ est une R-suite, alors prof$(J) \geq n$, et par conséquent les groupes de cohomologie $H_J^i(R)$ sont nuls sauf pour $i \neq n$. Et d'après (7), on a $H_J^n(R)$ est le n-ième groupe de cohomologie du complexe $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\underline{X}, R)$, d'où :

$$H_J^n(R) = \frac{R_{X_1 \ldots X_n}}{\mathrm{Im}\big(\bigoplus_{i=1}^{n} R_{X_1 \ldots \widehat{X_i} \ldots X_n} \to R_{X_1 \ldots X_n} t\big)} = \frac{1}{X_1 \cdots X_n} K[X_1^{-1}, \ldots, X_n^{-1}]. \quad (8)$$

De plus, si R est gradué au moyen des X_i ($\deg X_i = 1$), alors les groupes de cohomologie sont gradués, et on a $H_J^n(R)_\nu = 0$ si $\nu > -n$ et $H_J^n(R)_{-n} = K$.

4.3. Suites spectrales associées au bicomplexe $K^{\bullet\bullet}(\underline{f}, C)$.

Soit $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_r)$ la suite de polynômes génériques plurihomogènes (1). Notons par :

$$\begin{cases} K^0 = C \\ K^{-l} = K_l(\underline{f}, C) = \displaystyle\bigoplus_{1 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq r} C[-\underline{d}_{i_1} - \cdots - \underline{d}_{i_l}], \quad \text{pour } l = 0, \ldots, r \end{cases} \quad (9)$$

le complexe de Koszul défini sur $C = A[\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_s]$ par la suite $\underline{f}$.

Les polynômes f_i sont homogènes par la $\mathbb{N}^s-$ graduation définie dans (2), ce qui induit une $\mathbb{N}^s$-graduation sur $K^\bullet$.

Comme les différentielles $d^{-l} : K^{-l} \longrightarrow K^{-l+1}$ sont homogènes de degré $(0, \ldots, 0)$ $\in \mathbb{N}^s$, on déduit que les groupes de cohomologie $(H^i(K^\bullet))_{-r \leq i \leq 0}$ sont aussi $\mathbb{N}^s$-gradués.

On définit maintenant le complexe de Čech augmenté sur l'anneau C par la suite de monômes $\underline{\sigma} = (\sigma_{i_1 \cdots i_s})_{i_1 \cdots i_s}$ ((7) et (3)) que l'on note

$$\check{\mathcal{C}}^p = \check{\mathcal{C}}^p(\underline{\sigma}, C), \quad (10)$$

pour $p = 1, \ldots, q$. On a donc un bicomplexe

$$K^{\bullet\bullet} = K^{\bullet\bullet}(\underline{f}, C) = K^\bullet \otimes_C \check{\mathcal{C}}^\bullet$$

qu'on se propose d'étudier dans le paragraphe suivant.

4.3.1. Propriétés du bicomplexe $K^{\bullet\bullet}(\underline{f}, C)$

Pour tous $l = -r, \ldots, 0$ et $p = 1, \ldots, q$, on pose $K^{l,p} = K^l \otimes_C \check{\mathcal{C}}^p$. Considérant p comme indice de ligne et l comme indice de colonne, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K^{-r,0} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "d''"] & K^{-r+1,0} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "d''"] & \cdots \arrow[r, "d'"] & K^{-1,0} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "d''"] & K^{0,0} \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{-r,1} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "d''"] & K^{-r+1,1} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "d''"] & \cdots \arrow[r, "d'"] & K^{-1,1} \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "d''"] & K^{0,1} \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d, "d''"] & \vdots \arrow[d, "d''"] & & \vdots \arrow[d, "d''"] & \vdots \arrow[d, "d''"] & \\
0 \arrow[r] & K^{-r,q} \arrow[r, "d'"] \arrow[d] & K^{-r+1,q} \arrow[r, "d'"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "d'"] & K^{-1,q} \arrow[r, "d'"] \arrow[d] & K^{0,q} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\tag{11}
$$

où d' (resp. d'') désigne les différentielles des lignes (resp. des colonnes), obtenues par tensorisation à partir de celles de $K^\bullet$ et de $\check{\mathcal{C}}^\bullet$. Les complexes lignes $K^{\bullet,p} = K^\bullet \otimes_C \check{\mathcal{C}}^p = K^\bullet(\underline{f}, \check{\mathcal{C}}^p)$, pour $0 \le p \le q$ sont des complexes de Koszul $\mathbb{N}^s$-gradués associés à la suite $\underline{f}$ et aux C-modules $\check{\mathcal{C}}^p$. Les complexes colonnes $K^{l,\bullet} = K^l \otimes_C \check{\mathcal{C}}^\bullet = \check{\mathcal{C}}^\bullet(\underline{\sigma}, K^l)$, pour $-r \le l \le 0$ sont des complexes de Čech augmentés associés à la suite $\underline{\sigma} = (\sigma_{i_1\dots i_s})_{i_1\cdots i_s}$ et aux C-modules K^l.

Le bicomplexe $K^{\bullet\bullet}$ donne lieu à deux suites spectrales ayant même aboutissement :

$$
\begin{cases} {}'E_1^{l,p} = H^p(K^{l,\bullet}) & \Longrightarrow E^{l+p} \\ {}''E_2^{l,p} = H^l(L^{\bullet,p}) & \Longrightarrow E^{l+p} \end{cases} \text{pour } (l,p) \in \mathbb{Z}^2
$$

(voir [1; 3; 6, §11]), où $L^{p,\bullet}$ est le complexe

$$
0 \longrightarrow H^p(K^{\bullet,0}) \longrightarrow H^p(K^{\bullet,1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^p(K^{\bullet,q}) \longrightarrow 0.
$$

Puisque $K^{\bullet,i} = K^\bullet \otimes_C \check{\mathcal{C}}^i$ est un C-module plat, alors le complexe $L^{p,\bullet}$ n'est autre que le complexe de Čech augmenté associé à la suite $\underline{\sigma}$ et au C-module $H^p(K^\bullet)$. On en déduit

$$
\begin{cases} {}'E_1^{l,p} = H^p_{\mathfrak{M}}(K^l) & \Longrightarrow E^{l+p}, \\ {}''E_2^{l,p} = H^l_{\mathfrak{M}}(H^p(K^\bullet)) & \Longrightarrow E^{l+p}, \end{cases} \tag{12}
$$

et, il résulte des définitions (9) et (10), que l'on a

$$
\begin{cases} {}'E_1^{l,p} = 0 & \text{pour } (l,p) \notin \{-r,\dots,0\} \times \{0,\dots,q\}, \\ {}''E_2^{l,p} = 0 & \text{pour } (l,p) \notin \{0,\dots,q\} \times \{-r,\dots,0\}. \end{cases}
$$

4.3.2. Supports des deux suites spectrales $'E$ et $''E$

Le support d'une suite spectrale $(E_t^{l,p})$ $(t \geq \alpha = 1$ ou $2)$ est l'ensemble des couples entiers (l,p) tels que $E_\alpha^{l,p} \neq 0$. Pour tout $j = 1, \dots, s$, on note $U_j = \mathrm{spec}(C_j) - V(\mathfrak{M}_j)$ l'ouvert complémentaire du fermé $V(\mathfrak{M}_j)$ dans $\mathrm{spec}(C_j)$ et $U = U_1 \times_S \cdots \times_S U_s$ l'ouvert produit fibré sur $S = \mathrm{spec}(A)$ des ouverts U_j. Or, pour tout $1 \leq j \leq s$, on a $U_j = (E_A^{n_j+1})^*$, donc

$$U = (E_A^{n_1+1})^* \times_S \cdots \times_S (E_A^{n_s+1})^* = \mathrm{spec}(C) - V(\mathfrak{M}).$$

On déduit la proposition suivante :

Proposition 4.3. *On a* $'E_1^{l,p} = 0$*, pour tous* $l \in \{-r, \dots, 0\}$ *et* $p \neq 1 + \sum_{j \in J} n_j$ *pour toute partie* J *non vide de* $\{1, \dots, s\}$*.*

Démonstration. Le C-module K^l est libre, donc plat, par conséquent on a $'E_1^{l,p} = H^p_{\mathfrak{M}}(K^l) = K^l \otimes_C H^p_{\mathfrak{M}}(C)$. Il suffit donc de montrer le résultat pour $H^p_{\mathfrak{M}}(C)$. Pour cela on distingue les cas suivants :

(i) $0 \leq p \leq n_1$, où $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_s$.
Il est clair que $(\sigma_i = X_{1,i} \cdots X_{s,i})_{1 \leq i \leq n_1+1}$ une C-suite, d'où $\mathrm{prof}_{\mathfrak{M}}(C) \geq n_1+1$, et d'après [11], on a $H^p_{\mathfrak{M}}(C) = 0$, pour $0 \leq p \leq n_1$.

(ii) Lorsque $p > n_1$, on sait d'après (8), du fait que $n_j \geq 1$ pour tout j, $1 \leq j \leq s$ que

$$H^p(U_j, O_{U_j}) = \begin{cases} C_j & \text{si } p = 0, \\ H^{n_j+1}_{\mathfrak{M}_j}(C_j) & \text{si } p = n_j \\ 0 & \text{si } p \notin \{0, n_j\} \end{cases} \tag{13}$$

où

$$H^{n_j+1}_{\mathfrak{M}_j}(C_j) = \frac{1}{X_{j,1} \cdots X_{j,n_j+1}} A[X_{j,1}^{-1}, \dots, X_{j,n_j+1}^{-1}]$$

est un A-module libre. Et comme $U = U_1 \times_S \cdots \times_S U_s$, on a, d'après la formule de Künneth,

$$H^p(U, O_U) = \bigoplus_{p_1 + \cdots + p_s = p} \bigotimes_{j=1}^{s} H^{p_j}(U_j, O_{U_j}),$$

et $H^p_{\mathfrak{M}}(C) = H^{p-1}(U, O_U)$, pour $p \geq 2$. On en déduit

$$H^p_{\mathfrak{M}}(C) = \bigoplus_{\substack{p_1 + \cdots + p_s = p-1 \\ p_j = 0 \text{ ou } n_j}} \bigotimes_{j=1}^{s} H^{p_j}(U_j, O_{U_j}). \tag{14}$$

Comme $p > n_1$, il résulte de la formule (13) que $'E^{l,p} = 0$, pour tout $p \neq 1 + \sum_{j \in J} n_j$ où J est une partie non vide de $\{1, \dots, s\}$. $\square$

Corollaire 4.4. *Pour* $l+p > N = 1+\sum_{j=1}^{s} n_j = \max_{J\subseteq\{1,\dots,s\}}\bigl(1+\sum_{j\in J} n_j\bigr)$*, avec* $-r \leq l \leq 0$*, on a* $'E_1^{l,p} = 0$.

Comme $\underline{f} = (f_1, \dots, f_r)$ est une C_{σ_i}-suite, elle est également une $\check{\mathcal{C}}^p$-suite pour $p \neq 0$. Or $K^{\bullet,p}$ est le complexe de Koszul associé à la suite $\underline{f}$ et au module $\check{\mathcal{C}}^p$; il est donc acyclique pour $n \geq 1$ d'après [11], et on a :

Proposition 4.5. *Pour* $p \neq 0$*, on a* $H^p(K^{\bullet,i}) = 0$*, pour tout* $i \in \{1, \dots, q\}$.

On déduit aussi qu'on a :

$$''E_2^{l,p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \text{ et } l \neq 0 \\ H^l_{\mathfrak{M}}(B) & \text{si } p = 0 \\ H^p(K^\bullet) & \text{si } p \neq 0 \text{ et } l = 0. \end{cases} \tag{15}$$

En vertu du résultat ci-dessus et des propriétés de cette suite spectrale ($''E$) associée à un bicomplexe limité supérieurement et inférieurement on a $''E_2^{l,p} = {''E_3^{l,p}} = \cdots = {''E_\infty^{l,p}} = E^{l+p}$ où E^{l+p} est l'aboutissement. Par conséquent, on a les résultats suivants :

Proposition 4.6. (i) $E^m = H^m(K^\bullet)$ *si* $m < 0$ *et* $E^m = H^m_{\mathfrak{M}}(B)$ *si* $m \geq 0$*,*

(ii) $E^m = 0$ *si* $m > N$*.*

(iii) $H^m_{\mathfrak{M}}(B) = 0$ *si* $m > N$*.*

4.4. Etudes des groupes de cohomologie $H^\bullet_{\mathfrak{M}}(B)$ *et* $H^\bullet(K^\bullet)$

On se propose dans cette partie de généraliser le théorème de Hurwitz amélioré par J. P. Jouanolou [10] dans le cas d'un seul paquet au cas de s paquets de variables.

Proposition 4.7. *Supposons que le nombre* r *de polynômes plurihomogènes* $f_1, \dots, f_r$ *soit inférieur ou égal au nombre de variables du premier paquet* ($r \leq n_1 + 1$)*. Alors :*

(i) *Le complexe de Koszul est acyclique sauf en degré* 0 : $H^i(K^\bullet) = 0$ *si* $i \neq 0$*.*

(ii) *Si* $r < n_1 + 1$ *alors* $H^i_{\mathfrak{M}}(B) = 0$ *pour* $i = 0, \dots, n_1 + 1 - r$*.*

Démonstration. Des caractérisations des supports des deux suites spectrales $'E$ et $''E$ (4.3 et (15)) on déduit que :

(i) Si $r < n_1 + 1$, alors, pour tout couple (l, p) d'entiers relatifs tels que $l + p < n_1 + 1 - r$, on a $'E_1^{l,p} = 0$, par suite $E^i = 0$, pour $i < n_1 + 1 - r$, et donc, $H^i_{\mathfrak{M}}(B) = 0$ pour $0 \leq i < n_1 + 1 - r$ et $H^i(K^\bullet) = 0$, pour $0 < i < n_1 + 1 - r$.

(ii) Si $r = n_1 + 1$ alors on a $'E_1^{l,p} = 0$ pour $l + p < 0$ et $E^i = 0$ pour $i < 0$.

Ceci montre que $H^i(K^\bullet) = 0$ si $i \neq 0$. □

Remarque 4.8. D'après la définition 3.1 on a

$$\mathcal{T} = \pi^{-1}(H^0_{\mathfrak{M}}(B)).$$

Corollaire 4.9. *Si $r < n_1 + 1$ alors l'idéal des formes d'inertie est donné par $\mathcal{T} = (f_1, \dots, f_r)$, en particulier, l'idéal résultant $\mathfrak{A}$ est nul.*

Rappelons (3) que les monômes $(\sigma_{i_1,\dots,i_s})$ sont plurihomogènes de degré $(1, \dots, 1)$ ce qui induit une $\mathbb{Z}^s$-graduation sur les complexes colonnes $K^l \otimes_C \check{\mathcal{C}}^\bullet$ du diagramme (11), et puisque les différentielles d'' sont plurihomogènes de degrés $(0, \dots, 0)$, alors les groupes de cohomologie sont également $\mathbb{Z}^s$-gradués.

Pour tous $l = 0, \dots, r$ et $p = 1, \dots, s$, on pose :

$$\begin{cases} \delta_j(l) & = \max_{1 \le i_1 < \dots < i_l \le r}(d_{i_1,j} + \dots + d_{i_l,j}) - n_j - 1, \\ \delta_j(0) & = -n_j - 1, \end{cases}$$

on a donc $\delta_j(0) < \delta_j(1) < \dots < \delta_j(r) = d_{1,j} + \dots + d_{r,j} - n_j - 1$. On note $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_s)$, où $\delta_j = \delta_j(r)$ pour tout $1 \le j \le s$.

Proposition 4.10. *Pour tous $l = 0, \dots, r$ et $p = 1 + n_1, \dots, N$, on a :*

(i) $({}'E_1^{-l,p})_{(0,\dots,0)} = 0$ *si* $p < N = 1 + \sum_{j=1}^s n_j$,

(ii) $({}'E_1^{-l,p})_{(\nu_1,\dots,\nu_s)} = 0$ *pour* $\nu_j > \delta_j(l)$.

Démonstration. Il résulte de la proposition 4.3 que, pour tout $p \ne 1 + \sum_{j \in J} n_j$, où J est une partie non vide de $\{1, \dots, s\}$, la première suite spectrale vérifie ${}'E_1^{-l,p} = 0$; on se ramène donc au cas de $p = 1 + \sum_{j \in J} n_j$. Les formules ${}'E_1^{-l,p} = H^p_{\mathfrak{M}}(K^{-l}) = K^{-l} \otimes_C H^p_{\mathfrak{M}}(C)$, (12) et (14) donnent

$$({}'E_1^{0,p})_{(0,\dots,0)} = (H^p_{\mathfrak{M}}(C))_{(0,\dots,0)} = \bigoplus_{\substack{p_1+\dots+p_s=p-1 \\ p_j=0 \text{ ou } n_j}} \bigotimes_{j=1}^s \big(H^{p_j}(U_j, O_{U_j})\big)_0,$$

Dans ces conditions, il existe $j = 1, \dots, s$ tel que $p_j = n_j$. Or on a $H^{n_j}(U_j, O_{U_j}) = 0$, (d'après (13)). Par conséquent on a $({}'E_1^{0,p})_{(0,\dots,0)} = 0$, ce qui montre la première assertion pour $l = 0$.

Supposons maintenant que $l \ne 0$. Pour que la partie plurihomogène de degré $(0, \dots, 0)$ de la première suite spectrale soit nulle $(({}'E_1^{-l,p})_{(0,\dots,0)} = 0)$ il faut et il suffit que l'on ait $(H^p_{\mathfrak{M}}(C))_{-\underline{d}_{i_1}-\dots-\underline{d}_{i_l}} = 0$ pour tous $1 \le i_1 \le \dots \le i_l \le r$ (cf. (9)). La relation

$$(H^p_{\mathfrak{M}}(C))_{-\underline{d}_{i_1}-\dots-\underline{d}_{i_l}} = \bigoplus_{\substack{p_1+\dots+p_s=p-1 \\ p_j=0 \text{ ou } n_j}} \left(\bigotimes_{j=1}^s (H^{p_j}(U_j, O_{U_j}))_{-d_{i_1,j}-\dots-d_{i_l,j}} \right)$$

et le fait que $p < N$ montrent qu'il existe $j \in \{1, \dots, s\}$ tel que $p_j = 0$, donc d'après 13 $(H^0(U_j, O_{U_j}))_{-d_{i_1,j}-\cdots-d_{i_l,j}} = 0$, ce qui achève la démonstration de la première assertion.

Montrons maintenant la seconde assertion. Soient $p = 1 + \sum_{j\in J} n_j$ où J est une partie non vide de $\{1, \dots, s\}$ et $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{Z}^s$. Nous avons la formule qui met en relief les cas $l = 0$ et $l \neq 0$:

$$('E_1^{-l,p})_\nu = \begin{cases} (H^p_{\mathfrak{M}}(C))_\nu & \text{si } l = 0, \\ \bigoplus\limits_{1\le i_1<\cdots<i_l\le r} (H^p_{\mathfrak{M}}(C))_{\nu-\underline{d}_{i_1}-\cdots-\underline{d}_{i_l}} & \text{si } l \neq 0. \end{cases}$$

Lorsque $l = 0$, la formule (14) entraîne

$$('E_1^{0,p})_\nu = \bigoplus_{\substack{p_1+\cdots+p_s=p-1 \\ p_j=0 \text{ ou } n_j}} \bigotimes_{j=1}^{s} (H^{p_j}(U_j, O_{U_j}))_{\nu_j},$$

et puisque $p \geq n_1 + 1$, il existe $j = 1, \dots, s$ tel que $p_j = n_j$, donc d'après (8) on a $(H^{n_j}(U_j, O_{U_j}))_{\nu_j} = 0$ si $\nu_j > -n_j - 1$, d'où $('E_1^{0,p})_\nu = 0$ si $\nu_j > -n_j - 1$ pour tout $1 \leq j \leq s$.

Lorsque $l \neq 0$, on observe que

$$('E_1^{-l,p})_\nu = \bigoplus_{1\le i_1<\cdots<i_l\le r} ('E_1^{0,p})_{\nu-\underline{d}_{i_1}-\cdots-\underline{d}_{i_l}}.$$

Or $('E_1^{0,p})_{\nu-\underline{d}_{i_1}-\cdots-\underline{d}_{i_l}} = 0$ si $\nu_j > d_{i_1,j} + \cdots + d_{i_l,j} - n_j - 1$ et $j = 1, \dots, s$. Par conséquent $('E_1^{-l,p})_\nu = 0$, si $\nu_j > \max_{1\le i_1<\cdots<i_l\le r}(d_{i_1,j} + \cdots + d_{i_l,j}) - n_j - 1 = \delta_j(l)$ pour tout $1 \leq j \leq s$, ce qui montre la proposition. □

Proposition 4.11. *r étant le nombre de polynômes plurihomogènes $f_1, \dots, f_r$, on a :*

(i) $(H^i(K^\bullet))_{(0,\dots,0)} = 0$ *si $r \leq N$ et $i \neq 0$,*

(ii) $(H^i_{\mathfrak{M}}(B))_{(0,\dots,0)} = 0$ *si $r < N$ et $0 \leq i < N - r$.*

Démonstration. La proposition précédente donne $('E_1^{l,p})_{(0,\dots,0)} = 0$ si $p < N$. Ainsi pour tous $l = -r, \dots, 0$ et $p = 1+n_1, \dots, N$ tels que $l+p < N-r$, on a $('E_1^{l,p})_{(0,\dots,0)} = 0$, ce qui montre que l'aboutissement en degré $(0, \dots, 0)$ est nul, $E^i_{(0,\dots,0)} = 0$ si $i < N-r$. La proposition résulte des relations $E^m = H^m(K^\bullet)$ si $m < 0$ et $E^m = H^m_{\mathfrak{M}}(B)$ si $m \geq 0$; ceci achève la démonstration. □

Corollaire 4.12. *Sous les hypothèses et notations ci dessus, on a :*

(i) $(H^i_{\mathfrak{M}}(B))_\nu = 0$ *pour tout i,*

(ii) $(H^i(K^\bullet))_\nu = 0$ *pour tout $i \neq 0$,*

pour tout $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s$ tel que $\nu_j > \delta_j$.

Corollaire 4.13. *Pour $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s$ avec $\nu_j > \delta_j$, on a $\mathcal{T}_\nu = (f_1, \dots, f_r)_\nu$.*

4.4.1. Etudes de $(H^\bullet_{\mathfrak{M}}(B))_\delta$ et $(H^\bullet(K^\bullet))_\delta$

L'étude des parties plurihomogènes $(H^\bullet_{\mathfrak{M}}(B))_\delta$ et $(H^\bullet(K^\bullet))_\delta$ des groupes de cohomologie nécessite la :

Proposition 4.14. *On a*

$$({}'E_1^{-l,p})_\delta = \begin{cases} A & si\ (l,p) = (r,N) \\ 0 & si\ (l,p) \neq (r,N). \end{cases}$$

Démonstration. On sait que, pour $(l,p) \notin \{0,\dots,r\} \times \{1+n_1,\dots,N\}$, ${}'E_1^{-l,p} = 0$. Il suffit de montrer la proposition pour $(l,p) \in \{0,\dots,r\} \times \{1+n_1,\dots,N\}$. Rappelons que $\delta = (\delta_1,\dots,\delta_s) \in \mathbb{Z}^s$ où $\delta_j = \sum_{i=1}^r d_{i,j} - n_j - 1$.

Pour $0 \leq l < r$, on a $\delta_j(l) < \delta_j$, donc $({}'E_1^{-l,p})_{\delta_j} = 0$ en vertu de la proposition 4.10, r étant le nombre de polynômes plurihomogènes $f_1,\dots,f_r$.

Pour $l = r$, on sait que ${}'E_1^{-r,p} = H^p_{\mathfrak{M}}(K^{-r}) = H^p_{\mathfrak{M}}(C)[-\underline{d}_1 - \cdots - \underline{d}_r]$, donc $({}'E_1^{-r,p})_\delta = (H^p_{\mathfrak{M}}(C))_{(-n_1-1,\dots,-n_s-1)}$ et la formule de Künneth donne

$$({}'E_1^{-r,p})_\delta = \bigoplus_{\substack{p_1+\cdots+p_s=p-1 \\ p_j=0 \text{ ou } n_j}} \bigotimes_{j=1}^s H^{p_j}(U_j, O_{U_j})_{-n_j-1}.$$

Si $p < N$, on peut supposer, d'après la proposition 4.3, que $p = 1 + \sum_{j\in J} n_j$ où J est une partie non vide de $\{1,\dots,s\}$, et puisque dans l'expression de $({}'E_1^{-r,p})_\delta$ ci-dessus p_j ne prend que deux valeurs 0 ou n_j alors il existe $j \in \{1,\dots,s\}$ tel que $p_j = 0$. Comme $H^0(U_j, O_{U_j})_{-n_j-1} = 0$ (13), on déduit que $({}'E_1^{-r,p})_\delta = 0$.

Lorsque $p = N$, on a $({}'E_1^{-r,N})_\delta = \bigotimes_{j=1}^s H^{n_j}(U_j, O_{U_j})_{-n_j-1}$. La formule (13) implique que $H^{n_j}(U_j, O_{U_j})_{-n_j-1} = A$, par conséquent $({}'E_1^{-r,N})_\delta = A$. □

De la proposition précédente on déduit l'aboutissement de la première suite spectrale en degré δ :

$$E^i_\delta = \begin{cases} A & \text{si } i = N - r \\ 0 & \text{si } i \neq N - r. \end{cases}$$

En comparant la formule ci dessus avec

$$E^i_\delta = \begin{cases} (H^i_{\mathfrak{M}}(B))_\delta & \text{si } i \geq 0 \\ (H^i(K^\bullet))_\delta & \text{si } i \leq 0, \end{cases}$$

on déduit le théorème suivant, qui est un bilan des résultats précédents. Rappelons que r est le nombre de polynômes génériques plurihomogènes f_i et $N = 1+n_1+\cdots+n_s$ où $1 + n_j$ est le nombre de variables dans le paquet j.

Théorème 4.15. *Dans les hypothèses et notations ci dessus on a :*

(i) *Si* $r < N$*, alors*
   (a) *Le complexe* $K^\bullet_\delta$ (9) *est acyclique sauf en degré* 0 : $(H^i(K^\bullet))_\delta = 0$ *pour* $i \neq 0$.
   (b) *Lorsque* $i \geq 0$ *et* $i \neq N - r$*, on a* $(H^i_{\mathfrak{M}}(B))_\delta = 0$.

(ii) *Pour* $r = N$ *on a :*
   (a) *Le complexe* $K^\bullet_\delta$ *est acyclique sauf en degré* 0 : $(H^i(K^\bullet))_\delta = 0$ *pour* $i \neq 0$.
   (b) *Le* A*-module* $(H^0_{\mathfrak{M}}(B))_\delta$ *est libre de rang* 1 *et* $(H^i_{\mathfrak{M}}(B))_\delta = 0$*, pour* $i > 0$.

(iii) *Supposons que* $r > N$.
   (a) *Lorsque* $i \neq 0$*, on a* $(H^i(K^\bullet))_\delta = A$ *pour* $i = N - r$*, et* $(H^i(K^\bullet))_\delta = 0$ *pour* $i \neq N - r$.
   (b) *Pour* $i \geq 0$*, on a* $(H^i_{\mathfrak{M}}(B))_\delta = 0$.

Corollaire 4.16. *On a :*

(i) *Si* $r \neq N$*, la partie plurihomogène de degré* δ *de l'idéal des formes d'inertie est* $\mathcal{T}_\delta = (f_1, \ldots, f_r)_\delta$.

(ii) *Si* $r \leq N$ *alors le complexe* $K^\bullet_\delta$ *définit une résolution libre du* A*-module* B_δ.

Dans le cas où le nombre de polynômes $f_1, \ldots, f_r$ est égal à $N = 1+n_1+\cdots+n_r$, le A-module $(H^0_{\mathfrak{M}}(B))_\delta$ est libre de rang 1, dont on donne ici un générateur sans donner le lien avec le déterminant "Jacobien" des polynômes $f_1, \ldots, f_r$, établi dans [2].

On définit par récurrence sur $j = 1, \ldots, s$, des polynômes uniques $f^{(1)}_{i,l}$ (où $1 \leq l \leq n_j + 1$) par :

$$\begin{gathered} f_i = X_{1,1} f^{(1)}_{i,1} + \cdots + X_{1,n_1+1} f^{(1)}_{i,n_1+1}, \\ f^{(1)}_{i,l} \in A[X_{1,l}, \ldots, X_{1,n_1+1}][\underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_s], \end{gathered} \tag{16}$$

pour tout $i = 1, \ldots, r = N$. Pour définir $f^{(j)}_{i,l}$, pour $2 \leq j \leq s$ et $1 \leq l \leq n_j + 1$, on décompose $f^{(j-1)}_{i,n_{j-1}+1}$ sous la forme (16) par rapport au paquet $\underline{X}_j$:

$$\begin{aligned} f^{(j-1)}_{i,n_{j-1}+1} &= X_{j,1} f^{(j)}_{i,1} + \cdots + X_{j,n_j+1} f^{(j)}_{i,n_j+1}, \\ f^{(j)}_{i,l} &\in A[X_{1,n_1+1}, \ldots, X_{j-1,n_{j-1}+1}][X_{j,l}, \ldots, X_{j,n_1+1}][\underline{X}_{j+1}, \ldots, \underline{X}_s], \end{aligned}$$

on obtient alors une décomposition

$$\begin{aligned} f_i = \sum_{l=1}^{n_1} X_{1,l} f^{(1)}_{i,l} + X_{1,n_1+1} \sum_{l=1}^{n_2} f^{(2)}_{i,l} + \cdots \\ \cdots + \prod_{k=1}^{j-1} X_{k,n_k+1} \sum_{l=1}^{n_j} x_{j,l} f^{(j)}_{i,l} + \cdots \\ \cdots + \prod_{k=1}^{s-1} X_{k,n_k+1} \sum_{l=1}^{n_s} x_{s,l} f^{(s)}_{i,l} + \prod_{k=1}^{s} X_{k,n_k+1} f^{(s)}_{i,n_s+1} \end{aligned}$$

du polynôme f_i pour $i = 1, \dots, r$. Considérons le déterminant d'ordre N

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} f^{(1)}_{1,1} & \cdots & f^{(1)}_{1,n_1+1} & \cdots & f^{(j)}_{1,1} & \cdots & f^{(j)}_{1,n_j} & \cdots & f^{(s)}_{1,1} & \cdots & f^{(s)}_{1,n_s+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f^{(1)}_{i,1} & \cdots & f^{(1)}_{i,n_1} & \cdots & f^{(j)}_{i,1} & \cdots & f^{(j)}_{i,n_j} & \cdots & f^{(s)}_{i,1} & \cdots & f^{(s)}_{i,n_s+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f^{(1)}_{N,1} & \cdots & f^{(1)}_{N,n_1} & \cdots & f^{(j)}_{N,1} & \cdots & f^{(j)}_{N,n_j} & \cdots & f^{(s)}_{N,1} & \cdots & f^{(s)}_{N,n_s+1} \end{vmatrix}.$$

Si on pose $N_j = \sum_{l=j+1}^{s} n_l$ pour $1 \leq j \leq s-1$ et $N_s = 0$ alors on a :

Théorème 4.17. (i) *Le déterminant $\mathcal{D}$ est une forme d'inertie plurihomogène de degré $\delta_j - N_j$ par rapport au paquet $\underline{X}_j$, c'est à dire $\mathcal{D} \in T_{(\delta_1-N_1,\dots,\delta_s-N_s)}$.*

(ii) *La classe Δ de $X^{N_1}_{1,n_1+1} \cdots X^{N_{s-1}}_{1,n_{s-1}+1}\mathcal{D}$ modulo $(f_1, \dots, f_N)$ est un générateur de $(H^0_{\mathfrak{M}}(B))_\delta$.*

Références

[1] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

[2] A. Chkiriba, *Formes d'inertie plurihomogènes*, Thèse, Rabat, 1988.

[3] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Actualités Sci. Ind. No. 1252. Publ. Math. Univ. Strasbourg, Hermann, Paris, 1958.

[4] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*, Pub. Math. Inst. Hautes Études Sci., 1960.

[5] ———, *Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Pub. Math. Inst. Hautes Études Sci., 1961.

[6] ———, *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, Pub. Math. Inst. Hautes Études Sci., 1961.

[7] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[8] A. Hurwitz, *Über die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls*, Ann. Mat. Pura Appl. (3) (1913), 113–151.

[9] J. P. Jouanolou, *Singularités rationnelles du résultant*, Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978), 1979, pp. 183–213.

[10] ———, *Idéaux résultants*, Adv. in Math. **37** (1980), no. 3, 212–238.

[11] H. Matsumura, *Commutative algebra*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1970.

[12] N. H. McCoy, *On the resultant of a system of forms homogeneous in each of several sets of variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), no. 1, 215–233.

[13] F. Mertens. Über die bestimmenden Eigenschaften der Resultante von n Formen mit n Verõnderlichen, Wien. Ber. **XCIII** (1886), 527–566; Zur Theorie der Elimination, Wien. Ber. **108** (1899), 1173–1228.