REVISTA MATEMÁTICA COMPLUTENSE
(2000) vol. XIII, num. 1, 183-192

ISNN 1139-1138

ALGEBRES DE LIE LIBRES ASSOCIEES A UN SYSTEME DE PFAFF

Amina OUAZZANI

Abstract

By using an invariant related to free Lie algebras, we give a criterion of non existence of isomorphism for the Pfaffian systems.

1 Introduction

Le but de ce travail est de mettre en évidence un critère pratique pour montrer la non isomorphie de certains systèmes de Pfaff. Comme application on montre que les deux systèmes de Pfaff

$$(S_1) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2 dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4 dy_3 \\ \omega_3 = dy_3 + y_5 dy_4 \end{cases} \qquad (S_2) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2 dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4 dy_3 \\ \omega_3 = dy_4 + y_5 dy_3 \end{cases}$$

à cinq variables ne sont pas isomorphes. Cette propriété, qui avait échappée à Elie Cartan avait été relevée pour la première fois par Giaro, Kumpera et Ruiz ([4]). Nous l'appliquerons également à certains systèmes de Pfaff à six variables.

2 Définition de l'invariant : $g(S)$

2.1 Rappel

Soient (S) un système de Pfaff, $x \in \mathbb{R}^n$, U un ouvert contenant x et $\omega_1, ..., \omega_r$ des formes de Pfaff définies sur U telles que le système (S) soit défini dans U par les équations

$$\omega_i = 0, \quad i = 1, ..., r.$$

1991 Mathematics Subject Classification: 53C12, 17BXX, 58A17.
Servicio de Publicaciones. Universidad Complutense. Madrid, 2000

3 Etude de la non isomorphie des systèmes (S_1) et (S_2)

Soit (S) un système de Pfaff défini dans $U \subset \mathbb{R}^5$ de rang 3, de classe 5 représenté par les formes $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ dont les dérivées extérieures vérifient

$$\begin{cases} d\omega_1 = 0 & mod(D^1(S)) \\ d\omega_2 = \omega_3 \wedge \omega_4 & mod(D^1(S)) \\ d\omega_3 = \omega_4 \wedge \omega_5 & mod(S) \end{cases}$$

Le premier système dérivé $D^1(S)$ étant supposé engendré par $\{\omega_1, \omega_2\}$. Les formes ω_4 et ω_5 sont des formes de Pfaff linéairement indépendantes de ω_1 , ω_2 et ω_3.
Le deuxième système dérivé $D^2(S) = \{\omega_1\}$. Supposons dans ce cas $cl(D^2(S)) = 3$.

Proposition 3.1. ([3]) *: Tout système dans $\mathbb{R}^5$ vérifiant les conditions ci dessus est isomorphe à (S_1) ou (S_2)*

Proposition 3.2. *Les systèmes (S_1) et (S_2) ne sont pas localement isomorphes.*

Démonstration. Le noyau de (S_1) est engendré par les champs de vecteurs

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial y_5} \\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y_4} - y_5 \frac{\partial}{\partial y_3} + y_4 y_5 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 y_5 \frac{\partial}{\partial y_1} \end{cases}$$

tandis que celui défini par (S_2) est engendré par les champs de vecteurs

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial y_5} \\ Y_2 = \frac{\partial}{\partial y_3} - y_5 \frac{\partial}{\partial y_4} - y_4 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} \end{cases}$$

On a les relations suivantes :
$[X_1, X_2] = -\frac{\partial}{\partial y_3} + y_4 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} = X_3$
$[X_2, X_3] = \frac{\partial}{\partial y_2} = X_4$
$[X_3, X_4] = -\frac{\partial}{\partial y_1} = X_5$
$[X_2, X_4] = -y_5 \frac{\partial}{\partial y_1} = y_5 X_5 = X_6$
$[X_1, X_6] = X_5$
Les autres crochets non définis étant nuls; l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(S_1)(X_1, X_2)$ est une algèbre de dimension finie égale à 6. On a également

$[X_1, Y_2] = -\frac{\partial}{\partial y_4} = Y_3$
$[Y_2, Y_3] = -\frac{\partial}{\partial y_2} = Y_4$
$[Y_2, Y_4] = -\frac{\partial}{\partial y_1} = Y_5$
les autres crochets non définis étant nuls.
L'algèbre de Lie $\mathcal{L}(S_2)(X_1, Y_2)$ est de dimension 5. Ainsi $g(S_2) \leq 5$.
Montrons que $g(S_1) = 6$.

Lemme 3.3. *Pour tous champs $Z_1, Z_2 \in Ker(S_1)$ et indépendants en tout point, alors l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(S_1)(Z_1, Z_2)$ est de dimension supérieure à 6.*

Preuve. Posons
$$\begin{cases} Z_1 = f_1X_1 + f_2X_2 \\ Z_2 = f_3X_1 + f_4X_2 \end{cases} \quad \text{avec } g = f_1f_4 - f_2f_3 \neq 0 \text{ partout.}$$
On a :
$$\begin{aligned} [Z_1, Z_2] &= [f_1X_1 + f_2X_2, f_3X_1 + f_4X_2] \\ &= (f_1X_1(f_3) - f_3X_1(f_1) + f_2X_2(f_3) - f_4X_2(f_1))X_1 \\ &\quad +(-f_3X_1(f_2) + f_1X_1(f_4) + f_2X_2(f_4) - f_4X_2(f_2))X_2 \\ &\quad +(f_1f_4 - f_2f_3)[X_1, X_2] \end{aligned}$$
Ainsi $[Z_1, Z_2] = g_1X_1 + g_2X_2 + gX_3$ où $X_3 = [X_1, X_2]$. Posons $[Z_1, Z_2] = Z_3$.
Rappelons les crochets définissant l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(S_1)(X_1, X_2)$:

$$[X_1, X_2] = X_3\ ,\ [X_2, X_3] = X_4\ ,\ [X_3, X_4] = X_5\ ,\ [X_2, X_4] = X_6.$$

On a les relations suivantes
$[Z_1, Z_3] = h_1X_1 + h_2X_2 + h_3X_3 + hX_4$ avec $h = f_2g$. On pose $[Z_1, Z_3] = Z_4$
De même en particulier
$[Z_2, Z_3] = \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3X_3 + \alpha X_4 = Z_5$ avec $\underline{\alpha = f_4g}$
$[Z_1, Z_4] = \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \beta_4X_4 + \beta X_6 = Z_6$ avec $\underline{\beta = f_2h = f_2^2g}$
$[Z_3, Z_4] = \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \lambda_3X_3 + \lambda_4X_4 + \lambda X_5 + \lambda_6X_6 = Z_7$ avec $\underline{\lambda = gh = f_2g^2}$
$[Z_2, Z_5] = \delta_1X_1 + \delta_2X_2 + \delta_3X_3 + \delta_4X_4 + \delta X_6 = Z_8$ avec $\underline{\delta = f_4\alpha = f_4^2g}$
$[Z_3, Z_5] = \mu_1X_1 + \mu_2X_2 + \mu_3X_3 + \mu_4X_4 + \mu X_5 + \mu_6X_6 = Z_9$ avec $\underline{\mu = g\alpha = f_4g^2}$
Comme $g = f_1f_4 - f_2f_3 \neq 0$, l'une des deux fonctions f_2 ou f_4 est non nulle. Supposons $f_2 \neq 0$, alors les fonctions h, β, et λ sont non nulles et du fait que le système $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ est libre, on en déduit que les champs de vecteurs Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_6, et Z_7 sont linéairement

indépendants dans $\mathcal{L}(S_1)(Z_1, Z_2)$. De même, si $f_4 \neq 0$, alors les fonctions α, δ et μ sont non nulles et $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_5, Z_8, Z_9\}$ est libre dans $\mathcal{L}(S_1)(Z_1, Z_2)$. Par conséquent dans les deux cas la dimension de $\mathcal{L}(S_1)(Z_1, Z_2)$ est supérieure à 6. Ainsi

$$g(S_1) = 6$$

et les systèmes (S_1) et (S_2) ne sont pas isomorphes.

Remarque. La non isomorphie des systèmes (S_1) et (S_2) avait été remarquée pour la première fois par Giaro ([4]). Cet oubli d'Elie Cartan peut surprendre de prime abord. Comme on constate assez facilement que les systèmes (S_1) et (S_2) sont projectivement équivalents, l'oubli de Cartan peut dans ce cadre, être volontaire.
Giaro, Kumpera et Ruiz démontrent leur résultat en étudiant la transitivité en l'origine des algèbres de Lie associées. La méthode présentée ici permet de mettre en évidence un invariant qui permet de conclure sur la non isomorphie de certains systèmes en dimension 6, alors que des propriétés de transitivité sont insuffisantes. On l'illustre dans le paragraphe suivant.

4 Etude de systèmes non isomorphes dans $\mathbb{R}^6$

Considérons un système $(S) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ de rang 4 à six variables dont les dérivées extérieures vérifient :

$$\left\{\begin{array}{l} d\omega_1 = 0 \\ d\omega_2 = 0 \\ d\omega_3 = 0 \\ d\omega_4 = \omega_5 \wedge \omega_6 \end{array}\right. \qquad mod(S)$$

où ω_5 et ω_6 sont des formes de Pfaff telles que $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5 \wedge \omega_6 \neq 0$. Le système (S) est alors de classe 6, admettant un système dérivé $D^1(S) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ de rang 3. Supposons de plus que ce système dérivé satisfait au modèle différentiel

$$\left\{\begin{array}{l} d\omega_1 = 0 \\ d\omega_2 = 0 \\ d\omega_3 = \omega_4 \wedge \omega_5 \end{array}\right. \qquad mod(D^1(S))$$

Le système de Pfaff $D^1(S)$ est donc de classe 5, et d'après la classification des systèmes de Pfaff à ciq variables ([2]), il est donc isomorphe à l'un des cinq systèmes

$$(S_5^7)\ ;\ (S_5^8)\ ;\ (S_5^9)\ ;\ (S_5^{10})\ ;\ (S_5^{11})(F)$$

a) $\underline{D^1(S) = (S_5^7)}$
D'après ([2]), (S) est isomorphe à

$$\begin{cases} \omega_1 = dy_1 \\ \omega_2 = dy_2 \\ \omega_3 = dy_3 + y_4 dy_5 \\ \omega_4 = dy_4 + y_6 dy_5 \end{cases}$$

b) $\underline{D^1(S) = (S_5^8)}$
Il existe un système de coordonnées tel que

$$\{\omega_1 = dy_1\ ;\ \omega_2 = dy_2 + y_3 dy_4\ ;\ \omega_3 = dy_3 + y_5 dy_4\}$$

Comme $d\omega_3 = 0 \ \ mod(S)$, alors :

$$d\omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = dy_5 \wedge dy_4 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge \omega_4 = 0.$$

D'où $\omega_4 = a_1 dy_1 + a_2 dy_2 + a_3 dy_3 + a_4 dy_4 + a_5 dy_5$. Posons $\bar{\omega}_4 = \omega_4 - a_1\omega_1 - a_2\omega_2 - a_3\omega_3$. En rebaptisant $\bar{\omega}_4$ par ω_4, on en déduit $\omega_4 = a_4 dy_4 + a_5 dy_5$. Comme le rang de (S) est 4, l'une des deux fonctions a_4 ou a_5 est non identiquement nulle. Supposons que $a_4 \neq 0$, en divisant ω_4 par a_4, on ramène l'écriture de ω_4 à $dy_4 + a_5 dy_5$. La relation $d\omega_4 \neq 0 \ \ mod(S)$ implique

$$d\omega_4 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 = da_5 \wedge dy_5 \wedge dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4 \neq 0.$$

On en déduit que $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, a_5\}$ est un système de coordonnées locales. On pose alors $a_5 = y_6$, et on se ramène au modèle $\omega_4 = dy_4 + y_6 dy_5$. Si $a_5 \neq 0$, en divisant ω_4 par a_5 et en utilisant $d\omega_4 \neq 0 \ \ mod(S)$, on trouve $\omega_4 = y_6 dy_4 + dy_5$. On obtient ainsi deux représentations de (S)

$$(S_3) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 \\ \omega_2 = dy_2 + y_3 dy_4 \\ \omega_3 = dy_3 + y_5 dy_4 \\ \omega_4 = dy_4 + y_6 dy_5 \end{cases} \qquad (S_4) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 \\ \omega_2 = dy_2 + y_3 dy_4 \\ \omega_3 = dy_3 + y_5 dy_4 \\ \omega_4 = dy_5 + y_6 dy_4 \end{cases}$$

Proposition 4.1. *Les systèmes* (S_3) *et* (S_4) *ne sont pas localement isomorphes.* }

En réstriction à l'hyperplan y_1 = *constante, les systèmes* (S_3) *et* (S_4) *induisent des systèmes équivalents à* (S_1) *et* (S_2). *D'où*

$$g(S_3) = g(S_1) = 6 \;\; ; \;\; g(S_4) = g(S_2) \leq 5$$

et par conséquent (S_3) *et* (S_4) *ne sont pas localement isomorphes.*

c)$\underline{D^1(S) = (S_5^9)}$.

On a

$$\{\omega_1 = dy_1 + y_2dy_3 \; ; \; \omega_2 = dy_2 + y_4dy_3 \; ; \; \omega_3 = dy_3 + y_5dy_4\}$$

Un calcul analogue au précédent nous ramène aux deux modèles :

$$(S_5) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4dy_3 \\ \omega_3 = dy_3 + y_5dy_4 \\ \omega_4 = dy_4 + y_6dy_5 \end{cases} \qquad (S_6) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4dy_3 \\ \omega_3 = dy_3 + y_5dy_4 \\ \omega_4 = dy_5 + y_6dy_4 \end{cases}$$

Proposition 4.2. *Les deux systèmes* (S_5) *et* (S_6) *ne sont pas localement isomorphes.*

En effet, $Ker(S_6)$ *est engendré par les champs :*

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial y_6} \\ Y_2 = y_2y_5\frac{\partial}{\partial y_1} + y_4y_5\frac{\partial}{\partial y_2} - y_5\frac{\partial}{\partial y_3} + \frac{\partial}{\partial y_4} - y_6\frac{\partial}{\partial y_5} \end{cases}$$

On a les relations suivantes :

$[X_1, Y_2] = -\frac{\partial}{\partial y_5} = Y_3$

$[Y_2, Y_3] = y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + y_4\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial y_3} = Y_4$

$[Y_2, Y_4] = \frac{\partial}{\partial y_2} = Y_5$

$[Y_4, Y_5] = -\frac{\partial}{\partial y_1} = Y_6$

$[Y_2, Y_5] = -y_5\frac{\partial}{\partial y_1} = y_5Y_6 = Y_7$

$[Y_2, Y_7] = y_6\frac{\partial}{\partial y_1} = Y_8$

$[Y_3, Y_7] = \frac{\partial}{\partial y_1} = -Y_6$

$[X_1, Y_8] = \frac{\partial}{\partial y_1} = -Y_6$

Les autres crochets non définis étant nuls, ce qui montre que $g(S_6) \leq 8$.
De même $Ker(S_5)$ *est engendré par :*

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial y_6} \\ X_2 = -y_2y_5y_6\frac{\partial}{\partial y_1} - y_4y_5y_6\frac{\partial}{\partial y_2} + y_5y_6\frac{\partial}{\partial y_3} - y_6\frac{\partial}{\partial y_4} + \frac{\partial}{\partial y_5} \end{cases}$$

On a :
$[X_1, X_2] = -y_2y_5\frac{\partial}{\partial y_1} - y_4y_5\frac{\partial}{\partial y_2} + y_5\frac{\partial}{\partial y_3} - \frac{\partial}{\partial y_4} = X_3$
$[X_2, X_3] = -y_2\frac{\partial}{\partial y_1} - y_4\frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} = X_4$
$[X_3, X_4] = \frac{\partial}{\partial y_2} = X_5$
$[X_2, X_4] = y_6\frac{\partial}{\partial y_2} = y_6X_5 = X_6$
$[X_2, X_5] = y_5y_6\frac{\partial}{\partial y_1} = X_7$
$[X_3, X_5] = y_5\frac{\partial}{\partial y_1} = X_8$
$[X_4, X_5] = \frac{\partial}{\partial y_1} = X_9$
$[X_1, X_6] = X_5$
$[X_2, X_6] = y_5y_6^2\frac{\partial}{\partial y_1} = X_{10}$
$[X_3, X_6] = X_7$
$[X_4, X_6] = y_6\frac{\partial}{\partial y_1} = X_{11}$

Lemme 4.3. $g(S_5) \geq 9$

Démonstration du lemme. Posons
$\begin{cases} Z_1 = f_1X_1 + f_2X_2 \\ Z_2 = f_3X_1 + f_4X_2 \end{cases}$ avec $g = f_1f_4 - f_2f_3 \neq= 0$ partout.
D'après un calcul précédent, on obtient
$[Z_1, Z_2] = g_1X_1 + g_2X_2 + gX_3 = Z_3$ avec $\underline{g \neq 0}$
$[Z_1, Z_3] = h_1X_1 + h_2X_2 + h_3X_3 + hX_4 = Z_4$ avec $\underline{h = f_2g}$
$[Z_2, Z_3] = \alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 + \alpha_3X_3 + \alpha X_4 = Z_5$ avec $\underline{\alpha = f_4g}$
$[Z_1, Z_4] = \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \beta_4X_4 + \beta X_6 = Z_6$ avec $\underline{\beta = f_2h = f_2^2g}$
$[Z_3, Z_4] = \lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \lambda_3X_3 + \lambda_4X_4 + \lambda X_5 + \lambda_6X_6 = Z_7$ avec $\underline{\lambda = gh = f_2g^2}$
$[Z_2, Z_5] = \delta_1X_1 + \delta_2X_2 + \delta_3X_3 + \delta_4X_4 + \delta X_6 = Z_8$ avec $\underline{\delta = f_4\alpha = f_4^2g}$
$[Z_3, Z_5] = \mu_1X_1 + \mu_2X_2 + \mu_3X_3 + \mu_4X_4 + \mu X_5 + \mu_6X_6 = Z_9$ avec $\underline{\mu = g\alpha = f_4g^2}$
$[Z_1, Z_7] = \Theta_1X_1 + \Theta_2X_2 + \Theta_3X_3 + \Theta_4X_4 + \Theta_5X_5 + \Theta_6X_6 + \Theta X_7 + \Theta_{10}X_{10} = Z_{10}$ avec $\underline{\Theta = f_2\lambda = f_2^2g^2}$
$[Z_2, Z_9] = \gamma_1X_1 + \gamma_2X_2 + \gamma_3X_3 + \gamma_4X_4 + \gamma_5X_4 + \gamma_6X_6 + \gamma X_7 + \gamma_{10}X_{10} = Z_{11}$

avec $\gamma = f_4\mu = f_4^2 g^2$
$[Z_3, Z_7] = \eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \eta_3 X_3 + \eta_4 X_4 + \eta_5 X_5 + \eta_6 X_6 + \eta_7 X_7 + \eta X_8 + \eta_{10} X_{10} = Z_{12}$ avec $\eta = g\lambda = f_2 g^3$
$[Z_3, Z_9] = \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 + \xi_5 X_5 + \xi_6 X_6 + \xi_7 X_7 + +\xi X_8 + \xi_{10} X_{10} = Z_{13}$ avec $\xi = g\mu = f_4 g^3$
$[Z_4, Z_7] = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 + a_6 X_6 + a_7 X_7 + a_8 X_8 + a X_9 + a_{10} X_{10} + a_{11} X_{11} = Z_{14}$ avec $a = h\lambda = f_2^2 g^3$
$[Z_5, Z_9] = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4 + b_5 X_5 + b_6 X_6 + b_7 X_7 + b_8 X_8 + b X_9$ $b_{10} X_{10} + b_{11} X_{11} = Z_{15}$ avec $b = \alpha\mu = f_4^2 g^3$
Comme $g \neq 0$, alors $f_2 \neq 0$ ou bien $f_4 \neq 0$.
Si $f_2 \neq 0$, le sous espace engendré par
$\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_6, Z_7, Z_{10}, Z_{12}, Z_{14}\} \subset \mathcal{L}(S_5)(Z_1, Z_2)$ est de dimension supérieure ou égale à 9.
Si $f_4 \neq 0$, le sous espace engendré par
$\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_5, Z_8, Z_9, Z_{11}, Z_{13}, Z_{15}\} \subset \mathcal{L}(S_5)(Z_1, Z_2)$ est aussi de dimension supérieure ou égale à 9.
Ainsi $g(S_5) \geq 9$. Comme $g(S_6) \leq 8$, on en déduit que les systèmes (S_5) et (S_6) ne peuvent être localement isomorphes.

d) $D^1(S) = (S_5^{10})$

Soit

$$\{\omega_1 = dy_1 + y_2 dy_3 \ ; \ \omega_2 = dy_2 + y_4 dy_3 \ ; \ \omega_3 = dy_4 + y_5 dy_3\}$$

En utilisant le même raisonnement que dans les deux cas précédents, on obtient les deux écritures de (S) :

$$(S_7) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2 dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4 dy_3 \\ \omega_3 = dy_4 + y_5 dy_3 \\ \omega_4 = dy_3 + y_6 dy_5 \end{cases} \qquad (S_8) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_2 dy_3 \\ \omega_2 = dy_2 + y_4 dy_3 \\ \omega_3 = dy_4 + y_5 dy_3 \\ \omega_4 = dy_5 + y_6 dy_3 \end{cases}$$

Proposition 4.4. *Les systèmes (S_7) et (S_8) ne sont pas localement isomorphes.*

En effet, en faisant le même calcul que dans les cas précédents, on obtient

$$g(S_8) \leq 6 \quad \text{et} \quad g(S_7) \geq 7$$

Remarque. L'étude en dimension 5 montre l'existence d'une infinité de modèles paramétrés par une fonction $F(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ s'écrivant localement

$$(S_5^{11}(F)) = \begin{cases} \omega_1 = dy_1 + y_3 dy_4 \\ \omega_2 = dy_2 + F dy_4 \\ \omega_3 = dy_3 - y_5 dy_4 \end{cases}$$

l'étude du système (S) tel que $D^1(S) = (S_5^{11})(F)$ ne peut être conclue par le seul usage de $g(S)$.

References

[1] J.M. Ancochea Bermúdez-M. Goze, *Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension inferieure ou égale à 7*, Archiv der Math. Vol. 2(1989), 157-185.

[2] A. Awane-M. Goze, *Systèmes de Pfaff et Systèmes symplectiques*, Preprint Mulhouse 1995.

[3] E. Cartan, *Les systèmes de Pfaff à cinq variables*, Ann. Sci. Ec. Nor. Sup. 27(1910) 109-192.

[4] A. Giaro, A.Kumpera and C. Ruiz. *Sur la lecture correcte d'un résultat d'Elie CARTAN*, [J]C.R. Acad. Sci., Paris, Ser. A287,241-244(1978).

[5] A. Ouazzani, *Systèmes de Pfaff à six variables*, Preprint, Université de Casablanca.

Faculté des Sciences Ben M'sik
Université Hassan II
Département de mathématiques
CASABLANCA (Maroc)

Recibido: 7 de Abril de 1999
Revisado: 5 de Noviembre de 1999