

Distance géodésique sur un sous-analytique.

Krzysztof KURDYKA¹ and Patrice ORRO²

Résumé

Pour un ensemble sous-analytique, connexe fermé, la distance géodésique est atteinte et est uniformément équivalente, avec des constantes arbitrairement proches de 1, à une distance sous-analytique.

Soit A un sous ensemble de \mathbf{R}^n , que l'on considère muni de la distance euclidienne. Pour λ , arc continu tracé sur A , on note $|\lambda|$ la longueur de λ définie par

$$|\lambda| = \sup \left\{ \sum \|\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})\| : 0 = t_0 < \dots < t_n = 1, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

La distance géodésique entre deux points x et y est alors définie par

$$\delta(x, y) = \inf \{ |\lambda| : \lambda(0) = x, \lambda(1) = y \} \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

On a toujours $\|x - y\| \leq \delta(x, y)$. Dans tout ce qui suit nous supposons A sous-analytique. Si A est connexe, δ prend ses valeurs dans \mathbf{R} , puisque deux points quelconques de A peuvent toujours être joints par un arc λ continu de longueur finie.

Proposition 1 *Soit A un sous-analytique fermé et connexe de \mathbf{R}^n . La fonction $\delta : A \times A \rightarrow \mathbf{R}_+$ est une distance sur A . De plus, pour $x, y \in A$,*

¹Partiellement supporté par contrat CHRX-CT94-0506 de la Communauté Européenne et KBN grant PB 1219/2/91.

²Partiellement supporté par contrat CHRX-CT94-0506 de la Communauté Européenne et Réseau Européen Singularités.

Mathematics Subject Classification: 32B20-32B05-14P15

Servicio Publicaciones Univ. Complutense. Madrid, 1997.

il existe un arc lipschitzien λ , joignant x à y dans A , pour lequel $\delta(x, y) = |\lambda|$.

Démonstration : Nous pouvons supposer A compact. Pour $s \leq t \in [0, 1]$ notons $|\lambda|(s, t)$ la longueur de l'arc λ entre $\lambda(s)$ et $\lambda(t)$. Nous avons

$$\|\lambda(s) - \lambda(t)\| \leq |\lambda|(s, t) = |\lambda|(0, t) - |\lambda|(0, s) \quad (*)$$

La longueur d'arc, $|\lambda|(0, s)$, pouvant être stationnaire, remplaçons la par le paramétrage strictement croissant, $s \rightarrow |\lambda|(0, s) + s$, que l'on ramène à $[0, 1]$ en posant $\phi(s) = \frac{|\lambda|(0, s) + s}{|\lambda| + 1}$. L'inégalité (*) donne, avec $\phi(s) = u, \phi(t) = v$

$$\|\lambda \circ \phi^{-1}(u) - \lambda \circ \phi^{-1}(v)\| \leq |\lambda|(0, \phi^{-1}(v)) - |\lambda|(0, \phi^{-1}(u))$$

et

$$\begin{aligned} \|\lambda \circ \phi^{-1}(u) - \lambda \circ \phi^{-1}(v)\| &\leq \\ |\lambda|(0, \phi^{-1}(v)) - |\lambda|(0, \phi^{-1}(u)) + \phi^{-1}(v) - \phi^{-1}(u) \end{aligned}$$

et donc

$$\|\lambda \circ \phi^{-1}(u) - \lambda \circ \phi^{-1}(v)\| \leq (|\lambda| + 1)(v - u)$$

Ainsi l'arc $\mu = \lambda \circ \phi^{-1}$, qui joint x à y , est lipschitzien et de même longueur que λ . Considérons maintenant le sous ensemble fermé

$$K = \{\mu \in \text{Lip}([0, 1], A) : \mu(0) = x, \mu(1) = y, \text{Lip}(\mu) \leq |\lambda| + 1\}$$

de $C^0([0, 1], A)$. Le théorème d'Ascoli montre que K est compact. La fonction de longueur est semi continue inférieurement en tant que supremum de fonctions continues, elle atteint donc sa borne inférieure sur K . Ce qui montre la proposition .

■

Remarques :

- L'exemple de $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ montre que ce résultat est faux si on ne suppose pas A fermé. (A, δ) est un espace de longueur - voir par exemple

le livre de Gromov [Gr]. Une démonstration de cette proposition est aussi donnée dans le lemme 1.12 de [Gr].

Conjecture ([Ha]) : Si A est un ensemble sous-analytique, $\delta : A \times A \rightarrow \mathbf{R}_+$ est une fonction sous-analytique.

Le théorème suivant montre non pas la sous-analyticité de la distance géodésique, mais l'équivalence de δ à une distance sous-analytique avec des constantes d'uniformisation aussi proches de 1 que l'on veut.

Théorème *Etant donné $A \subset \mathbf{R}^n$ connexe, fermé, et $\epsilon > 0$, il existe une distance $\Delta : A \times A \rightarrow \mathbf{R}_+$, sous-analytique, telle que*

$$\forall x, y \in A \quad \Delta(x, y) \leq \delta(x, y) \leq (1 + \epsilon)\Delta(x, y)$$

Remarques :

- Si A est semi-algébrique, Δ l'est aussi. Le même résultat est vrai dans le cas d'une structure σ -minimale.

- La topologie de longueur - donnée par la distance géodésique - a une base d'ouverts sous-analytiques.

La distance δ n'est pas uniformément équivalente à la distance induite par celle de \mathbf{R}^n . Mais une conséquence du théorème précédent est la propriété de Whitney d'un ensemble sous-analytique (voir [St])

Corollaire 2 (Propriété de Whitney) *Si A est sous-analytique, compact et connexe, il existe $C > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ tels que*

$$\forall x, y \in A \quad \delta(x, y) \leq C\|x - y\|^\alpha$$

Démonstration du corollaire : on applique l'inégalité de Lojasiewicz aux fonctions sous-analytiques $(x, y) \rightarrow \|x - y\|$ et $(x, y) \rightarrow \Delta(x, y)$ sur $A \times A$, le théorème permet de conclure .

■

La preuve du théorème est basée sur la proposition suivante

Proposition 3 Soient $A \subset \mathbf{R}^n$, sous-analytique, et $\epsilon > 0$. Alors il existe une stratification, $A = \bigcup_{\nu \in V} \Gamma_\nu$, telle que :

- (i) Γ_ν est une variété analytique connexe
- (ii) Si $x, y \in \overline{\Gamma_\nu}$, $x \neq y$, il existe un arc C^1 , $\lambda : [0, 1] \rightarrow \overline{\Gamma_\nu}$, tel que $\lambda|_{[0, 1[} \subset \Gamma_\nu$, $\lambda(0) = x$, $\lambda(1) = y$, et $|\lambda| \leq (1 + \epsilon)\|x - y\|$

Cette proposition est une version améliorée des résultats de K. Kurdyka et de A. Parusinski sur l'existence de décompositions L -régulières des ensembles sous-analytiques, voir [Ku1], [Pa]. La démonstration en sera donnée à la fin de la note.

Pour A , fermé connexe, décomposé en morceaux réguliers $A = \bigcup_{\nu \in V} \Gamma_\nu$ comme dans la proposition 3, posons pour tout r et k :

$$\tilde{\Delta}_r(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} \|x_{i+1} - x_i\| : x_0 = x, x_r = y, x_i, x_{i+1} \in \overline{\Gamma_{\nu_i}}, 0 \leq i \leq r-1 \right\},$$

$$\Delta_k(x, y) = \inf \{ \tilde{\Delta}_r(x, y) : r = 1, \dots, k \}.$$

Rappelons que $\inf\{\emptyset\} = +\infty$. Il est clair que chaque Δ_k est sous-analytique. Posons enfin

$$\Delta(x, y) = \inf \{ \Delta_k(x, y) : k = 1, \dots, +\infty \}.$$

Lemme 4 La fonction $\Delta : A \times A \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction sous-analytique, et c'est une distance sur A .

Démonstration : Nous pouvons supposer que le diamètre des Γ_τ est plus petit que 1. Montrons tout d'abord que Δ est sous-analytique : remarquons que pour k donné, $\Delta_k(x, y)$ est atteint sur une chaîne $\{x_l\}_{l \leq r}$ (avec $r \leq k$) telle que trois points de la chaîne n'appartiennent pas au même $\overline{\Gamma_\tau}$. En effet, si $x_{l_1}, x_{l_2}, x_{l_3} \in \overline{\Gamma_\tau}$ pour $l_1 < l_2 < l_3$ on peut remplacer, grâce à l'inégalité triangulaire, la chaîne $\{x_l\}_{l \leq r}$ par $\{x_0, \dots, x_{l_1}, x_{l_3}, \dots, x_r\}$.

Donnons nous $x_0 \in \Gamma_\nu$ et $y_0 \in \Gamma_\mu$, il existe une p -chaîne $\{x_l\}_{l \leq p}$ joignant x_0 à y_0 et réalisant $\Delta_p(x_0, y_0)$. Soient $R = \Delta_p(x_0, y_0) + 3$ et A_R la réunion des $\overline{\Gamma_\tau}$ qui rencontrent la boule $B(x_0, R)$. Désignons par

k_0 le nombre de strates de A_R , et prenons $k \geq k_0$. Si $x \in \Gamma_\nu$ et $y \in \Gamma_\mu$ sont des points quelconques on a

$$\Delta_k(x, y) \leq \Delta_{k_0}(x_0, y_0) + 2,$$

puisque les diamètres de Γ_ν et Γ_μ sont plus petits que 1 et que l'on peut joindre x à y par la chaîne $x, x_1, \dots, x_{p-1}, y$ (bien sûr $p \leq k_0$). Ainsi toute chaîne réalisant $\Delta_k(x, y)$ doit rester dans la boule $B(x_0, R)$, mais on peut admettre que cette chaîne visite chaque $\overline{\Gamma_\tau}$ au plus une fois, donc elle a au plus $k_0 + 1$ points. Nous avons alors montré que

$$\Delta_k(x, y) = \Delta_{k_0}(x, y)$$

pour tout (x, y) dans $\Gamma_\nu \times \Gamma_\mu$. Ceci prouve que Δ est égale à Δ_{k_0} sur $\Gamma_\nu \times \Gamma_\mu$, et donc que Δ est sous-analytique.

Montrons maintenant que Δ est une distance : il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire : prenons $x, y, z \in A$, et soient $\{x_p\}_{p \leq s}$ et $\{y_q\}_{q \leq t}$ des chaînes joignant x à y , et y à z . $\Delta(x, z)$ est inférieure ou égale à

$$\sum_{i=0}^{s-1} \|x_{i+1} - x_i\| + \sum_{i=0}^{t-1} \|y_{i+1} - y_i\|,$$

et donc $\Delta(x, z) \leq \Delta(x, y) + \Delta(y, z)$.

■

Démonstration du théorème : Admettons la proposition 3. Nous allons montrer que Δ est la distance cherchée. Si $\{x_i : 0 \leq i \leq k\}$ est une suite de points telle que $x_i \in \overline{\Gamma_\nu}$, $x_{i+1} \in \overline{\Gamma_\nu}$, on a, en notant λ_1 l'arc passant par les x_i donné par la proposition 3,

$$|\lambda_1|(t_i, t_{i+1}) \leq (1 + \epsilon) \|x_{i+1} - x_i\|.$$

En sommant les inégalités du type précédent on obtient :

$$\delta(x, y) \leq |\lambda_1| = \sum_{i=0}^{k-1} |\lambda_1|(t_{i+1}, t_i) \leq (1 + \epsilon) \sum_{i=0}^{k-1} \|x_{i+1} - x_i\|.$$

Donc d'après la définition de Δ

$$\delta(x, y) \leq (1 + \epsilon) \Delta(x, y).$$

On obtient l'autre inégalité de la manière suivante : soit λ un arc joignant x à y et réalisant la distance géodésique ; un tel arc est donné par la proposition 1. Il existe une suite $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ et une suite $v_0, \dots, v_{k-1} \in V$, telles que

$$\lambda(t_i), \lambda(t_{i+1}) \in \overline{\Gamma_{v_i}}, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

On peut aussi supposer que $v_i \neq v_j$ pour $i \neq j$. La suite d'inégalités :

$$\Delta(x, y) \leq \Delta_k(x, y) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |\lambda|(t_{i+1}, t_i) = \delta(x, y)$$

montre le résultat. ■

Rappelons (voir [Kul]) qu'une sous-variété $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ est dite η -plate si pour tout a, b de Γ

$$\sin(\mathbf{n}(a), \mathbf{n}(b)) < \eta \quad (*)$$

où $\mathbf{n}(a)$ et $\mathbf{n}(b)$ sont des vecteurs normaux à Γ en a et b . Pour simplifier les calculs nous modifierons cette définition en remplaçant (*) par

$$\left| \frac{\mathbf{n}(a)}{|\mathbf{n}(a)|} - \frac{\mathbf{n}(b)}{|\mathbf{n}(b)|} \right| < \eta$$

Enfin nous dirons qu'une fonction f de classe C^1 est η -plate si son graphe l'est. Avant de démontrer la proposition 3 prouvons le résultat suivant

Lemme 5 Soit $f : A' \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction, C^1 sur un ouvert A' de \mathbf{R}^{n-1} , telle que

(i) $\forall x' \in A' \|\nabla f(x')\| \leq M = M(n),$

(ii) f est η -plate,

alors $\{\nabla f(x') : x' \in A'\}$ est contenu dans une boule de $L(\mathbf{R}^{n-1}, \mathbf{R})$ de rayon plus petit que ηC , où $C = \sqrt{1 + M^2}(1 + M)$.

Démonstration : l'hypothèse f est η -plate nous dit que $T_{(x', f(x'))}f$ est contenu dans une boule de $G(n-1, n)$ de rayon η . Le vecteur $v(x') = (\nabla f(x'), -1)$ est normal au graphe de f au point $(x', f(x'))$.

Fixons $a \in A'$, pour tout $b \in A'$ nous avons $|\frac{v(b)}{|v(b)|} - \frac{v(a)}{|v(a)|}| < \eta$.
 Ce qui nous donne en prenant chaque composante de cette différence :
 $|\nabla f(b) - \frac{|v(b)|}{|v(a)|} \nabla f(a)| < \eta |v(b)|$ et $|1 - \frac{|v(b)|}{|v(a)|}| < \eta |v(b)|$. La différence
 $|\nabla f(b) - \nabla f(a)|$ est donc inférieure à $\eta |v(b)| + \eta |v(b)| |\nabla f(a)|$ ainsi

$$|\nabla f(b) - \nabla f(a)| < \eta \sqrt{1 + M^2} (1 + M)$$

d'où la majoration indiquée.

■

Nous dirons que $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ est une s -cellule L -régulière avec constante M , η -plate, si, après une transformation orthogonale, Γ peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes

$$\{(x', t) \in \mathbf{R}^n : x' \in \Gamma', f(x') < t < g(x')\},$$

$$\{(x', t) \in \mathbf{R}^n : x' \in \Gamma', h(x') = t\}$$

où f, g, h sont des fonctions analytiques, η -plates à différentielles bornées par M , sous analytiques, et Γ' une s -cellule dans \mathbf{R}^{n-1} , L -régulière avec constante M , η -plate.

Démonstration de la proposition 3 : en utilisant les résultats de [Ku1], il existe, pour tout $\eta > 0$, une décomposition, en cellules comme si dessus, avec une constante M universelle. Il nous suffit donc de montrer le point (ii) de la proposition.

En remarquant que tout point de l'adhérence d'une s -cellule peut être joint par un arc C^1 de longueur arbitrairement petite, on se ramène au cas où les points x et y sont dans l'intérieur de la s -cellule.

Nous allons en fait montrer le résultat suivant, par récurrence sur la dimension de l'espace ambiant : il existe un arc λ avec les propriétés de (ii) et à variation de tangente majorée par $\theta_n(\eta)$ avec $\lim_{\eta \rightarrow 0} \theta_n(\eta) = 0$.

Le cas $n = 1$ est clair, supposons donc avoir montré le résultat pour les s -cellules η -plates de dimension inférieure ou égale à $n - 1$. Nous ne

traiterons que le cas où Γ est une s -cellule dans \mathbf{R}^n comprise entre le graphe de deux fonctions f et g , analytiques dans une s -cellule η -plate Γ' , sous-analytiques ; c'est à dire $\Gamma = \{(x', t) \in \mathbf{R}^n : x' \in \Gamma', f(x') < t < g(x')\}$, avec de plus ∇f et ∇g bornés par M . Le cas où Γ est un graphe au dessus de Γ' est similaire.

Soient $x = (x', a)$ et $y = (y', b)$ deux points de Γ , il existe un arc C^1 , γ tracé dans Γ' , de longueur l inférieure à $(1 + \eta)\|x' - y'\|$, joignant x' à y' . Paramétrons γ par sa longueur s , et définissons un arc λ par $\lambda(s) = (\gamma(s), \alpha(s))$ où α est la fonction donnée par $\alpha(s) = f(\gamma(s))$ si $a + s \frac{(b-a)}{l} < f(\gamma(s))$, $\alpha(s) = g(\gamma(s))$ si $a + s \frac{(b-a)}{l} > g(\gamma(s))$,
 $\alpha(s) = a + s \frac{(b-a)}{l}$ sinon.

Par hypothèse de récurrence l'arc γ est à variation de tangente majorée par $\theta_{n-1}(\eta)$, montrons que l'arc λ convient et est aussi à faible variation de la tangente :

(i) les portions de λ tracées à l'intérieur de Γ , définies sur un intervalle $[u, v]$, ont des longueurs égales à

$$\int_u^v \sqrt{1 + \left(\frac{b-a}{l}\right)^2} ds = \frac{v-u}{l} \sqrt{l^2 + (b-a)^2},$$

(ii) celles tracées sur f (ou g) ont pour longueur, sur un intervalle $[u, v]$, $\int_u^v \sqrt{1 + |\alpha'(s)|^2} ds$, or d'une part $|\alpha'(s)| = |\nabla f(\gamma(s))\gamma'(s)|$, et d'autre part, comme $f(\gamma(s)) - a - s \frac{(b-a)}{l} \geq 0$ est nul en u et v , il existe, d'après le théorème de Rolle, un s_0 pour lequel $|\nabla f(\gamma(s_0))\gamma'(s_0)| = \frac{b-a}{l}$. Et donc, en vertu du lemme 5,

$$|\alpha'(s) - \alpha'(s_0)| \leq \eta C + M \theta_{n-1}(\eta) = \tau_n(\eta),$$

et, par suite

$$|\alpha'(s)| \leq |\nabla f(\gamma(s_0))\gamma'(s_0)| + \tau_n(\eta),$$

d'où

$$\int_u^v \sqrt{1 + |\alpha'(s)|^2} ds \leq \frac{v-u}{l} \sqrt{l^2 + (b-a + l\tau_n(\eta))^2}.$$

La longueur totale de l'arc λ est ainsi majorée par

$$\max(\sqrt{l^2 + (b-a)^2}, \sqrt{l^2 + (b-a + l\tau_n(\eta))^2}).$$

Or $\sqrt{l^2 + (b-a)^2} \leq \sqrt{(1+\eta)^2 \|x' - y'\|^2 + (b-a)^2} \leq (1+\eta) \|x - y\|$,
 et, de même $\sqrt{l^2 + (b-a + l\tau_n(\eta))^2}$ est plus petit que
 $(1+\eta) \|x - y\| (1 + 2M\tau_n(\eta) + \tau_n(\eta)^2)^{\frac{1}{2}}$, en utilisant $\frac{|b-a|}{l} \leq M$. Ainsi

$$|\lambda| \leq (1+\eta)(1 + 2M\tau_n(\eta) + \tau_n(\eta)^2)^{\frac{1}{2}} \|x - y\|,$$

et dès que η est tel que

$$(1+\eta)(1 + 2M\tau_n(\eta) + \tau_n(\eta)^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

on a $|\lambda| \leq (1 + \frac{\epsilon}{2}) \|x - y\|$, et la variation de la tangente de λ est majorée
 par $\sqrt{\theta_{n-1}(\eta)^2 + \tau_n(\eta)^2}$. On obtient l'arc cherché en ramenant l'arc λ
 à l'intérieur de la cellule, puis en le lissant. Ce que l'on peut faire de
 manière à ne pas augmenter la longueur de plus de $\frac{\epsilon}{2} \|x - y\|$.

■

Remarques :

En utilisant la version à paramètre de la proposition 3 [Ku2], on obtient une version à paramètre du théorème : si A est un sous analytique fermé de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$, à tranches $\{A_y\}_{y \in \mathbf{R}^p}$ connexes, il existe, pour chaque ϵ , une famille sous-analytique de distances sous-analytiques, $\Delta_y(\cdot, \cdot)$, telle que la distance géodésique dans chaque tranche, δ_y , soit uniformément équivalente à Δ_y . C'est à dire

$$\Delta_y \leq \delta_y \leq (1 + \epsilon)\Delta_y.$$

En particulier, si A est un ensemble semi algébrique, alors pour tout ϵ , le diagramme de la distance semi algébrique Δ_y ne dépend que du diagramme de A (par diagramme de A , on entend les nombres et degrés des polynômes qui apparaissent dans une description de A par égalités et inégalités).

Les auteurs tiennent à remercier les referees pour leurs remarques qui ont permis d'améliorer la rédaction de cette note.

References

- [Gr] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, Textes Mathématiques 1, CEDIC, Paris 1981.
- [Ha] R. Hardt, *Some analytic bounds for subanalytic sets*, Differential geometric control theory, Progress in Math., vol 27, 1983, p. 259-267.
- [Ku1] K. Kurdyka, *On a subanalytic stratification satisfying a Whitney property with exponent 1*, Real algebraic geometry, Proceedings, Rennes 1991, L.N.M 1524, 1992, p. 316-322.
- [Ku2] K. Kurdyka, *Linear bounds for resolutions of 1-boundaries in subanalytic sets*, Real analytic and algebraic geometry, Proceedings, Trento 1992, Walter de Gruyter, 1995, p. 189-196.
- [Pa] A. Parusinski, *Lipschitz stratification of subanalytic sets*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 27, 1994, p. 661-696.
- [St] J. Stasica, *The Whitney condition for subanalytic sets*, Zesz. Nauk. U. J., Prace Mat. 32(1982), p. 211-221.

Instytut Matematyki,
Uniwersytet Jagielloński,
Reymonta 4,
Kraków PL-30059, Pologne
Laboratoire de Mathématiques,
Université de Savoie,
73376 Le Bourget-du-Lac,
France
kurdyka@univ-savoie.fr

Laboratoire de Mathématiques,
Université de Savoie, 73376
Le Bourget-du-Lac, France
orro@univ-savoie.fr