REVISTA MATEMÁTICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 9, número 2: 1996

Le Genre de Heegaard de 3-variétés orientables

Phoebe HOIDN

Abstract

We consider irreducible, closed, oriented, connected 3-manifolds with a nontrivial fundamental group, and link Heegaard genus to fundamental domains. We shall show that the Heegaard genus is the least positive integer $h(M)$ for which the manifold has a fundamental domain with $2 \cdot h(M)$ faces.

Introduction

En 1983, M. Boileau et H. Zieschang ont déterminé le genre de Heegaard de presque tous les fibrés de Seifert en fonction des invariants de Seifert de ces variétés (cf. [1] et [2]). Tout récemment, J.H. Rubinstein a montré l'existence d'un algorithme permettant de déterminer le genre de toute 3-variété irréductible, close, connexe et orientable (cf. [4]). Dans le cadre de ce sujet de recherche, nous nous sommes proposé d'étudier les liens entre les scindements de Heegaard de la variété et certains de ses domaines fondamentaux; ainsi, le résultat principal du présent article sera d'établir le lien unissant le genre de Heegaard au nombre de faces d'un domaine fondamental de la variété, et ceci par le théorème suivant: *Soit M une variété orientable, connexe, close, irréductible de groupe fondamental non trivial; alors, le genre de M est le plus petit entier $h(M)$ pour lequel M possède un domaine fondamental à $2 \cdot h(M)$ faces.*

Nous commencerons par définir, comme introduction à l'*énoncé du théorème*, le type des domaines fondamentaux considérés. Puis, dans des *propositions préliminaires*, nous décrirons quelques propriétés relatives aux scindements de Heegaard. Enfin, nous démontrerons dans le dernier chapitre le théorème susmentionné.

1991 Mathematics Subject Classification: 57 N 10

Servicio Publicaciones Univ. Complutense. Madrid, 1996.

1 Enoncé du théorème

Il importe tout d'abord de définir divers termes et notations dont il sera fréquemment fait usage par la suite. Une surface close, connexe, orientable séparant une variété M close, connexe, orientable, en deux tores pleins V, W de genre g, où g est un entier positif, est dite *scindement de Heegaard de genre g* de M. D'autre part, par *genre de Heegaard* d'une variété, que nous noterons $h(M)$, nous entendrons le plus petit entier g pour lequel M admet un scindement de Heegaard de genre g.

Si M est pourvue d'une triangulation, alors, par la projection de revêtement $\pi : \tilde{M} \to M$, nous pouvons munir $\tilde{M}$ d'une triangulation induite. Ainsi, nous dirons qu'une union de simplexes de $\tilde{M}$ pour une triangulation appropriée de M est un *domaine fondamental Ω de M* s'il satisfait les trois conditions suivantes: $\pi(\Omega) = M$, *l'intérieur* de Ω est une boule sur laquelle π est injective, le bord est l'union d'un nombre pair de faces et d'un graphe connexe ν. Pour définir une *face*, considérons un ensemble $\mathcal{U}$ d'unions de simplexes de dimension 2 dans $\partial\Omega$ tel que la partie intérieure de chaque union disjointe de ν soit homéomorphe à un disque ouvert et que, pour toute union $\omega \in \mathcal{U}$, il existe d'une part une union $\omega' \in \mathcal{U}$ et d'autre part une application de revêtement γ_ω avec $\gamma_\omega(\omega) = \omega'$; c'est une telle union que nous appellerons *face*. Les faces d'un domaine fondamental Ω seront dites *faces maximales*, si, pour toute arête δ contenue dans l'intersection de deux faces ω et ω', nous avons $\gamma_\omega(\delta) \neq \gamma_{\omega'}(\delta)$. Enfin, nous pouvons définir une application ξ en sorte que, pour tout domaine fondamental Ω, $2 \cdot \xi(\Omega)$ soit le nombre de faces maximales de Ω. Tenant à l'esprit ces définitions et considérant qu'on appelle *irréductible* une variété telle que toute sphère plongée dans la variété borde une boule fermée, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Soit M une variété close, orientable, connexe, irréductible et de groupe fondamental non trivial; alors*

$$h(M) = min\,\{\,\xi(\Omega) \mid \Omega \; domaine \; fondamental \; de \; M\}\,.$$

Remarque. On sait que toute variété est décomposable en somme connexe de variétés premières $M_1, \ldots, M_n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $h(M) = \sum_i h(M_i)$. (cf. [3]). Le théorème ci-dessus peut ainsi être généralisé.

2 Propositions préliminaires

Soit V un tore plein de genre g; nous dirons que l'ensemble $\{v\}$ de g disques $v_1, \ldots, v_g$, disjoints deux à deux et proprement plongés dans V, forme un système de disques méridiens de V si l'adhérence de $V \setminus N(v)$ est une boule fermée, où $N(v)$ désigne un voisinage régulier dans V de v, qui est l'union des v_i. Soit M une variété; par définition, un *diagramme de Heegaard de genre g* associé à un scindement de Heegaard F est un quadruplet (M, F, v, w), où $\{v\}$ et $\{w\}$ sont respectivement des systèmes de disques méridiens des tores pleins V et W. Sans restreindre la généralité, nous pourrons supposer que ∂v est transverse à ∂w.

Proposition 1. *Soit M une variété close, connexe, orientable, irréductible et (M, F, v, w) un diagramme de Heegaard de genre g de M; alors $v \cap \partial w_i \neq \emptyset$ et $v_i \cap \partial w \neq \emptyset$ pour tout i avec $1 \leq i \leq g$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un indice i, avec $1 \leq i \leq g$, tel qu'on ait $v \cap \partial w_i = \emptyset$. Alors, ∂w_i est contractile dans V, et, par le lemme de Dehn, ∂w_i est le bord d'un disque D^2 proprement plongé dans V. Par suite, l'union $D^2 \cup w_i$ sera une sphère plongée dans M qui ne séparera pas M, puisque w_i ne sépare pas W. Or, ceci est en contradiction avec l'hypothèse que M est irréductible. On montrerait de même que $v_i \cap \partial w \neq \emptyset$ pour tout indice i avec $1 \leq i \leq g$.

A tout tore plein V de genre g muni d'un système de disques méridiens $\{v\}$, noté ci-après (V, v), associons un bouquet de générateurs $l_1 \vee \ldots \vee l_g$ en telle sorte que V soit un voisinage régulier de $l_1 \vee \ldots \vee l_g$ et que $v_i \cap l_j$ soit vide si $i \neq j$ et réduit à un point si $i = j$. Choisissons $l_1 \vee \ldots \vee l_g$ et $k_1 \vee \ldots \vee k_g$ comme bouquets associés à (V, v) et à (W, w) respectivement. Nous avons par suite $\pi_1 M = < [l_1], \ldots, [l_g] \mid [\partial w_1] = 1, \ldots, [\partial w_g] = 1 >$.

Proposition 2. *Soit F un scindement de Heegaard de genre g d'une variété M close, connexe, orientable avec un groupe fondamental non trivial; il existe alors un diagramme de Heegaard (M, F, v, w) tel que pour tout i, avec $1 \leq i \leq g$, l_i et k_i soient non contractiles dans M.*

Démonstration. Choisissons un système de disques méridiens $\{v^*\}$, et soit $l_1^* \vee \ldots \vee l_g^*$ un bouquet de générateurs associé à (V, v^*). Comme

$\pi_1 M$ est non trivial, l'un des générateurs est non contractile dans M. Changeant au besoin la numérotation des $l_1^*, \ldots, l_g^*$, nous pouvons supposer que $l_1^*, \ldots, l_{r-1}^*$ sont contractiles et que $l_r^*, \ldots, l_g^*$ sont non contractiles dans M. Par une construction explicite nous pouvons ensuite mettre en évidence l'existence d'un système de disques méridiens $\{v\}$ de V tel que, si $l_1 \vee \ldots \vee l_g$ est un bouquet de générateurs associé à (V, v), nous ayons, dans V, $l_i \sim l_i^* l_g^*$ pour tout i avec $1 \leq i < r$, et $l_i \sim l_i^*$ pour tout i avec $r \leq i \leq g$. En conséquence, aucun des l_i ne sera contractile dans M. De même, il existe un système de disques méridiens $\{w\}$ de W et un bouquet $k_1 \vee \ldots \vee k_g$ associé à (W, w) pour lequel aucun des k_i ne sera contractile dans M.

3 Démonstration du théorème

Comme il est d'usage (cf. [5]), nous associons à tout domaine fondamental Ω de M un scindement de Heegaard de genre égal à $\xi(\Omega)$; en effet, un voisinage régulier de l'image par la projection de revêtement π de l'union formée du graphe ν et des bords des faces est un tore plein V (les faces y sont supposées maximales). Pour voir que l'adhérence de $M \backslash V$ est également un tore plein, il suffit d'observer que cette adhérence est un voisinage régulier d'un bouquet obtenu comme image par π d'une union de segments, chaque segment reliant un point de l'intérieur de Ω à un point d'une face maximale. De plus, les deux tores pleins ont leurs bords en commun; ils sont donc d'un même genre, égal à $\xi(\Omega)$, et déterminent ainsi un scindement de Heegaard de M.

Soit (M, F, v, w) un diagramme de Heegaard de genre g associé au scindement de Heegaard F de genre g. Montrons qu'il est possible de choisir un domaine fondamental Ω de M en telle sorte que $\xi(\Omega)$ soit inférieur ou égal à g. Pour ceci, nous mettrons en évidence l'existence d'une section $s : M \to \tilde{M}$ telle que l'adhérence de $s(M)$ soit le domaine fondamental cherché. La construction de cette section sera effectuée en trois parties:

(i) Choix d'une section partielle au-dessus de V.

(ii) Prolongement de celle-ci à w.

(iii) Prolongement de cette dernière à $W \setminus w$.

(i) Selon la proposition 2, il existe un diagramme (M, F, v, w) tel qu'aucun des l_i et des k_i n'est contractile dans M. Puisque $V \setminus v$ est une boule fermée, du bord de laquelle nous avons enlevé $2g$ disques deux à deux disjoints, chaque composante connexe de $\pi^{-1}(V \setminus v)$ est homéomorphe à $V \setminus v$; et, comme l_i n'est pas contractile dans M, l'adhérence d'une composante connexe du relèvement du générateur

l_i sans son point d'intersection avec v_i est un segment. Ainsi, l'adhérence d'une composante connexe de $\pi^{-1}(V \setminus v)$ est une boule fermée. Prenons maintenant une section $s : M \to \tilde{M}$ telle que $s(V)$ soit contenue dans une de ces composantes connexes. Cette condition détermine la section sur $V \setminus v$, et détermine donc également l'adhérence de $s(V)$. Or, pour tout i avec $1 \leq i \leq g$, l'intersection de $\pi^{-1}(v_i)$ avec l'adhérence de $s(V)$ est formée de deux disques, v_i' et v_i''; en conséquence, il existe g applications de revêtement

$\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, pas nécessairement disjointes deux à deux, telles que $\gamma_i(v_i') = v_i''$ pour tout i avec $1 \leq i \leq g$.

Maintenant, pour une section définie sur une union N de simplexes dans M, nous pouvons généraliser la définition de l'application ξ à l'adhérence de $s(N)$; pour le tore plein V, l'application ξ ainsi généralisée prend la valeur g.

La poursuite du raisonnement demande l'introduction d'une *opération élémentaire*. Nous la posons à la suite de définitions préliminaires.

Définitions. Un *cône de base* σ, noté $cone(\sigma)$, est l'ensemble quotient $\sigma \times I / \sim$, la relation d'équivalence $\sim$ étant définie par $(s,t) \sim (s',t')$ si et seulement si $t = t' = 1$ ou $s = s'$, $t = t'$, et $I = [0,1]$. Désignons par $\pi_\sigma : \sigma \times I \to \sigma \times I/\sim$ la projection associée; alors l'image par π_σ de $\sigma \times \{1\}$ est un point $\mathcal{P}$, qui sera appelé *sommet du cône.*

Opération élémentaire:

Soient $N, C \subset M$ deux unions de simplexes telles que $N \cap C = \Sigma \subset \partial N$; si nous pouvons munir C d'une structure conique, c'est-à-dire s'il existe un homéomorphisme $H : cone(\sigma) \to C$ tel que $H \circ \pi_\sigma(\sigma \times \{0\}) = \Sigma$, alors toute section définie sur N se prolongera de manière *naturelle* à $C \setminus H(\mathcal{P})$, en ce sens que l'image de $C \setminus H(\mathcal{P})$ par la section sera homéomorphe à $C \setminus H(\mathcal{P})$.

Pour établir cette affirmation, il suffit d'observer que $C \setminus H(\mathcal{P})$ est homéomorphe à $\Sigma \times [0,1)$. Remarquons aussi que nous pouvons généraliser cette opération élémentaire à un ensemble C muni d'une structure conique par un homéomorphisme $H : cone(\sigma) \to C$ tel que $H \circ \pi_\sigma(\sigma \times \{0\}) = \Sigma$ soit l'intérieur d'une union de simplexes. Nous supposerons en outre dorénavant que tout point, arête, face, fait partie d'une triangulation de la variété.

(ii) Selon la proposition 1, l'intersection de ∂w_i avec ∂v est formée de points; en conséquence, l'ensemble des points de ∂w_i contenus dans $V \setminus v$ se compose de segments ouverts. Munissons w_i, pour tout i avec $1 \leq i \leq g$, d'une structure conique par un homéomorphisme $H_i : cone(S^1) \to w_i$. Désignons par I_i l'ensemble des $s \in S^1$ tels que $H_i \circ \pi_{S^1}(s, 0)$ est un point de $v \cap \partial w_i$, et par Δ^2 le complémentaire dans w_i de l'ensemble des segments $\{H_i \circ \pi_{S^1}(s,t), t \in I\}$, où $s \in I_i$. L'application $H_i \circ \pi_{S^1}$ restreinte à $(S^1 \setminus I_i) \times I$ induit une structure conique sur l'union $\Delta^2 \cup H_i(\mathcal{P}_i)$, $\mathcal{P}_i$ étant le sommet du cône. Pour pouvoir appliquer l'opération élémentaire à Δ^2, il suffit de s'assurer que la section est bien définie sur l'image par $H_i \circ \pi_{S^1}$ de $(S^1 \setminus I_i) \times \{0\}$; or, ceci est vérifié par la construction même de $s(V)$. En revanche, nous pouvons encore choisir la section au-dessus de l'union des segments $\{ H_i \circ \pi_{S^1}(s,t),\ t \in I \}$, $s \in I_i$, car cette union est formée des points ayant strictement plus d'un relevé dans l'adhérence de $s(\Delta^2)$. Il nous reste encore à démontrer l'inégalité qui affirme que l'application ξ prend sur l'adhérence de $s(V \cup w)$ une valeur plus petite que sur l'adhérence de $s(V)$– laquelle valeur n'est pas nécessairement strictement plus petite. Tout comme chaque point $H_i \circ \pi_{S^1}(s,0)$, $s \in I_i$, a deux relevés P et Q dans l'adhérence de $s(V \cup w)$, tout segment $\{ H_i \circ \pi_{S^1}(s,t),\ t \in I \}$, $s \in I_i$, possédera également deux relevés p et q dans l'adhérence de $s(V \cup w)$ avec $P \in p$ et $Q \in q$. Or, nous savons (du point (i) ci-dessus) qu'il existe une application de revêtement γ_i telle que $\gamma_i{}^\varepsilon(P) = Q$ avec $\varepsilon = \pm 1$. Ainsi, par la structure conique, $\gamma_i{}^\varepsilon(p) = q$. Ceci clôt la démonstration de l'inégalité.

(iii) Comme c'est le cas pour $V \setminus v$, l'adhérence de chaque composante connexe de $\pi^{-1}(W \setminus w)$ est une boule fermée. Soit δ^3 une telle adhérence. Considérons l'intersection de $\partial\delta^3$ avec l'union formée des relevés de ∂v et des $H_i \circ \pi_{S^1}(s,t)$ avec $s \in I_i$ et $t \in I$; cette intersection est un graphe $\mathcal{G}$. Par un homéomorphisme $H : cone(S^2) \to \delta^3$, munissons tout d'abord δ^3 d'une structure conique. Nous n'avons pas, cette fois, muni d'une structure conique une union de simplexes de la variété M, mais une union de simplexes de son revêtement universel $\tilde{M}$; en revanche, la projection $\pi : \tilde{M} \to M$ munit localement $\pi(\delta^3) = W$ d'une structure conique induite. Puisque la projection π restreinte à $\partial\delta^3$ n'est pas injective, nous n'avons pas ici une structure conique globale. Revenons maintenant à la boule fermée δ^3. Nous avons $\mathcal{G} \subset H \circ \pi_{S^2}(S^2 \times \{0\})$. Soit $J \subset S^2$ l'ensemble des s tels que $H \circ \pi_{S^2}(s, 0) \in \mathcal{G}$, et soit Δ^3 le complémentaire dans δ^3 de $\{H \circ \pi_{S^2}(s,t),\ s \in J \text{ et } t \in I\}$. L'application $H \circ \pi_{S^2}$ restreinte à $(S^2 \setminus J) \times I$ induit une structure conique sur $\Delta^3 \cup H(\mathcal{P})$; par suite, l'image par la projection π de cette union possède localement une structure conique induite. Comme la section est définie sur $\pi(\partial\delta^3 \setminus \mathcal{G})$, nous pouvons effectuer une suite d'opérations élémentaires et prolonger la section à $\pi(\Delta^3)$. Enfin, si l'on désigne par α l'application $\pi \circ H \circ \pi_{S^2}$, l'ensemble des points de W avec plus d'un relevé dans l'adhérence de $s \circ \pi(\Delta^3)$ est $\alpha(J \times I)$. Prenons maintenant une section $s : M \to \tilde{M}$ en sorte que $s(M)$ soit contenue dans l'adhérence de l'union de $s \circ \pi(\Delta^3)$ et de $s(V \cup w)$. Or, nous avons vu que deux points distincts P, Q de l'intersection de $\pi^{-1}(\alpha\,(J \times \{0\}))$ avec l'adhérence de $s(M)$ possèdent la propriété suivante: soit $\gamma(P) \neq Q$ pour toute application de revêtement γ, soit il existe un i, $1 \leq i \leq g$, tel que $\gamma_i{}^{\varepsilon}(P) = Q$, avec $\varepsilon = \pm 1$. Les points de l'intersection de $\pi^{-1}(\alpha\,(J \times I))$ avec l'adhérence de $s(M)$ possèdent donc également cette propriété, car la construction de la section au-dessus de $\pi(\Delta^3)$ dépend de la structure conique. Comme l'intérieur de $s(M)$ est une boule, le domaine fondamental Ω cherché sera l'adhérence de $s(M)$ dans $\tilde{M}$.

Bibliographie

[1] M. Boileau, H. Zieschang, Genre de Heegaard d'une variété de dimension 3 et générateurs de son groupe fondamental, C. R. Acad. Sc. Paris 296 (1983), 925-928.

[2] M. Boileau, H. Zieschang, Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds, Invent. Math. 76 (1984), 455-468.

[3] W. Haken, Some results on surfaces in 3-manifolds, Studies in modern topology (P.J. Hilton éd.), MAA Stud. Math. 5 (1968), 39-98.

[4] J.H. Rubinstein, Polyhedral minimal surfaces, Heegaard splittings and decision problems for 3-dimensional manifolds (à paraître).

[5] H. Seifert, W. Threlfall, A textbook of topology, Academic Press, New York 1980.

Département de mathématiques
Ecole polytechnique fédérale de Lausanne
1015 Lausanne, Suisse

Recibido: 21 de Julio de 1995