REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 5, números 2 y 3; 1992.

Inegalités de Kato et Semi-Groupes Sous-Markoviens

WOLFGANG ARENDT and PHILIPPE BENILAN

ABSTRACT. Let A be the infinitesimal generator of a continuous semigroup of bounded linear operators $T(t)$ on $\mathscr{C}_o(\Omega)$. If the operators $T(t)$ are submarkovian, then A satisfies the «Kato inequalities»: $\int w\,Au\,d\mu \leq < j o U,\ A'u >$ for $u \in D(A)$, $0 \leq \mu \in D(A')$ and $w \in L^1(\Omega, \mu)$ with $w(x) \in \partial j(u(x))$ $\mu-$a.e. $X \in \Omega$, where∂j is the subdifferential of a convex function $j: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ with $j(0)=0$. We study the converse statement which is false general. We also study the corresponding problem when 'submarkovian' is replaced by 'homomorphisms'.

On peut formuler l'inégalité de Jensen en termes d'opérateurs: soient Ω un espace localement compact et T: $\mathscr{C}_0(\Omega) \to \mathscr{C}_0(\Omega)$ linéaire; si T est *sous-markovien* (c'est à dire positif et contractant), alors

$$(*) \qquad j \circ Tu \leq T(j \circ u) \qquad \text{pour } u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$$

pour toute fonction convexe $j: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ avec $j(0)=0$. Il est immédiat et bien connu que l'inégalité (*) avec $j(r)=|r|$ caractérise les opérateurs T positifs. Nous montrerons que si l'inégalité (*) est satisfaite pour au moins une fonction convexe j avec $j(0)=0$ qui n'est pas sous-linéaire, alors T est sous-markovien.

Considérons maintenant un semi-groupe continu d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t \geq 0}$ sur $\mathscr{C}_0(\Omega)$ de générateur infinitésimal A. On vérifie facilement que l'inégalité (*) pour tous les opérateurs $T = T(t)$ implique l'inégalité

$$(**) \qquad \int w\,Au\,d\mu \leq < j \circ u,\ A'\mu >$$

1991 Mathematics Subject Classification: 47D03, 47D07, 31C45.
Editorial Complutense. Madrid, 1992.

pour $u \in D(A)$, $0 \leq \mu \in D(A')$ et $w \in L^1(\Omega, \mu)$ avec $w(x) \in \partial j(u(x))$ μ-p.p.$x \in \Omega$, où ∂j est le sous-différentiel de la fonction convexe j et A' est l'adjoint de A dans l'espace $\mathscr{C}_0(\Omega)'$ des mesures de Radon bornées sur Ω.

Dans le cas où A est le Laplacien sur $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^N)$ et $j(r) = |r|$, l'inégalité (**) est précisément l'inégalité classique de Kato

$$\Delta u \text{ sign } u \leq \Delta |u| \qquad \text{au sens des distributions.}$$

En prenant d'autres fonctions convexes j, on obtient ainsi une variété d'«inégalités de Kato» pour le Laplacien que nous étudierons (cf. [5] où des inégalités de Kato pour d'autres fonctions j sont utilisées).

La partie principale de cet article est consacrée au problème réciproque: les inégalités (**) pour le générateur A impliquent-elles que le semi-groupe $(T(t))$ est sous-markovien? Nous verrons qu'en général ceci n'est pas vrai, même si (**) est satisfaite pour toute fonction convexe j avec $j(0) = 0$. Par contre sous des conditions supplémentaires, l'implication est vraie même si on ne sait pas a priori que A est générateur d'un semi-groupe. Par exemple on a le résultat suivant: soit A un opérateur de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ à domaine dense tel que $(I - \lambda A)^{-1}$ soit défini sur $\mathscr{C}_0(\Omega)$ et positif pour $\lambda > 0$ petit, alors A engendre un semi-groupe sous-markovien si et seulement si les inégalités (**) sont satisfaites pour au moins une fonction convexe j avec $j(0) = 0$ qui n'est pas sous-linéaire.

Nous étudierons également les égalités correspondant à (**) et montrerons que, sous certaines hypothèses supplémentaires, elles caractérisent les générateurs de semi-groupes d'homomorphismes de l'algebre $\mathscr{C}_0(\Omega)$.

Le plan de l'article suit exactement les paragraphes ci-dessus: dans la Section 1, nous précisons le lien entre l'inégalité de Jensen et les opérateurs sous-markoviens; dans la Section 2, nous donnons diverses versions de l'inégalité de Kato; la Section 3 est consacrée à la réciproque et la Section 4 à la caractérisation des générateurs de semi-groupes d'homomorphismes.

Remerciements. Nous tenons à remercier M. G. Crandall pour des discussions sur l'inégalité de Kato par rapport à une fonction convexe dans le cadre abstrait.

1. INÉGALITÉ DE JENSEN ET OPÉRATEURS SOUS-MARKOVIENS

On se donne Ω un espace localement compact et on note $\mathscr{K}(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$ à support compact, muni de sa topologie de limite projective usuelle; $\mathscr{F}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions partout définies de Ω dans $\mathfrak{R}$, muni de la topologie de la converge simple. Soit T une application linéaire de $\mathscr{K}(\Omega)$ dans $\mathscr{F}(\Omega)$.

On dit que T est *positif* (resp. *sous-markovien*) si pour $u \in \mathscr{K}(\Omega)$

$$(1) \qquad u \geq 0 \text{ (resp. } u \leq 1) \Rightarrow Tu \geq 0 \text{ (resp. } Tu \leq 1).$$

Il est clair que tout opérateur sous-markovien est positif. Notons aussi que si T est positif, il est alors continu de $\mathscr{K}(\Omega)$ dans $\mathscr{F}(\Omega)$. Enfin T est sous-markovien si et seulement si il est un opérateur positif et contractant dans l'espace de Banach $\mathscr{F}_b(\Omega)$ des fonctions numériques bornées sur Ω, muni de la norme de la convergence uniforme.

On note J_0 le cone des fonctions convexes semi-continues inférieurement $j: \mathfrak{R} \to]-\infty, +\infty]$ avec $j(0)=0$. Pour $j \in J_0$, on pose $D(j) = \{r \in \mathfrak{R}; j(r) < +\infty\}$. Notons que $D(j)$ est un interval contenant 0 et que la fonction j est continue sur $D(j)$; en particulier, si $u \in \mathscr{K}(\Omega)$ (resp. $\mathscr{F}(\Omega)$) prend ses valeurs dans $D(j)$, alors la fonction $j \circ u$ est dans $\mathscr{K}(\Omega)$ (resp. $\mathscr{F}(\Omega)$). On dit que T est *sous-invariant* par j si

$$(2) \qquad j \circ Tu \leq T(j \circ u) \text{ pour } u \in \mathscr{K}(\Omega) \text{ avec } u(\Omega) \subset D(j).$$

Il est clair que T est sous-invariant (et même invariant) par toute fonction linéaire $j(r) = wr$, ainsi d'ailleurs que par $j = I_0$, fonction indicatrice de $\{0\}$ définie par $j(0)=0$ et $j(r) = +\infty$ pour $r \neq 0$. Il est bien connu d'autre part que T est positif si et seulement si T est sous-invariant par $j(r) = |r|$. On peut en fait remplacer la valeur absolue par n'importe quelle *fonction sous-linéaire j*, c'est à dire de la forme

$$(3) \qquad j(r) = ar \text{ pour } r > 0\ , \quad j(r) = br \text{ pour } r < 0, \quad j(0) = 0$$

avec $-\infty \leq b < +\infty$, $-\infty < a \leq +\infty$, $b \leq a$, qui ne soit ni linéaire (correspondant à $a = b$), ni de domaine $D(j) = \{0\}$ (correspondant à $a = -b = +\infty$). On notera J_{s1} l'ensemble des fonctions sous-linéaires de la forme (3).

On a alors facilement la caractérisation suivante:

Proposition 1. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *T est positif,*

(ii) *T est sous-invariant par tout $j \in J_{s1}$,*

(iii) *Il existe $j \in J_{s1}$, qui n'est ni linéaire ni de domaine réduit à $\{0\}$, tel que T soit sous-invariant par j.*

Si $j \in J_0 \setminus J_{s1}$, alors la positivité de T n'est plus suffisante pour que T soit sous-invariant par j; elle n'est pas non plus nécessaire en général. Considérons en effet $R > 0$ et notons I_R la fonction indicatrice du segment $[-R, +R]$ définie par

$$I_R(r) = 0 \text{ si } |r| \leq R \ , \quad I_R(r) = +\infty \text{ si } |r| > R.$$

Il est clair que T est sous-invariant par I_R si et seulement si T est contractant dans $\mathscr{F}_b(\Omega)$. Plus généralement considérons les fonctions j de la forme

$$(4) \qquad j(r) = wr \text{ si } R_- \leq r \leq R_+, \ j(r) = +\infty \text{ si } r < R_- \text{ ou } r > R_+$$

avec $w \in \mathbb{R}$, $-\infty < R_- < 0 < R_+ < +\infty$. On voit facilement qu'il existe T sous-invariant par j qui n'est pas positif. On note J_{i1} la réunion de l'ensemble des fonctions de la forme (4), de l'ensemble des fonctions linéaires (correspondant à la forme (4) avec $R_+ = -R_- = +\infty$) et de I_0 (correspondant à la forme (4) avec $R_+ = R_- = 0$).

On a la caractérisation suivante:

Théorème 1. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\;$ *T est sous-markovien,*

(ii) $\;$ *T est sous-invariant par tout $j \in J_0$,*

(iii) $\;$ *Il existe $j \in J_0 \setminus (J_{s1} \cup J_{i1})$ tel que T soit sous-invariant par j.*

La propriété (ii) du Théorème 1 est directement reliée à l'«inégalité de Jensen» pour une mesure de probabilités sur Ω. En effet étant donné $x \in \Omega$, notons m_x la forme linéaire sur $\mathscr{K}(\Omega)$ définie par

$$(5) \qquad m_x(u) = (Tu)(x) \qquad \text{pour } u \in \mathscr{K}(\Omega).$$

Il est clair que T est positif (resp. sous-markovien) si et seulement si pour tout $x \in \Omega$, m_x est une mesure de Radon positive (resp. et de masse totale ≤ 1). D'un autre coté T est sous-invariant par j si et seulement si pour tout $x \in \Omega$, la forme linéaire $m = m_x$ vérifie

$$(6) \qquad j(<m, u>) \leq <m, j \circ u> \text{pour } u \in \mathscr{K}(\Omega) \text{ avec } u(\Omega) \subset D(j)$$

Les Proposition 1 et Théorème 1 sont donc en fait des corollaires du résultat suivant:

Théorème 2. *Soit m une forme linéaire sur* $\mathscr{K}(\Omega)$.

a) *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) m est une mesure de Radon positive (resp. et de masse totale ≤ 1*)*

(ii) il existe $j \in J_0 \setminus J_{i1}$ *(resp.* $J_0 \setminus (J_{s1} \cup J_{i1})$*) tel que (6) soit vérifiée.*

b) *Lorsque (i)-(ii) sont vérifiées, alors pour tout* $u \in L^1(\Omega, m)$ *et* $j \in J_{s1}$ *(resp.* J_0*), on a*

$$j\left(\int u(x)\,dm(x)\right) \leq \int j(u(x))\,dm(x) \tag{7}$$

Notons que l'intégrale dans le deuxième membre de (7) a bien un sens puisque j est minoré par une fonction affine (voir Remarque 1 ci-dessous). Ces résultats sont relativement classiques, tout particulièrement la partie b) du Théorème 2 qui est essentiellement l'inégalité de Jensen. Nous en donnons néanmoins ci-dessous une démontration complète pour le lecteur. Mais auparavant énonçons le résultat suivant du même type:

Théorème 3. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *T est un homorphisme d'algèbre, c'est à dire*

$$T(uv) = (Tu)(Tv) \quad \text{pour } u, v \in \mathscr{K}(\Omega), \tag{8}$$

(ii) *T est invariant par tout* $j \in J_0$, *c'est à dire*

$$j \circ Tu = T(j \circ u) \text{ pour } u \in \mathscr{K}(\Omega) \text{ avec } u(\Omega) \subset D(j), \tag{9}$$

(iii) *T est invariant par toute fonction* $j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue avec* $j(0) = 0$.

(iv) *Il existe* $j \in J_0 \setminus J_{s1}$ *avec* $D(j) = \mathbb{R}$ *telle que T soit invariant par j.*

(v) *Il existe* $U \subset \Omega$ *et* $\varphi: U \to \Omega$ *tels que pour* $u \in \mathscr{K}(\Omega)$, *la fonction Tu soit donnée par*

$$Tu(x) = u(\varphi(x)) \text{ si } x \in U, \ Tu(x) = 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus U \tag{10}$$

Remarque 1. Avant de donner les démonstrations, rappelons qu'étant donné $j \in J_0$ et $r \in \operatorname{Int}(D(j))$, les dérivées à droite $j'(r+)$ et à gauche $j'(r-)$

existent et vérifient $j'(r-) \leq j'(r+)$; il est classique (et élémentaire) que l'intervalle $[j'(r-), j'(r+)]$ est exactement l'ensemble des réels w vérifiant

$$j(s) \geq j(r) + w(s-r) \quad \text{pour tout } s \in \mathfrak{R} \tag{11}$$

D'une manière plus générale pour $r \in D(j)$, on note $\partial j(r)$ l'ensemble des réels w vérifiant (11); la multi-application ∂j est le *sous--différentiel* de j. En particulier on a $w \in \partial j(0)$ si et seulement si $j(r) \geq wr$. Maintenant si $j \in J_0$ et $w \in \mathfrak{R}$, les relations (3), (6), (7), (9) sont vraies pour j si et seulement si elles le sont pour la fonction $r \to j(r) - wr$. Par conséquent, dans les démonstrations des résultats, on pourra toujours se resteindre à des fonctions j vérifiant soit $j \geq 0$ soit $\partial j(0) = \emptyset$.

Preuve du Théorème 2.b). Considérons d'abord une fonction $j \in J_{s1}$ donnée par (3). Si $b > -\infty$, remplaçant j par $j(r)-br$ (voir la Remarque 1 ci-dessus), on peut toujours supposer $b=0$. Alors, supposant que m est une mesure de Radon positive, on a pour $u \in L^1(\Omega, m)$

$$\left(\int u(x)\, dm(x)\right)^+ \leq \int u(x)^+\, dm(x)$$

et donc (7). Le cas $a < +\infty$ se traite de manière identique; le cas $a = -b = +\infty$ est trivial.

Supposons maintenant $m(\Omega) \leq 1$ et soit $u \in L^1(\Omega, m)$. On peut toujours supposer

$$u(x) \in D(j) \qquad m\text{-p.p.}\, x \in \Omega \tag{12}$$

sinon le deuxième membre de (7) vaut $+\infty$ et le résultat est trivial. Posons

$$c = (1/m(\Omega)) \int u(x)\, dm(x).$$

Puisque

$$j\left(\int u(x)\, dm(x)\right) = j(m(\Omega)\, c) \leq m(\Omega)\, j(c)$$

il suffit pour vérifier (7) de montrer que

$$j(c) \leq (1/m(\Omega)) \int j(u(x))\, dm(x) \tag{13}$$

D'après (12), on a $c \in D(j)$; dans le cas où $c = \max D(j)$ ou $c = \min D(j)$, on a $u(x) = c$ m-p.p. $x \in \Omega$ et (13) est trivial. On peut donc supposer $c \in \mathrm{Int}\,(D(j))$; donnons-nous $w \in \partial j(c)$. D'après (11), on a

$$j(u(x)) \geq j(c) + w(u(x)-c) \text{ pour } x \in \Omega$$

d'où (13) en intégrant les deux membres. •

Preuve du Théorème 2.a). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte du b) démontré ci-dessus. Considérons donc $j \in J_0$ tel que (6) soit vérifié et donc en particulier

$$<m, u> \in D(j) \text{ pour } u \in \mathscr{K}(\Omega) \text{ avec } u(\Omega) \subset D(j).$$

Supposons d'abord que $j \notin J_{i1}$ et montrons que m est positive. Posons $R_+ = \sup\ D(j)$, $R_- = \inf\ D(j)$. Si $R_- = 0$, alors $[0, R_+[\subset D(j) \subset [0, R_+]$ et $R_+ > 0$ (puisque $D(j)$ n'est pas réduit à $\{0\}$); on a alors $<m, u> \geq 0$ pour $u \in \mathscr{K}(\Omega)$ avec $0 \leq u < R_+$ et donc par linéarité pour tout $u \in \mathscr{K}(\Omega)$ avec $u \geq 0$. Le cas $R_+ = 0$ se traite de manière identique. Supposons donc maintenant $R_- < 0 < R_+$; compte tenu de la Remarque 1 ci-dessus, on peut également supposer $j \geq 0$.

Posons $a_+ = \sup\{r \geqq 0;\ j = 0 \text{ sur } [0, r]\}$, $a_- = \inf\{r \leq 0;\ j = 0 \text{ sur } [r, 0]\}$. Si $a_- = +\infty$, alors $a_+ < +\infty$ (puisque j n'est pas linéaire) et $j(<m, u>) \leq 0$ pour $u \in \mathscr{K}(\Omega)$ avec $u \leq a_+$; donc $<m, u> \leq a_+$ pour $u \in \mathscr{K}(\Omega)$ avec $u \leq a_+$; ceci implique que m est positive (et même que $m(\Omega) \leq 1$ dans le cas où $a_+ > 0$). On aura le même résultat si $a_+ = +\infty$. Supposons donc $-\infty < a_- \leq 0 \leq a_+ < +\infty$. Puisque $j \notin J_{i1}$, on a $R_- < a_-$ ou $a_+ < R_+$; supposons par exemple que $a := a_+ < R_+$ et fixons $b \in]a, R_+[$; la fonction j est strictement croissante sur $[a, b]$. Etant donné $v \in \mathscr{K}(\Omega)$ avec $v \geq 0$, montrons que $<m, v> \geq 0$; par linéarité, on peut toujours supposer $v \leq j(b)$. Définissons u_0: $K := \text{supp } v \to [a, b]$ par $j(u_0(x)) = v(x)$; c'est une fonction continue sur le compact K avec $u_0(x) = a$ pour $x \in \partial K$; la fonction u_0 possède un prolongement $u \in \mathscr{K}(\Omega)$ vérifiant $0 \leq u \leq a$ sur $\Omega \backslash K$. Un tel prolongement u vérifie $j \circ u = v$ et donc d'après l'hypothèse, on a

$$<m, v> = <m, j \circ u> \geq j(<m, u>) \geq 0.$$

Faisant un raisonnement identique lorsque $R_- < a_-$, on a ainsi achevé de démontrer la positivé de m.

Supposons maintenant que $j \notin J_{i1} \cup J_{s1}$. Nous savons déjà que m est une mesure de Radon positive; montrons que $m(\Omega) \leq 1$. Il suffit pour cela, átant donné K un compact quelconque de Ω, de montrer que $m(K) \leq 1$. Appliquant le Lemme 1.a) ci-dessous avec $c = m(K)$, il suffit, étant donné $r \in D(j)$, de montrer que $j(m(K)r) \leq m(K)j(r)$. Or ceci résulte immédiatement de l'hypothèse: en effet, il existe une suite (u_n) dans $\mathscr{K}(\Omega)$ avec $0 \leq u_n \leq u_0 \leq 1$ telle que $u_n(x) \to \chi_K(x)$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $x \in \Omega$; posant $f_n(x) = j(ru_n(x))$, on a

$|f_n| \leq M\chi_{K_0}$ avec $K_0 = \text{supp } u_0$, $M = \sup\{|j(tr)|;\ 0 \leq t \leq 1\}$ pour tout n

$f_n(x) \to j(r)\chi_K(x)$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $x \in \Omega$;

utilisant le théorème de convergence dominé, la propriété s.c.i. de j et l'hypothèse (6), on obtient donc

$$j(r\,m(K)) = j(\lim < m, ru_n >) \leq$$
$$\liminf j(< m, ru_n >) \leq \lim < m, f_n > = j(r)\,m(K). \bullet$$

Lemme 1. *Soient $j \in J_0 \setminus J_{s1}$ et $c \geq 0$.*

a) Si $j(cr) \leq c\, j(r)$ pour tout $r \in D(j)$, alors $c \leq 1$.

b) Si $D(j) = \mathbb{R}$ et $j(cr) = c\, j(r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, alors $c = 0$ ou $c = 1$.

Preuve. Supposons $j(cr) \leq c\,j(r)$ pour tout $r \in D(j)$ et que $c > 1$. Puisque $D(j)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et $cD(j) \subset D(j)$ avec $c > 1$, $D(j)$ est soit $\mathbb{R}$, soit $[0, \infty[$, soit $]-\infty, 0]$. Etant donné $0 \neq r \in D(j)$ et $w \in \partial j(r)$, on a (cf (10))

$$(c\text{-}1)\ j(r) \geq j(cr) - j(r) \geq w\,(c\text{-}1)\,r$$

et donc $j(r) \geq wr$; mais $j(r) \leq wr$ (cf. (10)), et donc $w = j(r)/r$. En d'autres termes, j est dérivable sur $D(j) \setminus \{0\}$ et $j'(r) = j(r)/r$; ceci implique $j \in J_{s1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse et démontre la partie a) du lemme.

Supposons maintenant $j(cr) = c\ j(r)$ pour tout $r \in D(j) = \mathbb{R}$. D'après a), on a $c \leq 1$. Si $c \neq 0$, on a $j(r/c) = j(r)/c$ pour tout $r \in D(j)$, et donc appliquant a) à nouveau, on a $(1/c) \leq 1$, d'où $c = 1$. Ceci démontre bien la partie b). •

Preuve du Théorème 3. Les implications (v) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iv) et (v) $\Rightarrow$ (i) sont immédiates; l'implication (i) $\Rightarrow$ (iv) se voit en utilisant $j(r) = r^2$; il reste donc à démontrer (iv) $\Rightarrow$ (v) ce que nous faisons. Etant donné $x \in \Omega$, la forme linéaire m_x définie par (5) vérifie par hypothèse

$$j(< m_x, u >) = < m_x, j \circ u > \qquad \text{pour } u \in \mathscr{K}(\Omega).$$

On a $j \notin J_{s1} \cup J_{i1}$, et donc d'après le Théorème 2, m_x est une mesure de Radon positive de masse ≤ 1. Etant donné K un compact de Ω, on montre comme dans la preuve du Théorème 2,b) ci-dessus, que

$$j(r\,m_x(K)) = j(r)\,m_x(K) \qquad \text{pour tout } r \in \mathbb{R},$$

et donc, d'après le Lemme 1.b), $m_x(K) = 0$ ou $m_x(K) = 1$. On en déduit que la mesure m_x est soit nulle soit une masse de Dirac. Notant $U = \{x \in \Omega\,;\, m_x \neq 0\}$, et pour $x \in U$, $\varphi(x)$ le pôle de la masse de Dirac m_x, l'opérateur T est bien donné par (10). •

2. INÉGALITÉS DE KATO

Dans cette section, Ω est un espace localement compact et $\mathscr{C}_0(\Omega)$ désigne l'espace de Banach réticulé des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$ tendant vers zéro à l'infini, muni de la norme de la convergence uniforme sur Ω: avec les notations de la Section 1, $\mathscr{C}_0(\Omega)$ est l'adherence de $\mathscr{K}(\Omega)$ dans $\mathscr{F}_b(\Omega)$.

Etant donné $T: \mathscr{C}_0(\Omega) \to \mathscr{C}_0(\Omega)$ linéaire, d'après les résultats de la Section 1, les conditions suivantes sont équivalentes:

(14.i) T est continue et la restriction de T à $\mathscr{K}(\Omega)$ est sous-markovienne,

(14.ii) T est positive et contractante,

(14.iii) $j \circ Tu \leq T(j \circ u)$ pour tout $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ et tout $j \in J_0$ avec $u(\Omega) \subset D(j)$.

Nous dirons alors que T est sous-markovienne. Pour simplifier, on appelle *semi-groupe sous-markovien sur* $\mathscr{C}_0(\Omega)$, tout semi-groupe fortement continu d'applications linéaires sous-markoviennes de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ dans lui-même.

On a facilement le résultat suivant:

Théorème 4. *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe sous-markovien $(T(t))$ sur $\mathscr{C}_0(\Omega)$. On note A' le transposé de A dans l'espace $\mathscr{C}_0(\Omega)'$ des mesures de Radon bornées sur Ω. Etant donné $j \in J_0$ on a*

$$\int w(x)\,(Au)(x)\,d\mu(x) \leq \langle A'\mu,\ j \circ u\rangle \tag{15}$$

pour tout $0 \leq \mu \in D(A')$, $u \in D(A)$ avec $u(\Omega) \subset D(j)$ et $w \in L^1(\Omega, \mu)$ avec $w(x) \in \partial j(u(x))$ μ-p.p.$x \in \Omega$.

Preuve du Théorème 4. D'après le choix de w, on a

$$j \circ T(t)u \geq j \circ u + w(T(t)u - u) \ \ \mu\text{-p.p.}x \in \Omega, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Comme $T(t)$ est sous-markovienne, utilisant (14.iii), on en déduit pour tout $t > 0$

$$t^{-1}\langle \mu,\ T(t)(j \circ u) - j \circ u\rangle \geq$$
$$t^{-1}\langle \mu,\ j \circ T(t)u - j \circ u\rangle \geq \int w(T(t)u\text{-}u/t\ d\mu.$$

Le passage à la limite lorsque $t \to 0$ donne (15). •

Considérons l'exemple suivant: $\Omega=\mathbb{R}^N$ et $Au=\Delta u$ avec $D(A)=\{u\in\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^N);\ \Delta u\in\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^N)\}$ qui est le générateur infinitésimal du semi-groupe de Gauss sur $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^N)$; le transposé A' est défini par $A'v=\Delta v$ avec $D(A')=\{v\in L^1(\mathbb{R}^N);\ \Delta v$ est une mesure de Radon bornée sur $\mathbb{R}^N\}$ (cf. par exemple [7]); par troncature et régularisation par convolution, on voit facilement qu'étant donné $v\in D(A')^+$, il existe une suite (ζ_n) dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)^+$ telle que $\zeta_n\to v$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\Delta\zeta_n\to\Delta v$ faiblement dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^N)'$. Le Théorème 4 énonce donc exactement le résultat suivant: étant donné $j\in J_0$, $u\in\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^N)$ avec $\Delta u\in\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^N)$ et $u(\Omega)\subset D(j)$, et $w\in L^1(\mathbb{R}^N)$ avec $w\in\partial j(u)$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$, on a

$$\Delta\,(j\circ u)\geq w\,\Delta u \text{ dans } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Ce résultat peut se localiser: si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $j\in J_0$, $u\in\mathscr{C}(\Omega)$ avec $\Delta u\in\mathscr{C}(\Omega)$ et $u(\Omega)\subset D(j)$, on a

(16) $\Delta(j\circ u)\geq w\,\Delta u$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ pour $w\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ avec $w\in\partial j(u)$ p.p.

En effet, remplaçant u par $u-\underline{r}$ et $j(r)$ par $j(\underline{r}+r)-j(\underline{r})-\underline{s}r$ avec $\underline{s}\in\partial j(\underline{r})$, on voit que l'on peut toujours supposer $j\geq 0$; soient alors ω un ouvert relativement compact de Ω et $\zeta\in\mathscr{D}(\Omega)$ avec $0\leq\zeta\leq 1$ et $\zeta=1$ sur ω; on a $\underline{u}=\zeta u\in D(A)$, $A\underline{u}=\Delta u$ sur ω et $\Delta(j\circ\underline{u})=\Delta\,(j\circ u)$ dans $\mathscr{D}'(\omega)$; enfin, compte-tenu de $j\geq 0$, on peut trouver $\underline{w}\in L^1(\mathbb{R}^N)$ avec $\underline{w}\in\partial j(\underline{u})$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$ et $\underline{w}=w$ sur ω; appliquant alors le Théorème 4, $\Delta(j\circ u)\geq w\Delta u$ dans $\mathscr{D}'(\omega)$; ceci étant vrai pour tout ouvert ω relativement conpact dans Ω, on a bien le résultat.

Dans le cas $j(r)=|r|$, en prenant $w=\operatorname{sign} u$, (16) correspond exactement à l'inégalité de Kato qui, comme cela avait été prouvé initialement dans [10], s'étend aux fonctions $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ avec $\Delta u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Comme nous allons le montrer ci-dessous, on peut effectuer cette extension avec une fonction $j\in J_0$ quelconque.

On peut aussi étendre le Théorème 4 dans une autre direction. En effet, sous les hypothèses de ce théorème, donnons-nous $j\in J_0$, $0\leq\mu\in D(A')$, $u\in\mathscr{C}_0(\Omega)$ avec $u(\Omega)\subset D(j)$, $w\in L^1(\Omega,\mu)$ avec $w(x)\in\partial j(u(x))$ μ-p.p. et $f:\Omega\to\mathbb{R}$ borélienne avec $wf\in L^1(\Omega,\mu)$; supposons $w(x)\geq 0$ μ-p.p. $x\in\Omega$. Alors, appliquant le Théorème 4, si $u\in D(A)$ et $(Au)(x)\geq f(x)$ μ-p.p. $x\in\Omega$, on a

$$\int w(x)f(x)\,d\mu(x)\leq\langle A'\mu\,,\,j\circ u\rangle \tag{17}$$

Sous certaines hypothèses, on peut montrer la validité de cette inégalité (17) pour u, f vérifiant la propriété «$Au\geq f$» en un sens plus faible (cf. [3]). Nous ne développerons pas plus cette extension dans le cadre abstrait, nous contentant ici de la préciser dans le cas concret de l'opérateur de Laplace en utilisant une méthode directe pour sa démonstration.

On a le résultat suivant:

Proposition 5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $j \in J_0$, u, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $w: \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable avec $w \in \partial j(u)$ p.p. sur Ω et $wf \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On suppose que l'une des deux hypoyhèses (i) ou (ii) suivantes est satisfaite:*

(i) $\Delta u = f$ *dans* $\mathscr{D}'(\Omega)$.

(ii) $\Delta u \geq f$ *dans* $\mathscr{D}'(\Omega)$ *et* $w \geq 0$ *p.p. sur* Ω.

Alors $j \circ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *et* $\Delta(j \circ u) \geq wf$ *dans* $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Preuve de la Proposition 5. Montrons d'abord que le cas de l'hypothèse (i) est impliqué par le résultat dans le cas de l'hypothèse (ii). Fixons $\underline{r} \in D(\partial j)$, $\underline{s} \in \partial j(\underline{r})$ et posons

$$j_1(r) = j(\underline{r} + r^+) - j(\underline{r}) - \underline{s} r^+, \quad w_1 = (w - \underline{s})^+, \quad u_1 = u - \underline{r},$$

$$j_2(r) = j(\underline{r} - r^+) - j(\underline{r}) + \underline{s} r^+, \quad w_2 = (w - \underline{s})^-, \quad u_2 = \underline{r} - u,$$

Pour $i = 1, 2$, on a $0 \leq w_i \in \partial j_i(u_i)$ p.p. et $w_i f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; supposant $\Delta u = f$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ et utilisant le résultat dans le cas de l'hypothèse (ii) on en déduit $j_i \circ u_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $\Delta(j_i \circ u_i) \geq w_i \Delta u_i = (-1)^i w_i f$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. Notons maintenant que

$$j \circ u = j_1 \circ u_1 + j_2 \circ u_2 + 2j(\underline{r}) + \underline{s}(u - r).$$

On en déduit $j \circ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et

$$\Delta(j \circ u) \geq (w_1 - w_2) f + \underline{s} \Delta u = wf \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega). \text{ CQFD}$$

Démontrons maintenant le résultat dans le cas de l'hypothèse (ii). Notons d'abord que le résultat est immédiat si $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ et $j \in \mathscr{C}^2(r)$: en effet, on a alors $j \circ u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, $w = j' \circ u$ p.p. et

$$\Delta(j \circ u) = (j' \circ u)\, \Delta u + (j'' \circ u) |\mathrm{grad}\, u|^2 \geq w\, \Delta u \geq wf \text{ p.p.}$$

Montrons que le résultat est vrai avec $w(x) = j'(u(x)+)$, si l'on suppose

(18) $\qquad D(j) = \mathbb{R}$, j croissante et lipschitzienne.

Il existe des suites (u_n), (f_n) dans $\mathscr{C}^2(\Omega)$ avec $\Delta u_n \geq f_n$ sur Ω pour tout n, convergeant respectivement vers u, f dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (utiliser par exemple une régularisation par convolution). D'un autre coté, il existe une suite (j_m) de fonctions convexes croissantes de classe $\mathscr{C}^2$ uniformément lipschitziennes avec $j_m(0)=0$ pour tout m, telle que $j'_m(r) \to j'(r+)$ pour tout $r \in \mathfrak{R}$ (utiliser par exemple $j_m(r) = j*\rho(r) - j*\rho(0)$ où $\rho \in \mathscr{D}(r)$, $\rho \geq 0, \int \rho = 1$, supp $\rho \subset [0,1/m]$). On a

$$\Delta(j_m \circ u_n) \geq j'_m(u_n)\, f_n \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega)$$

pour tout n, m; le résultat s'obtient en passant à la limite d'abord en n, puis en m.

Supposons toujours (18) (et donc $j \circ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$). On voit avec la même démonstration que le résulat est aussi vrai avec $w(x) = j'(u(x)-)$ et donc

$$\Delta(j \circ u) \geq \sup\,(j'(u+)f,\, j(u-)f) \quad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Considérons maintenant $w: \Omega \to \mathfrak{R}$ mesurable quelconque vérifiant $w \in \partial j(u)$ p.p. sur Ω (et donc $w \in L^\infty(\Omega)$, $wf \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$). On a

$$\sup\,(j'(u+)f,\, j(u-)f) \geq wf \text{ p.p. sur } \Omega$$

de telle sorte que $\Delta(j \circ u) \geq wf$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Démontrons enfin le cas général. Pour tout entier m, définissons la fonction j_m par

$$j_m(r) = \int_0^r \inf\,(m, j'(s)^+)\, ds \text{ si } r \in D(j),$$

$$j_m(r) = j_m(a) \text{ si } -\infty < r < a = \inf D(j),$$

$$j_m(r) = j_m(b) + m(r-b) \text{ si } b = \sup\ D(j) < r < +\infty.$$

Il est clair que j_m satisfait (18) et $w_m = \inf(m, w) \in \partial j(u)$ p.p. Appliquant le résultat précédent on a donc

$$\Delta(j_m \circ u) \geq w_m f \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega) \quad \text{pour tout } m. \tag{19}$$

Maintenant $w_m f \to wf$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ par convergence dominée; d'un autre coté $v_m = j_m \circ u \to j \circ u$ p.p. sur Ω, v_m est minoré par une fonction localement intégrable fixe, et $-\Delta v_m$ est majoré par une fonction localement intégrable fixe: il en résulte que $j \circ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $v_m \to j \circ u$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Passant à la limite dans (19), on achève la preuve de la proposition. •

3. CARACTÉRISATION PAR L'INÉGALITÉ DE KATO

Cette section est consacrée au problème réciproque du Théorème 4: étant donné A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu

$(T(t))$ sur $\mathscr{C}_0(\Omega)$, les inégalités (15) pour un ou tout $j\in J_0$ impliquent-elles que les opérateurs $T(t)$ sont sous-markoviens ? Contrairement à la situation considérée au Théorème 1, ceci est faux en général comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1. Considérons $\Omega=[-1,0]$. Pour $0\leq t<1$ et $u\in\mathscr{C}([-1,0])$, définissons la fonction $T(t)u$ sur $[-1,0]$ par

$$T(t)u(x)=u(x+t) \text{ si } x+t\leq 0,\quad T(t)u(x)=u(x+t-1)+u(0)-u(-1) \text{ si } x+t>0. \tag{20}$$

On a $T(t)u\in\mathscr{C}([-1,0])$, $\|T(t)u\|\leq 3\,\|u\|$ et $T(t)u\to u$ dans $\mathscr{C}([-1,0])$ lorsque $t\to 0$; aussi $T(t+s)=T(t)\,T(s)$ pour $t,s\geq 0$ avec $t+s<1$. On peut donc prolonger $(T(t))_{0\leq t<1}$ en un unique semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathscr{C}([-1,0])$. Il est clair que les opérateurs $T(t)$ ne sont pas sous-markoviens: ils ne sont d'ailleurs ni positifs ni contractants. On va montrer que pourtant le générateur infinitésimal A vérifie (15) pour tout $j\in J_0$.

Plus précisément, on a le résultat suivant:

Proposition 6. *Le générateur infinitésimal A du semi-groupe fortement continu sur $\mathscr{C}([-1,0])$ défini à partir de (20) vérifie pour tout $j\in J_0$*

$$\int w(x)\,(Au)(x)\,d\mu(x)=\langle A'\mu\,,\,j\circ u\rangle \tag{21}$$

pour $0\leq\mu\in D(A')$, $u\in D(A)$ avec $u([-1,0])\subset D(j)$ et $w\in L^1([-1,0],\mu)$ avec $w(x)\in\partial j(u(x))$ μ-p.p. $x\in[-1,0]$.

Avant de démontrer cette proposition, notons le lemme technique suivant pour un espace localement compact Ω quelconque dont la preuve sera donnée à la fin de cette section:

Lemme 2. *Soient μ, ν des mesures boréliennes bornees sur Ω avec $\mu\geq 0$, et u, v des fonctions boréliennes bornées sur Ω. Supposons que*

$$\int w(x)\,v(x)\,d\mu(x)\leq\int j(u(x)\,d\nu(x) \tag{22}$$

pour tout $j\in J_0$ avec $D(j)=\mathfrak{R}$ et w fonction borélienne bornée avec $w(x)\in\partial j(u(x))$ pour tout $x\in\Omega$. Alors l'inégalité (22) est satisfaite pour tout $j\in J_0$ avec $j\circ u\in L^1(\Omega,|\nu|)$ et $w\in L^1(\Omega,\mu)$ avec $w(x)\in\partial j(u(x))$ μ-p.p. $x\in\Omega$.

Notons que l'assertion reste vraie si l'on remplace dans (22) l'inégalité par l'égalité : il suffit de l'appliquer en remplaçant ν et v, respectivement par $-\nu$ et $-v$.

Preuve la Proposition 6. On vérifie immédiatement que l'opérateur A est défini par $Au=u'$ avec $D(A)=\{u\in\mathscr{C}^1([-1,0]);\ u'(-1)=u'(0)\}$. On en déduit alors que

$$D(A')=\{\mu=hdx+\lambda(\delta_0-\delta_{-1});\ \lambda\in\mathbb{R},\ h:[-1,0]\to\mathbb{R} \text{ à variation bornée}\}.$$

Etant donné $0\leq\mu\in D(A')$, on a $\mu=hdx$ avec $h:[-1,0]\to\mathbb{R}^+$ à variation bornée (et donc mesurable bornée).

Compte-tenu du Lemme 2, supposons $D(j)=\mathbb{R}$ et considérons w: $[-1,0]\to\mathbb{R}$ borélienne bornée avec $w(x)\in\partial j(u(x))$ pour tout $x\in[-1,0]$. Etant donné $u\in D(A)$, puisque la fonction convexe j est localement lipschitzienne, la fonction $j\circ u$ est lipschitzienne sur $[-1,0]$ et donc p.p. dérivable sur $(-1,0)$. Comme il est classique, on a

$$(j\circ u)'(x)=w(x)u'(x) \quad \text{p.p. } x\in(-1,0). \tag{23}$$

En effet, par définition du sous-différentiel, pour $x\in]-1,0[$, on a

$(j\circ u)(x+\delta)-(j\circ u)(x)\geq w(x)(u(x+\delta)-u(x))$ pour tout δ petit; si $j\circ u$ est dérivable en x, divisant par $\delta>0$ et $\delta<0$ et faisant $\delta\to 0$, on obtient bien (23).

En d'autres termes, on a donc

$t^{-1}(T(t)(j\circ u)-(j\circ u))\to w\,u'$ p.p. sur $(-1,0)$ lorsque $t\to 0$; on a aussi

$|t^{-1}(T(t)(j\circ u)-(j\circ u))|\leq 2\,\|(j\circ u)'\|_{L^\infty}$ p.p. sur $(-1,0)$ pour $0<t<1$,

d'où par convergence dominée

$$\langle A'\mu,\ j\circ u\rangle=\lim\int t^{-1}(T(t)(j\circ u)-(j\circ u))\,h\,dx=$$
$$\int w\,u'\,h\,dx=\int w\,Au\,d\mu. \bullet$$

Revenons maintenant à l'étude de l'inégalité (15) dans le cas général. Nous poserons la définition suivante:

Définition 1. *Etant donné $A:D(A)\subset\mathscr{C}_0(\Omega)$ linéaire avec $D(A)$ dense dans $\mathscr{C}_0(\Omega)$, et $j\in J_0$, nous dirons que A vérifie l'inégalité de Kato pour j si on a*

$$\int w(x)\,(Au)(x)\,d\mu(x)\leq\langle A'\mu,\ j\circ u\rangle \tag{15}$$

pour tout $0\leq\mu\in D(A')$, $u\in D(A)$ avec $u(\Omega)\subset D(j)$ et $w\in L^1(\Omega,\mu)$ avec $w(x)\in\partial j(u(x))$ μ-p.p. $x\in\Omega$.

Nous ne nous restreignerons pas au générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu sur $\mathscr{C}_0(\Omega)$; nous considérerons plus généralement un opérateur linéaire $A: D(A) \subset \mathscr{C}_0(\Omega) \to \mathscr{C}_0(\Omega)$ vérifiant

(24) $D(A)$ dense dans $\mathscr{C}_0(\Omega)$ et il existe $\lambda_0 > 0$, $M < \infty$ tels que pour $0 < \lambda < \lambda_0$

$$J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{C}_0(\Omega)), \ \|J_\lambda\| \leq M.$$

Rappelons que le générateur infinitésimal A d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))$ sur $\mathscr{C}_0(\Omega)$ vérifie (24); on a alors pour $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$

$$J_\lambda u = \int_0^\infty T(\lambda t) u \, e^{-t} \, dt \tag{25}$$

et

(26) $T(t)u = \lim_{\lambda \to 0} u_\lambda(t)$ dans $\mathscr{C}_0(\Omega)$ uniformément pour $t \geq 0$ borné

où

(27) $u_\lambda(0) = u, \quad u_\lambda(t) = (J_\lambda)^n u \quad$ pour $t \in](n-1)\lambda, n\lambda]$, $n = 1, 2, \ldots$

Notons d'abord la caractérisation suivante:

Proposition 7. *Soient $A : D(A) \subset \mathscr{C}_0(\Omega) \to \mathscr{C}_0(\Omega)$ linéaire vérifiant (24), $j \in J_0$ avec $0 \in \operatorname{Int} D(j)$ et $0 \leq \mu \in D(A')$.*

a) Les assertions sont équivalentes:

(i) pour tout $u \in D(A)$ avec $u(\Omega) \subset \operatorname{Int} D(j)$, et $w \in L^1(\Omega, \mu)$ avec $w \in \partial j(u)$ μ-p.p., on a l'inégalité (15),

(ii) pour tout $u \in D(A)$ avec $u(\Omega) \subset \operatorname{Int} D(j)$, il existe $w \in L^1(\Omega, \mu)$ avec $w \in \partial j(u)$ μ-p.p., tel que l'on ait l'inégalité (15).

(iii) pour $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ et $0 < \lambda < \lambda_0$ avec $(J_\lambda u)(\Omega) \subset D(j)$, on a

$$<\mu, j \circ J_\lambda u> \leq \int j(u(x)) \, d\mu(x) + \lambda <A'\mu, j \circ J_\lambda u>. \tag{28}$$

b) Si de plus A est générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))$, alors les assertions (i), (ii), (iii) sont encore équivalentes à l'assertion suivante:

(iv) pour $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ et $t \geq 0$ avec $(T(s)u)(\Omega) \subset D(j)$ pour $0 \leq s \leq t$, on a

$$<\mu, j \circ T(t)u> \leq \int j(u(x)) \, d\mu(x) + \int_0^t <A'\mu, j \circ T(s)u> ds. \tag{29}$$

Remarque 2. Etant donné $j \in J_0$ avec $D(j) \neq \mathfrak{R}$ et $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ avec $u(\Omega) \subset D(j)$, il n'existe pas nécessairement $w \in L^1(\Omega, \mu)$ avec $w \in \partial j(u)$ μ-p.p.: c'est pour cette raison que nous avons dû nous resteindre dans l'assertion (ii) ci-dessus à des fonctions $u \in D(A)$ vérifiant $u(\Omega) \subset \mathrm{Int}\, D(j)$. Sous les hypothèses de la Proposition 7, il est clair que si A vérifie l'inégalité de Kato pour j, alors il vérifie les assertions équivalentes (i), (ii), (iii); la réciproque est évidemment vraie si $D(j) = \mathfrak{R}$, ou plus généralement si $D(j)$ est ouvert, mais elle est fausse en général. Il suffit en effet de considérer pour j la fonction indicatrice du segment $]-\infty, 1]$: les assertions équivalentes (i), (ii), (iii) sont toujours vérifiées alors que l'inégalité de Kato pour j s'écrit:

$$\text{pour } u \in D(A) \text{ avec } u \leq 1 \text{ et } 0 \leq \mu \in D(A'),\ Au \leq 0\ \mu\text{-p.p. sur } u^{-1}(1),$$

qui n'est évidemment pas toujours vérifiée (considérer par exemple le cas d'un opérateur de multiplication $Au(x) = a(x)u(x)$ avec $a \in \mathscr{C}_b(\Omega)$).

Preuve de la Proposition 7. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiate. Montrons l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii). Etant donné $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ et $0 < \lambda < \lambda_0$ supposons d'abord $(J_\lambda u)(\Omega) \subset \mathrm{Int}\ D(j)$; appliquant (ii), il existe $w \in L^1(\Omega, \mu)$ avec $w \in \partial j(J_\lambda u)$ μ-p.p., tel que l'on ait

$$\int w\, A J_\lambda u\, d\mu \leq \langle A'\mu, j \circ J_\lambda u \rangle.$$

Utilisant la définition du sous-différentiel, on a

$$\langle \mu, j \circ J_\lambda u \rangle \leq \int \{j(u) + w\,(J_\lambda u - u)\}\, d\mu = \int j(u)\, d\mu + \int w\, \lambda A J_\lambda u\, d\mu$$

d'où (28). Ceci est encore vrai en supposant seulement $(J_\lambda u)(\Omega) \subset D(j)$; en effet pour $0 < k < 1$, on a $(J_\lambda(ku))(\Omega) = k(J_\lambda u)(\Omega) \subset k\,D(j) \subset \mathrm{Int}\ D(j)$, puisque $0 \in \mathrm{Int}\ D(j)$; appliquant (28) à ku et passant à la limite lorsque $k \to 1$, on obtient bien (28) pour u.

Montrons l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i). Etant donné $u \in D(A)$ avec $u(\Omega) \subset \mathrm{Int}\ D(j)$, on a $(J_\lambda u)(\Omega) \subset D(j)$ pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit: en effet d'après (24), on a $J_\lambda u \to u$ dans $\mathscr{C}_0(\Omega)$ lorsque $\lambda \to 0$. Si $w \in L^1(\Omega, \mu)$ avec $w \in \partial j(u)$ μ-p.p., on a par définition de ∂j:

$$\int w(J_\lambda u - u)\, d\mu \leq \langle \mu, j \circ J_\lambda u - j \circ u \rangle.$$

Utilisant (iii), divisant par $\lambda > 0$ et faisant $\lambda \to 0$, on obtient bien (15) puisque $(J_\lambda u - u)/\lambda = J_\lambda Au \to Au$ lorsque $\lambda \to 0$.

Supposons maintenant que A engendre un semi-groupe fortement continu $(T(t))$. Montrons d'abord que (iii) $\Rightarrow$ (iv). Fixons $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$, $t \geq 0$, et raisonnant comme ci-dessus, supposons $(T(s)u)(\Omega) \subset \operatorname{Int} D(j)$ pour $0 \leq s \leq t$. Posant $\lambda = t/N$ et notant u_N la fonction définie par (27), puisque $u_N(s) \to T(s)u$ dans $\mathscr{C}_0(\Omega)$ uniformément pour $0 \leq s \leq t$, on aura $u_N(s)(\Omega) \subset D(j)$ pour tout $0 \leq s \leq t$ et N suffisamment grand. Supposant que (iii) est satisfaite et remplaçant u par $(J_\lambda)^n u$ dans (28), on obtient pour $n = 1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} &< \mu, j \circ u_N((n+1)\lambda) - j \circ u_N(n\lambda) > \leq \\ &\qquad \lambda < A'\mu, j \circ u_N(n\lambda) > = \int_{(n-1)\lambda}^{n} < A'\mu, j \circ u_N(s) > ds. \end{aligned}$$

Additionant, on a donc

$$< \mu, j \circ u_N(t) - j \circ u_N(\lambda) > \leq \int_0^{t-} < A'\mu, j \circ u_N(s) > ds.$$

Passant à la limite on obtient (29).

Montrons enfin que (iv) $\Rightarrow$ (i). Etant donné $u \in D(A)$ avec $u(\Omega) \subset \operatorname{Int} D(j)$, et $w \in L^1(\Omega, \mu)$ avec $w \in \partial j(u)$ μ-p.p., on a $(T(t)u)(\Omega) \subset D(j)$ pour tout $t > 0$ suffisamment petit, et donc en utilisant la définition de ∂j et (iv):

$$\begin{aligned} &\int t^{-1}(T(t)u - u)\, w\, d\mu \leq \\ &\qquad t^{-1} < \mu, j \circ T(t)u - j \circ u > \leq t^{-1} \int_0^t < A'\mu, j \circ T(s)u > ds. \end{aligned}$$

A la limite lorsque $t \to 0$, on obtient (15). •

Donnons maintenant quelques cas où nous savons prouver que si A vérifie l'inégalité de Kato pour j, alors il est générateur d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens $(T(t))$ sur $\mathscr{C}_0(\Omega)$. Notons d'abord le cas où

$$J_\lambda \geq 0 \text{ pour } 0 < \lambda < \lambda_0. \tag{30}$$

Cette condition est évidemment nécessaire pour qu'un opérateur A vérifiant (24) soit générateur d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens $(T(t))$ sur $\mathscr{C}_0(\Omega)$. Remarquons qu'en général les conditions (24) et (30) seules n'impliquent même pas que A soit générateur d'un semi-groupe fortement continu (cf. [2]). Mais on a la caractérisation suivante:

Théorème 8. *Soient $A : D(A) \subset \mathscr{C}_0(\Omega) \to \mathscr{C}_0(\Omega)$ linéaire et $j \in J_0 \setminus (J_{sl} \cup J_{il})$ avec $D(j) = \mathbb{R}$. Alors A est générateur d'un semi-groupe sous-markovien sur $\mathscr{C}_0(\Omega)$ si et seulement si A vérifie (24), (30) et l'inégalité de Kato pour j.*

Preuve du Théorème 8. La condition nécessaire a déjà été prouvée. Pour démontrer la condition suffisante, il suffit de montrer que J_λ est sous-invariant par j; en effet alors, d'après le Théorème 2, J_λ sera sous-markovien et donc A sera générateur d'un semi-groupe sous-markovien sur $\mathscr{C}_0(\Omega)$. En d'autres termes, étant donné $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$, $0 < \lambda < \lambda_0$ et $O \leq \nu \in \mathscr{C}_0(\Omega)'$, il suffit de prouver que l'inégalité suivante est vérifiée:

$$< \nu,\ j \circ\ J_\lambda u > \leq < \nu,\ J_\lambda (j \circ u) >$$

Puisque $J_\lambda \geq 0$, la mesure $\mu \geq J'_\lambda \nu$ vérifie $0 \leq \mu \in D(A')$ et on a $\mu - \nu = \lambda A' \mu$. Appliquant la Proposition 7.a), (27) donne

$$< \mu, j \circ J_\lambda u - j \circ u > \leq < \mu - \nu, j \circ J_\lambda u >$$

d'où

$$< \nu, j \circ J_\lambda u > \leq < \mu,\ j \circ u > = < J'_\lambda \nu\ ,\ j \circ u > = < \nu,\ J_\lambda (j \circ u) >, \bullet$$

Considérons maintenant le cas d'un opérateur borné $A \in \mathscr{L}(\mathscr{C}_0(\Omega))$. Notons qu'alors A vérifie (24) avec $\lambda_0 = \|A\|^{-1}$. On a le résultat suivant:

Théorème 9. *Soient* $A \in \mathscr{L}(\mathscr{C}_0(\Omega))$ et $j \in J_0 \setminus (J_{sl} \cup J_{il})$ *avec* $D(j) = \mathfrak{R}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) e^{tA} *est sous-markovien pour tout* $t \geq 0$,

(ii) A *vérifie l'inégalité de Kato pour* j,

(iii) *pour tout* $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ *et* $x \in \Omega$, *on a*

$$A(j \circ u)(x) > \geq Au(x) \max \partial j(u(x)).$$

Avant de prouver ce théorème, notons le corollaire suivant:

Corollaire 10. *Soient* $A : D(A) \subset \mathscr{C}_0(\Omega) \to \mathscr{C}_0(\Omega)$ *linéaire vérifiant (24) et* $j \in J_0 \setminus (J_{sl} \cup J_{il})$ *avec* $D(j) = \mathfrak{R}$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est générateur d'un semi-groupe sous-markovien,*

(ii) *pour tout* $0 < \lambda < \lambda_0$, *l'opérateur* $J_\lambda - I$ *vérifie l'inégalité de Kato pour* j,

(iii) pour tout $0<\lambda<\lambda_0$, $u\in\mathscr{C}_0(\Omega)$ et $x\in\Omega$, on a

$$J_\lambda(j\circ u)(x)>\geq j(u(x))+(J_\lambda u(x)-u(x))\max\partial j(u(x)). \tag{31}$$

Preuve du Corollaire 10. Il résulte immédiatement du Théorème 9, puisque A vérifiant (24) est générateur d'un semi-groupe sous-markovien si et seulement si $e^{t(J_\lambda-I)}$ est sous-markovien pour tout $0<\lambda<\lambda_0$ et $t\geq 0$. •

Preuve du Théorème 9. L'inégalité de Kato pour j s'écrit:

pour tout $u\in\mathscr{C}_0(\Omega)$, $O\leq\mu\in\mathscr{C}_0(\Omega)'$ et $w\in L^1\Omega,\mu)$ avec $w\in\partial j(u)$ μ-p.p., on a $<\mu, A(j\circ u)>\geq\int w\,Au\,d\mu$.

L'implication (ii)$\Longrightarrow$(iii) est alors clair. L'implication (i)$\Longrightarrow$(ii) résulte du Théorème 4; compte-tenu du Théorème 8, il suffit donc de prouver l'implication (iii)$\Longrightarrow$(30), ou de manière équivalente que (iii) implique la positivé du semi-groupe $(e^{tA})_{t\geq 0}$; or il est bien connu (cf. par exemple [13]) que cette positivé est équivalente à la propriété

$$0\leq u\in\mathscr{C}_0(\Omega),\ x\in\Omega,\ u(x)=0 \quad\Longrightarrow\quad Au(x)\geq 0. \tag{32}$$

Pour prouver (iii)$\Longrightarrow$(32), quitte à remplacer $j(r)$ par $j(r)$-cr avec $c\in\partial j(0)$, on peut toujours supposer $j\geq 0$; d'autre part puisque $j\notin J_{s1}$, quitte à remplacer $j(r)$ par $j(-r)$, on a $a=\sup j^{-1}(0)<+\infty$; la fonction j est une bijection croissante de $[a,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Donnons-nous $0\leq u\in\mathscr{C}_0(\Omega)$ et $x\in\Omega$ avec $u(x)=0$ et montrons $Au(x)\geq 0$. Pour tout $\varepsilon>0$ il existe $v_\varepsilon\in\mathscr{K}(\Omega)$ tel que

$$j\circ v_\varepsilon=u \quad \text{sur } \{u\geq\varepsilon\},\ v_\varepsilon=0 \text{ sur } \{u\leq\varepsilon/2\},\ v_\varepsilon\geq 0,$$
$$j\circ v_\varepsilon\leq\varepsilon \text{ sur } \{\varepsilon/2\leq u\leq\varepsilon\}.$$

On a clairement $u_\varepsilon=j\circ v_\varepsilon\to u$ dans $\mathscr{C}_0(\Omega)$ lorsque $\varepsilon\to 0$. Appliquant (iii) avec v_ε (à la place de u), puisque $v_\varepsilon(x)=0$ et $0\in\partial j(0)$, on obtient $Au_\varepsilon(x)\geq 0$ et donc à la limite $Au(x)\geq 0$. •

Nous considérons maintenant un dernier cas où nous savons prouver l'équivalence entre l'inégalité de Kato pour j et la propriété sous-markovienne. Notons d'abord le lemme suivant:

Lemme 3. *Soient $0\leq\mu\in\mathscr{C}_0(\Omega)'$, $\delta>0$ et $j\in J_0$ avec $0\in\operatorname{Int}D(j)$ et $j'(0-)=0<j'(0+)$. Soit T une application linéaire de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ dans lui-même vérifiant*

(33) $\int j \circ Tu \, d\mu \leq \langle \mu, j \circ u \rangle$ *pour* $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ *avec* $u(\Omega) \subset \operatorname{Int} D(j)$.
Alors $Tu \geq 0$ *μ-p.p. sur* Ω *pour tout* $0 \leq u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$.

Preuve du Lemme 3. Notons que l'intégrale dans (33) est bien définie puisque d'après les hypothèses, on a $j \geq 0$; en fait l'hypothèse (33) inclus que $j \circ Tu \in L^1(\Omega, \mu)$ pour $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ avec $u(\Omega) \subset \operatorname{Int} D(j)$. Etant donné $0 \leq u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$, on a $(-\lambda u)(\Omega) \subset \operatorname{Int} D(j)$ pour $\lambda > 0$ suffisamment petit; puisque $j'(0-) = 0$, on a par convergence dominée

$$j'(0+) \langle \mu, (Tu)^- \rangle = \lim_{\lambda \to 0_+} \int \lambda^{-1} j(-\lambda Tu) \, d\mu \leq \lim_{\lambda \to 0_+} \int \lambda^{-1} j(-\lambda u) \, d\mu = 0;$$

donc, puisque $j'(0+) > 0$, on a $Tu \geq 0$ μ-p.p. sur Ω. •

Rappelons qu'une *mesure de Radon* μ sur Ω est dite *strictement positive* que l'on note $\mu >> 0$, si

(34) $$0 \leq u \in \mathscr{K}(\Omega), \langle \mu, u \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \text{ sur } \Omega$$

ou de façon équivalente si $\mu \geq 0$ et

(35) $$u \in \mathscr{C}(\Omega),\ u \geq 0 \ \mu\text{-p.p.} \quad \Rightarrow \quad u \geq 0 \text{ sur } \Omega.$$

Nous supposerons pour simplifier que la condition suivante est vérifiée:

(36) il existe une mesure de Radon sur Ω strictement positive et bornée;

ceci est le cas par exemple si Ω séparable. On peut alors énoncer la caractérisation suivante:

Théorème 11. *Supposons (36) et soient* $A: D(A) \subset \mathscr{C}_0(\Omega) \to \mathscr{C}_0(\Omega)$ *linéaire vérifiant (24) et* $j \in J_0 \setminus (J_{sl} \cup J_{il})$ *avec* $D(j) = \mathbb{R}$ *et* $j'(0+) > j'(0-)$. *Alors A engendre un semi-groupe sous-markovien sur* $\mathscr{C}_0(\Omega)$ *si et seulement si A vérifie l'inégalité de Kato pour j et il existe* $\mu \in D(A')$ *strictement positive et* $\rho \in \mathbb{R}$ *tels que* $A'\mu \leq \rho\mu$.

Preuve du Théorème 11. La condition nécessaire résulte du Théorème 4 et de la Proposition C-II. 3.5 de [A3]. Pour prouver la condition suffisante, il suffit d'après le Théorème 8, de montrer que (30) est satisfaite. Remplaçant $j(r)$ par $j(r) - j'(0-)r$, on peut toujours supposer $j'(0-) = 0$ et donc $j \geq 0$; d'autre part, puisque $J_\lambda = (1 - \lambda\rho)^{-1} (I - \underline{\lambda}(A - \rho))^{-1}$ avec $\underline{\lambda} = \lambda(1 - \lambda\rho)^{-1}$, remplaçant A par $A - \rho$, on peut toujours supposer $\rho = 0$, c'est à dire $A'\mu \leq 0$.

On va montrer que $T=J_\lambda$ vérifie (33); appliquant le Lemme 3 et utilisant $\mu>>0$, on aura bien $J_\lambda\geq 0$, ce qui achèvera la preuve du théorème. Soit $u\in\mathscr{C}_0(\Omega)$; puisque A vérifie l'inégalité de Kato pour j, il existe $w\in L^1(\Omega,\mu)$ avec $w\in\partial j(J_\lambda u)$ μ-p.p. et

$$\int w\,A\,J_\lambda u\,d\mu\leq\langle A'\mu\,,j\circ J_\lambda u\rangle;$$

puisque $j\geq 0$ et $A'\mu\leq 0$, on a donc $\int w\,A\,J_\lambda u\,d\mu\leq 0$. On a alors, par définition du sous-différentiel,

$$\langle\mu\,,j\circ\,J_\lambda u\rangle-\langle\mu\,,j\circ\,u\rangle\leq\int w\,(J_\lambda u-u)\,d\mu=$$
$$\lambda\int w\,A\,J_\lambda u\,d\mu\leq 0.\ \bullet$$

Remarque 3.a) L'équivalent du Théorème 11 pour la caractérisation des générateurs d'un semi-groupe positif avec l'inégalité de Kato pour $j(r)=|r|$ a été démontré dans [1] et [16], d'ailleurs dans le cadre abstrait d'un espace de Banach réticulé (cf. B-II et C-II dans [13]).

b) Si (36) n'est pas satisfaite, on peut modifier la caractérisation comme dans C-II de [13].

c) Le Lemme 3 et donc le Théorème 11 sont encore valables avec des fonctions convexes $j(r)$ dérivables en $r=0$; par exemple, avec des modifications évidentes de la preuve, on peut utiliser la fonction $j(r)$ donnée par $j(r)=r^2$ pour $r>0$ et $j(r)=-r^3$ pour $r\leq 0$. Par contre le Lemme 3 est trivialement faux pour la fonction convexe $j(r)=r^2$ pour tout $r\in\mathfrak{R}$; nous ignorons si le Théorème 11 est vrai pour cette fonction convexe.

Achevons cette section par la preuve du Lemme 2.

Preuve du Lemme 2. Notons d'abord qu'appliquant (22) avec $j(r)=r$ et $j(r)=-r$, on a

$$\int v(x)\,d\mu(x)=\int u(x)\,d\nu(x).$$

Donnons-nous maintenant $j\in J_0$ avec $j\circ u\in L^1(\Omega,|\nu|)$ et $w\in L^1(\Omega,\mu)$ avec $w(x)\in\partial j(u(x))$ μ-p.p. $x\in\Omega$. Pour tout entier m, définissons la fonction $j_m\in J_0$ avec $D(j_m)=\mathfrak{R}$ par

$$j_m(r)=\int_0^r\inf(m,\sup(-m,j'(s))\,ds\quad\text{si } r\in D(j)\ ,$$

$$j_m(r)=j_m(a)-m(r-a)\quad\text{si}\quad -\infty<r<a=\inf D(j),$$

$$j_m(r)=j_m(b)+m(r-b)\quad\text{si}\quad b=\sup D(j)<r<\infty.$$

On a $j_m(r) \to j(r)$ lorsque $m \to \infty$ pour tout $r \in D(j)$, et il existe des constantes c_0, c_1 telles que $|j_m(r)| \leq |j(r)| + c_0 |r| + c_1$ pour tout m et tout $r \in D(j)$; par convergence dominée, on a donc

$$\int j_m(u(x))\, d\nu(x) \to \int j(u(x))\, d\nu(x) \qquad \text{lorsque } m \to \infty.$$

D'un autre coté, considérons $\underline{w}$ une fonction borélienne avec $\underline{w} = w$ μ-p.p. et N un ensemble borélien μ-négligeable tel que $\underline{w}(x) \in \partial j(u(x))$ pour tout $x \in \Omega \setminus N$. Pour tout entier m, définissons la fonction w_m sur Ω par

$$w_m = \inf(m, \sup(-m, \underline{w})) \text{ sur } \Omega \setminus N,\ w_m(x) = j_m'(u(x)+) \text{ pour } x \in N;$$

c'est une fonction borélienne bornée et $w_m(x) \in \partial j_m(u(x))$ pour tout $x \in \Omega$; de plus $|w_m| \leq |w|$ μ-p.p. pour tout m, et $w_m \to w$ μ-p.p. lorsque $m \to \infty$. Appliquant (22) avec (j_m, w_m) et passant à la limite, par convergence dominée on a donc (22) avec (j, w). •

4. SEMI-GROUPES D'HOMOMORPHISMES

Un *homomorphisme* (d'algèbre) *de* $\mathscr{C}_0(\Omega)$ est une application linéaire T de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ dans lui-même vérifiant $T(uv) = (Tu)(Tv)$ pour tout $u, v \in \mathscr{C}_0(\Omega)$. Si T est un homomorphisme de $\mathscr{C}_0(\Omega)$, on a en particulier $T(u^2) = (Tu)^2$ pour tout $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$, d'où l'on déduit immédiatement que $T \geq 0$ et $\|T\| \leq 1$. Il en résulte qu'un homorphisme de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ est le prolongement par continuitе d'un homomorphisme de $\mathscr{K}(\Omega)$ dans $\mathscr{C}_0(\Omega)$. D'après le Théorème 3, une application linéaire T de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ dans lui-même est donc un homomorphisme si et seulement si

(37) $\qquad j \circ Tu = T(j \circ u)$ pour $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ et $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue avec $j(0) = 0$.

Dans cette section, un *semi-groupe d'homorphismes de* $\mathscr{C}_0(\Omega)$ désignera un semi-groupe fortement continu d'homorphismes $(T(t))$ de $\mathscr{C}_0(\Omega)$. Notons d'abord la propriété des générateurs de semi-groupes d'homorphismes correspondant au Théorème 4 pour les semi-groupes sous-markoviens:

Théorème 12. *Soient A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe d'homorphismes de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ et $u \in D(A)$. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites:*

a) Pour tout $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec $j(0) = 0$, on a

(38) $\qquad j \circ u \in D(A)$ *et* $A(j \circ u) = (j' \circ u)\, Au.$

b) Pour toute partie N de $\mathfrak{R}$ négligeable (au sens de Lebesgue)

(39) $$Au=0 \ |\mu|\text{-p.p. sur } u^{-1}(N) \text{ pour tout } \mu\in D(A').$$

c) Pour tout $\mu\in D(A')$ et $p:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ localement intégrable (pour la mesure de Lebesgue) tel que $w=p\circ u\in L^1(\Omega,|\mu|)$, on a

(40) $$<A'\mu, j\circ u>=\int w\ Au\ d\mu$$

où $j: r\in\mathfrak{R}\to\int_0^r p(s)\,ds.$

Contrairement à la situation pour les générateurs de semi-groupes sous-markovien, ces relations permettent de caractériser les générateurs de semi-groupes d'homorphismes. On a en effet le résultat suivant:

Théorème 13. *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))$ de $\mathscr{C}_0(\Omega)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $T(t)$ est un homomorphisme de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ pour tout $t>0$.

(ii) Pour tout $u\in D(A)$, on a les propriétés a), b) et c) du Théorème 12.

(iii) Pour tout $u, v\in D(A)$, on a

(41) $$uv\in D(A) \quad \text{et} \quad A(uv)=u\ Av+v\ Au$$

(iv) Pour tout $j\in J_0$, $u\in D(A)$ avec $u(\Omega)\subset D(j)$, $\mu\in D(A')$ et $w\in L^1(\Omega,|\mu|)$ avec $w(x)\in\partial j(u(x))$ $|\mu|$-p.p. $x\in\Omega$, on a (40).

(v) Il existe $j\in J_0\setminus(J_{sl}\cup J_{il})$ avec $D(j)=\mathfrak{R}$ tel que pour tout $u\in D(A)$ et $\mu\in D(A')$, il existe $w\in L^1(\Omega,|\mu|)$ tel que $w(x)\in\partial j(u(x))$ $|\mu|$-p.p. $x\in\Omega$ et que l'on ait (40).

Pour la preuve du Théorème 12 nous utiliserons le résultat suivant qui est en fait un cas particulier d'un résultat abstrait que nous développerons en appendice:

Lemme 4. *Soit $A: D(A)\subset\mathscr{C}_0(\Omega)\to\mathscr{C}_0(\Omega)$ linéaire vérifiant (24) et (30). Si $\mu\in D(A')$ et $w\in L^1(\Omega,|\mu|)$, alors $w\mu\in\overline{D(A')}$.*

Preuve du Théorème 12. La propriété a) est simple: appliquant (37) aux homorphismes $T(t)$ du semi-groupe engendré par A, on a

$t^{-1}(T(t)(j\circ u)-j\circ u)=t^{-1}(j\circ T(t)u-j\circ u)$ pour tout $t>0$, et donc par dérivations des fonctions composées,

$t^{-1}(T(t)(j\circ u)-j\circ u)\to(j'\circ u)\,Au$ dans $\mathscr{C}_0(\Omega)$ lorsque $t\to 0$, c'est à dire (38).

Considérons maintenant

$$\mathscr{F}=\{p:\mathfrak{R}\to[0,1] \text{ borélienne; pour tout } \mu\in D(A'), (40) \text{ est satisfaite avec } w=p\circ u \text{ et } j(r)=\int_0^r p(s)\,\mathrm{ds}\}.$$

D'après ce qui précède, $\mathscr{F}$ contient les fonctions continues de $\mathfrak{R}$ dans $[0,1]$; d'autre part d'après le théorème de convergence dominée, $\mathscr{F}$ est stable par convergence simple; donc $\mathscr{F}$ contient toutes les fonctions boréliennes de $\mathfrak{R}$ dans $[0,1]$.

Pour démontrer b), on peut toujours supposer que l'ensemble négligeable N est borélien; appliquant ce qui précède avec $p=\chi_N$, fonction caractéristique de N, on obtient

$$\int_{u^{-1}(N)} Au\,d\mu=0 \quad \text{pour tout } \mu\in D(A'),$$

et donc pour tout $\mu\in\overline{D(A')}$. Appliquant le Lemme 4 ci-dessus, on en déduit

$$\int_{u^{-1}(N)}|Au|\,d|\mu|=0 \quad \text{pour tout } \mu\in D(A'),$$

ce qui prouve le point b).

Pour démontrer c), notons d'abord que compte-tenu de b), on peut toujours se restreindre à des fonctions p boréliennes; d'autre part, d'après le résultat ci-dessus la propriété est vraie pour les fonctions p boréliennes à valeurs dans $[0,1]$ et donc clairement pour toutes les fonctions p boréliennes bornées. Soient maintenant $\mu\in D(A')$ et $p:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ localement intégrable tel que $w=p\circ u\in L^1(\Omega,|\mu|)$; considérant $w_n=\inf(n,\sup(-n,w))$, on a

$$<A'\mu, j_n\circ u>=\int w_n\,Au\,d\mu$$

où $j_n(r)=\int_0^r \inf(n,\sup(-n,p(s)))\,ds$. Puisque $j_n(r)\to j(r)=\int_0^r p(s)\,ds$ uniformément pour r borné, par convergence dominée on obtient bien (40) à la limite. •

Preuve du Théorème 13. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est l'énoncé du Théorème 12. La propriété (iii) est clairement équivalente à (38) avec $j(r)=r^2$: les implications (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (v) sont alors immédiates.

L'implication (ii)$\Rightarrow$(iv) est simple: étant donné $j \in J_0$, $u \in D(A)$ avec $u(\Omega) \subset D(j)$, posons

$$E = \{r \in (\text{Int } D(j)) \cap u(\Omega) \text{ et } j \text{ dérivable en } r\}$$

et définissons la fonction p par

$$p(r) = j'(r) \text{ si } r \in E, p(r) = 0 \quad \text{si} \quad r \in \mathfrak{R} \setminus E;$$

on vérifie facilement que p est localement intégrable et

$$(j \circ u)(x) = \int_0^{u(x)} p(s)\, ds \text{ pour tout } x \in \Omega;$$

étant donné $\mu \in D(A')$ et $w \in L^1(\Omega, |\mu|)$ avec $w(x) \in \partial j(u(x))$ $|\mu|$-p.p. $x \in \Omega$, on a $w(x) = (p \circ u)(x)$ $|\mu|$-p.p. $x \in u^{-1}(E)$, et donc utilisant b) et le fait que $N = u(\Omega) \setminus E$ est au plus dénombrable, on a

$$w\, Au = (p \circ u)\, Au \;|\mu|\text{-p.p. sur } \Omega;$$

utilisant b), on a bien (40).

Montrons l'implication (v)$\Rightarrow$(i). Fixons $j \in J_0 \setminus (J_{s1} \cup J_1)$ avec $D(j) = \mathfrak{R}$ tel que (v) soit satisfaite; appliquant le Théorème 4, nous devons, $t > 0$ étant fixé, montrer que

$$T(t)(j \circ u) = j \circ T(t)u \text{ pour tout } u \in \mathscr{C}_0(\Omega);$$

par densité, il suffit en fait, $u \in D(A)$ et $\mu \in D(A')$ étant fixés, de montrer que

$$< \mu, T(t)(j \circ u) > = < \mu, j \circ T(t)u > .$$

Pour $0 \leq s \leq t$, posons

$$k(s) = < \mu, T(t-s)(j \circ T(s)u) > = < T(t-s)'\mu, j \circ T(s)u >,$$

et montrons $k(t) = k(0)$.

La fonction k est lipschitzienne sur $[0, t]$, puisque les applications $s \to T(t-s)'\mu$ et $s \to j \circ T(s)u$ sont lipschitziennes; en particulier k est p.p. dérivable sur $[0, t]$ et il suffit de montrer que $k'(s) = 0$ p.p.$s \in]0, t[$.

Pour $x \in \Omega$, la fonction $s \to j((T(s)u)(x))$ admet en tout point $s \in]0, t[$ une dérivée à droite $f_+(s, x) = w_+(s, x)(T(s)Au)(x)$ et une dérivée à gauche $f_-(s, x) = w_-(s, x)(T(s)Au)(x)$, où w_+ et w_- sont données par

$$w_+(s, x) = j'((T(s)u)(x)+), \; w_-(s, x) = j'((T(s)u)(x)-) \text{ si } (T(s)Au)(x) > 0,$$

$w_+(s,x)=j'((T(s)u)(x)-)$, $w_-(s,x)=j'((T(s)u)(x)+)$ si $(T(s)Au)(x)<0$,

$$w_+(s,x)=w_-(s,x)=0 \text{ si } (T(s)Au)(x)=0.$$

Etant donné $\underline{s}\in[0,t]$ fixé, par utilisation du théorème de convergence dominée, la fonction $s\rightarrow <|T(t-\underline{s})'\mu|,\ j\circ T(s)u>$ admet en tout point $s\in]0,t[$ une dérivée à droite

$$\int f_+(s,.)\, d|T(t-\underline{s})'\mu| \text{ et une dérivée à gauche } \int f_-(s,.)\, d|T(t-\underline{s})'\mu|;$$

mais cette fonction est lipschitzienne et donc p.p. $s\in]0,t[$ les dérivées à droite et à gauche en s coincident; puisque $f_+\geq f_-$, on en déduit que

$$\text{pour tout } \underline{s}\in[0,t],\ \text{p.p. } s\in]0,t[,\ f_+(s,x)=f_-(s,x) \quad |T(t-\underline{s})'\mu|\text{-p.p. } x\in\Omega.$$

Utilisant le fait que l'application $\underline{s}\rightarrow|T(t-\underline{s})'\mu|$ est lipchitzienne, on conclut qu'il existe une partie négligeable N de $]0,t[$ telle que

(42) pour tout $\underline{s}\in[0,t]$ et $s\in]0,t[\setminus N$, $f_+(s,x)=f_-(s,x) \quad |T(t-\underline{s})'\mu|$-p.p. $x\in\Omega$.

Maintenant, par dérivation d'un produit et application du théorème de convergence dominée, la fonction k admet en tout $s\in]0,t[$ des dérivées à droite et à gauche données par

$$(43)\qquad k_d'(s)=\int f_+(s,.)\, dT(t-s)'\mu-<T(t-s)'A'\mu,\ j\circ T(s)u>,$$

$$k_g'(s)=\int f_-(s,.)\, dT(t-s)'\mu-<T(t-s)'A'\mu,\ j\circ T(s)u>.$$

D'après l'hypothèse, étant donné $s\in]0,t[$ fixé, il existe $w\in L^1(\Omega,|T(t-s)'\mu|)$ avec $w\in\partial j(T(s)u)\quad |T(t-s)'\mu|$-p.p. sur Ω tel que l'on ait

$$(44)\qquad \int w\, AT(s)u\, dT(t-s)'\mu=<A'T(t-s)'\mu,\ j\circ T(s)u>.$$

Par définition de f_+ et f_-, on a

$$f_+(s,.)\geq w\, AT(s)u\geq f_-(s,.) \qquad |T(t-s)'\mu|\text{-p.p. sur } \Omega$$

et donc, si $s\notin N$, d'après (42), (43) et (44), k est dérivable en s et $k'(s)=0$. •

Achevons cette section par une remarque sur la structure des semi-groupes d'homorphismes de $\mathscr{C}_0(\Omega)$. Considérons d'abord $U\subset\Omega$, $\varphi: U\rightarrow\Omega$ et T l'homomorphisme de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ dans $\mathscr{F}(\Omega)$ défini pour tout $u\in\mathscr{C}_0(\Omega)$ par

$$(45)\qquad (Tu)(x)=u(\varphi(x)) \text{ si } x\in U,\ (Tu)(x)=0 \text{ si } x\in\Omega\setminus U.$$

On vérifie facilement que les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $Tu \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ pour tout $u \in \mathscr{K}(\Omega)$

(ii) T est un homomorphisme de $\mathscr{C}_0(\Omega)$

(iii) U est ouvert et $\varphi^{-1}(K)$ est un compact pour tout compact K de Ω.

En d'autres termes, compte-tenu du Théorème 3, un homorphisme de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ est de la forme (45) où U est un ouvert de Ω et φ une application de U dans Ω vérifiant

(46) $\quad \varphi^{-1}(K)$ est un compact pour tout compact K de Ω.

Considérons maintenant $U \subset [0, \infty[\times \Omega$, $\varphi : U \to \Omega$ et supposons

(47) pour tout $t \geq 0$, $U_t = \{x \in \Omega; (t, x) \in U\}$ est un ouvert de Ω et

l'application $\varphi_t : x \in U_t \to \varphi(t, x) \in \Omega$ vérifie (46).

Pour $t \geq 0$, notons $T(t)$ l'homomorphisme de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ associé à (U_t, φ_t). On vérifie immédiatement que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de $\mathscr{C}_0(\Omega)$, c'est à dire $T(0)$ est l'application identique de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ et $T(t+s) = T(t)\, T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$, si et seulement si (U, φ) est un *semi-flot sur* Ω, c'est à dire vérifie

(48) $\quad U_0 = \Omega, \varphi(0, x) = x$ pour tout $x \in \Omega$ et pour $t, s > 0$ on a

$U_{t+s} = \varphi_s^{-1}(U_t)$, $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ pour tout $x \in U_{t+s}$.

On a la caractérisation suivante:

Proposition 14. *Soient $U \subset [0, \infty[\times \Omega$, $\varphi : U \to \Omega$ vérifiant (47), (48), et $(T(t))$ le semi-groupe de $\mathscr{C}_0(\Omega)$ associé. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $(T(t))$ est un semi-groupe fortement continu de $\mathscr{C}_0(\Omega)$;

(ii) φ est continue sur U et pour tout compact K de Ω, il existe $t > 0$ tel que $[0, t] \times K \subset U$;

(iii) pour tout $x \in \Omega$, il existe $t > 0$ tel que $[0, t] \times \{x\} \subset U$ et $\varphi(s, x) \to x$ lorsque $s \to 0$.

Preuve. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est immédiate. La propriété (iii) implique que

$(T(t)u)(x) \to u(x)$ lorsque $t \to 0$ pour tout $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$ et $x \in \Omega$, c'est à dire que

$T(t)u \to u$ faiblement dans $\mathscr{C}_0(\Omega)$ lorsque $t \to 0$ pour tout $u \in \mathscr{C}_0(\Omega)$, ce qui est classiquement équivalent à (i) (cf. par exemple [8], Proposition 1.23).

Enfin supposons (i). Soient $(t, x) \in U$ et V un voisinage ouvert de $\varphi(t, x)$; il existe $u \in \mathscr{K}(V)$ tel que $u(\varphi(t, x)) = 1$; utilisant la continuité de l'application $(s, y) \to (T(s)u)(y)$, il existe un voisinage W de (t, x) dans $[0, \infty[\times\Omega$ tel que $(T(s)u)(y) \neq 0$ pour tout $(s, y) \in W$; utilisant la définition de $T(s)$, on a $W \subset U$ et $\varphi(s, y) \in V$ pour tout $(s, y) \in W$; ceci prouve bien la continuité de φ sur U. Soit maintenant K un compact de Ω; il existe $u \in \mathscr{K}(\Omega)$ tel que $u = 1$ au voisinage de K; utilisant la continuité de $t \to T(t)u$, il existe $t > 0$ tel que $T(s)u \neq 0$ sur K pour tout $s \in [0, t]$ et donc en particulier, d'après la définition de $T(s)u$, $K \subset U_s$ pour tout $s \in [0, t]$. •

APPENDICE

Dans cet appendice, nous prouvons le Lemme 4 en l'intégrant dans un énoncé plus général.

Donnons-nous E un espace de Banach réticulé continu pour l'ordre, c'est à dire tel que toute suite généralisée décroissante (x_i) du cône positif E_+ avec $\inf x_i = 0$ converge en norme vers 0. Rappelons qu'un idéal de E est un sous-espace vectoriel J vérifiant:

$$y \in J,\ x \in E,\ |x| \leq |y| \Rightarrow x \in J.$$

Un opérateur linéaire $B: D(B) \subset E \to E$ est à résolvante positive, s'il existe λ_0 tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\lambda I\text{-}B$ est une bijection de $D(B)$ sur E et $R(\lambda) = (\lambda I\text{-}B)^{-1} \geq 0$. On a le résultat suivant:

Proposition A. *Soient E un espace de Banach réticulé continu pour l'ordre et B un opérateur linéaire à résolvante positive. Alors $\overline{D(B)}$ est un idéal de E.*

Remarque A. Si l'espace de Banach réticulé E n'est pas continu pour l'ordre, la conclusion de la Proposition A est fausse en général (cf. [9] pour un contre-exemple).

Montrons d'abord que le lemme 4 est un corollaire de cette proposition:

Preuve du Lemme 4. L'espace $E=\mathscr{C}_0(\Omega)'$ est un espace de Banach réticulé continu pour l'ordre. Un sous-espace J de E est un idéal si et seulement si (cf. [15], II.5.14)

$$\mu \in J \text{ et } w \in L^1(\Omega, |\mu|) \Rightarrow w\mu \in J.$$

Etant donné $A: D(A) \subset \mathscr{C}_0(\Omega) \to \mathscr{C}_0(\Omega)$ linéaire vérifiant (24) et (30), l'opérateur $B=A'$ est à résolvante positive. Le Lemme 4 est alors une application immédiate de la Proposition A. •

Preuve de la Proposition A. Donnons-nous $x, y \in E$ avec $0 \leq |x| \leq |y|$ et montrons que $y \in \overline{D(B)}$ implique $x \in \overline{D(B)}$; remplaçant x par ses parties positive et négative, on peut toujours supposer $x \geq 0$ ce que nous faisons.

a) Supposons d'abord $y \in D(B)$. Puisque $D(B) = R(\lambda)E = R(\lambda)E^+ - R(\lambda)E^+$, on a $|y| \leq \underline{y}$ avec $\underline{y} \in D(B)$; on peut donc supposer $y \geq 0$ ce que nous faisons. Fixons $\underline{\lambda} > \lambda_0$ et posons $z = |\underline{\lambda}y - By|$. On a pour $\lambda \geq 2\underline{\lambda}$

$$0 \leq \lambda R(\lambda)x \leq \lambda R(\lambda)y = \lambda R(\lambda) R(\underline{\lambda})(\underline{\lambda})(\underline{\lambda}y - By) \leq \lambda R(\lambda) R(\underline{\lambda})z = \\ \lambda(\lambda - \underline{\lambda})^{-1}(R(\underline{\lambda})z - R(\lambda)z) \leq 2R(\underline{\lambda})z.$$

Puisque E est continu pour l'ordre, on en déduit que $\{\lambda R(\lambda)x;\ \lambda \geq 2\underline{\lambda}\}$ est relativement faiblement compact dans E (cf [15], 11.5.10); considérons $\underline{x} \in \overline{D(B)}$ un point d'adhérence faible lorsque $\lambda \to \infty$.

D'un autre coté, puisque $0 \leq R(\lambda)x \leq (2/\lambda) R(\underline{\lambda})z$, on a $R(\lambda)x \to 0$, et donc

$$R(\underline{\lambda})\lambda R(\lambda)x = \lambda(\lambda - \underline{\lambda})^{-1}(R(\underline{\lambda})x - R(\lambda)x) \to R(\underline{\lambda})x \text{ lorsque } \lambda \to \infty.$$

Il en résulte $R(\underline{\lambda})x = R(\underline{\lambda})\underline{x}$ et donc $x = \underline{x} \in \overline{D(B)}$.

b) Il résulte immédiatement de a) que pour $y \in D(B)$, on a $|y| \in \overline{D(B)}$. et donc par continuité de la valeur absolue $y \in \overline{D(B)}$ implique $|y| \in \overline{D(B)}$.

c) Soit maintenant $y \in \overline{D(B)}$. D'après b), on peut supposer $y \geq 0$ ce que nous faisons; soit une suite (y_n) de $D(B)$ convergeant vers y; on a $0 \leq x_n = \inf(|y_n|, x) \leq |y_n|$ et donc $x_n \in \overline{D(B)}$ d'après a); d'autre part $x_n \to \inf(|y|, x) = x$ et donc $x \in \overline{D(B)}$. •

Références

[1] W. ARENDT: *Kato's inequality. A characterization of generators of positive semigroups.* Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A **84** (1984). 155-174.

[2] W. ARENDT: *Resolvent positive operators.* Proc. London Math. Soc. (3) **54** (1987). 321-349.

[3] L. BARTHÉLEMY, PH. BÉNILAN: *Sous-potentiels d'un opérateur nonlinéaire.* Israel J. Math. **61,** 1 (1988). 85-111.

[4] PH. BÉNILAN, M. G. CRANDALL, A. PAZY: *Nonlinear evolution equation governed by accretive operators,* livre à paraître.

[5] H. BRÉZIS: *Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without conditions at infinity.* Appl. Math. Optim. **12** (1984). 271-282.

[6] M. G. CRANDALL, T. LIGGETT: *Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces.* Amer. J. Math. **93** (1971). 265-298.

[7] R. DAUTRAY, J. L. LIONS: *Analyse Mathématique et calcul Numérique.* Volume 2; L'opérateur de Laplace. Masson (1987).

[8] B. DAVIES: *One parameter semigroups.* London Academic Press (1980).

[9] A. GRABOSCH, R. NAGEL: *Order structure of the semigroup dual: a counterexample.* Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. A **92** (1989). 191-207.

[10] T. KATO: *Schrödinger operators with singular potentials.* Israel J. Math. **13** (1973). 135-148.

[11] S. MIYAJIMA: *Generators of positive C_o-semigroups. Aspects of positivity in functional analysis.* R. Nagel, U. Schlotterbeck, M. Wolff (eds.). North Holland Amsterdam (1986).

[12] S. MIYAJIMA, N. OKAZAWA: *Generators of positive C_o-semigroups on Banach lattices.* Pac. J. Math. **125** (1986). 161-175.

[13] R. NAGEL (ed.): *One parameter semigroups of positive operators.* Springer Berlin. LN 1184 (1986).

[14] R. NAGEL, H. UHLIG: *An abstract Kato inequality for generators of positive semigroups on Banach lattices.* J. Operator Theory **6** (1981). 113-123.

[15] H. H. SCHAEFER: *Banach lattices and positive operators.* Springer Berlin (1974).

[16] A. R. SCHEP: *Weak Kato-inequalities and positive semigroups.* Math. Z. **164** (1985). 305-314.

Equipe de Mathématiques, U.A. C.N.R.S. 741
Université de Franche-Comté
25030 Besançon Cedex
France

Recibido: 6 de marzo de 1992