REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 4, números 2 y 3; 1991.

Sur la Convergence des D^m-splines d'ajustement pour des données exactes ou bruitées

M. C. LÓPEZ DE SILANES et R. ARCANGÉLI

ABSTRACT. Let Ω be a bounded open subset of $\mathfrak{R}^n$ containing the data points, d the Hausdorff distance from the set of data points to $\overline{\Omega}$ and ε the smoothing parameter. Assume that $\varepsilon = o(d^{-n})$, $d \to 0$, and in addition when the data are noisy, that the «white noise» hypothesis is satisfied. Then, for smoothing of exact or noisy data with D^m-splines, convergence and error estimates results are obtained. These results improve previous ones given by F. Utreras or the authors.

1. INTRODUCTION

Les D^m-splines (sur $\mathfrak{R}^n$) constituent un cas particulier des splines d'ordre (m, s), dont la théorie est due à J. Duchon [5, 6, 7]: les splines d'ordre (m, s) sont des fonctions régulières dont la définition résulte d'un critère de minimisation dans un espace «de type Sobolev», l'espace $X^{m,s}$, et les D^m-splines ne sont autres que les splines d'ordre $(m, 0)$ (la définition de l'espace correspondant $X^{m,0}$, encore noté $D^{-m}L^2$, est rappelée au paragraphe 2 et celle des D^m-splines d'ajustement au paragraphe 3).

Soit Ω un ouvert borné de $\mathfrak{R}^n$ tel que $\overline{\Omega}$ contienne les points de données. L'étude de la convergence des D^m-splines d'ajustement et de l'erreur d'approximation correspondante a fait l'objet de différents travaux: D. Ragozin [12], en dimension 1, et F. Utreras [14], en dimension quelconque, ont donné des résultats de convergence et d'erreur *dans* $H^{m-1}(\Omega)$ pour des données *exactes* ou *bruitées*. Nous-mêmes [10] avons, dans le cas où les données sont *exactes* et le paramètre d'ajustement ε *borné,* montré la convergence dans $X^{m,s}$ des splines d'ajustement d'ordre (m, s) et obtenu des estimations dans $H^{m+s}(\Omega)$ de l'erreur d'approximation par splines d'ajustement d'ordre (m, s).

1991 Mathematics Subject Classification: 41A15.
Editorial de la Universidad Complutense. Madrid, 1991.

Au paragraphe 4, nous étudions le rôle de différentes conditions dans la convergence des D^m-splines d'ajustement pour des données exactes, quand la distance de Hausdorff d de l'ensemble des points de données à $\overline{\Omega}$ tend vers 0. Sous **l'hypothèse** $\varepsilon = o(d^{-n})$, $d \to 0$, nous montrons la convergence dans $D^{-m}L^2$, améliorant ainsi le résultat de [10]. On peut noter que la condition $\varepsilon = o(d^{-n})$ est nécessaire et suffisante dans le cas où les ensembles de points de données satisfont à une propriété de *régularité asymptotique* (vérifiée trivialement par les ensembles de points uniformément répartis).

Le paragraphe 5 est consacré à l'étude de la convergence des D^m—splines d'ajustement pour des données bruitées. Nous montrons d'abord l'impossibilité, dans une situation réaliste, d'obtenir la convergence (déterministe) dans $H^m(\Omega)$ lorsque les données sont entachées d'erreurs de mesure. Nous introduisons alors l'hypothèse probabiliste du *bruit blanc* et, utilisant le théorème de convergence du paragraphe 4 et un résultat de F. Utreras [14], nous déterminons une condition sur ε permettant d'expliciter des estimations (et la convergence vers 0) de l'espérance mathématique des carrés des seminormes $|\cdot|_{i,\Omega}$ de l'erreur pour $i = o, ..., m$.

On désigne par «ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne» un ouvert (non vide borné connexe) de $\mathbb{R}^n$ *à frontière lipschitzienne au sens de J. Nečas* [11]. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on désigne par $P_i = P_i(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des (fonctions) polynômes sur $\mathbb{R}^n$ de degré $\leq i$ par rapport à l'ensemble des variables et, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, par $P_i(\Omega)$ l'espace vectoriel des restrictions à Ω des fonctions de P_i. Pour la définition d'«ensemble $P_i(\Omega)$-unisolvant» on renvoie à P. G. Ciarlet [2]. Enfin, la même lettre C désignera *diverses constantes strictement positives.*

2. ESPACES FONCTIONNELS

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on désigne par $H^i(\Omega)$ l'espace de Sobolev usuel, muni de la norme

$$\|v\|_{i,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq i} \int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2},$$

où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ et où $\partial^\alpha v$ désigne la dérivée partielle α-ième de v. On utilise également les semi-normes

$$|v|_{j,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha| = j} \int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^2 \, dx \Big)^{1/2}, 0 \leq j \leq i.$$

Soient m et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$m > n/2.$$

On désigne par $D^{-m}L^2(\mathfrak{R}^n)$, ou plus brièvement par $D^{-m}L^2$, l'espace de Beppo-Levi

$$\left\{v \in D'(\mathfrak{R}^n)\,;\forall\alpha \in \mathfrak{N}^n,\,|\alpha| = m\,,\partial^\alpha v \in L^2(\mathfrak{R}^n)\right\},$$

où $D'(\mathfrak{R}^n)$ est l'espace des distributions sur $\mathfrak{R}^n$. Rappelons quelques propriétés fondamentales de l'espace $D^{-m}L^2$:

- muni de la semi-norme

$$|v|_m = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}\int_{\mathfrak{R}^n} |\partial^\alpha v(x)|^2\,dx\Big)^{1/2},$$

où $\alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_n!$, et du semi-produit scalaire associé $(.,.)_m$, $D^{-m}L^2$ est un espace «semi-hilbertien», i.e. complet pour cette semi-norme (cf. J. Duchon [5]);

- soit Ω^* un ouvert non vide borné connexe de $\mathfrak{R}^n$; muni de la norme

$$\|v\|_m^{\Omega^*} = \Big(\int_{\Omega^*} |v(x)|^2\,dx + |v|_m^2\Big)^{1/2},$$

$D^{-m}L^2$ est un espace de Hilbert dont la topologie est indépendante de Ω^* (cf. J. Nečas [11]): dans la suite on supposera $D^{-m}L^2$ muni d'une norme $\|\cdot\|_m^{\Omega^*}$, que l'on écrira simplement $\|\cdot\|_m$, sans faire référence à un ouvert Ω^* particulier;

- soit Ω un ouvert de $\mathfrak{R}^n$ à frontière lipschitzienne; alors (cf. J. Duchon [7], J. Nečas [11])

(2-1) $\quad\left|\begin{array}{l}\text{l'opérateur de restriction à } \Omega \text{ est} \\ \text{linéaire continu de } D^{-m}L^2 \textit{ sur } H^m(\Omega);\end{array}\right.$

il en résulte que

(2-2) $$D^{-m}L^2 \hookrightarrow C^0(\mathfrak{R}^n),$$

où $\hookrightarrow$ désigne l'injection continue.

Donnons, pour terminer ce paragraphe, un résultat d'équivalence de normes.

Proposition 2.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathfrak{R}^n$ à frontière lipschitzienne et $B_0 = \{b_{01},\ldots,b_{0M}\}$ un sous-ensemble $P_{m-1}(\Omega)$-unisolvant de points de $\overline{\Omega}$.*

Alors il existe $r>0$ tel que, si $\mathscr{B}_r$ désigne l'ensemble des M-uplets $B=\{b_1,\ldots,b_M\}$ de points de $\overline{\Omega}$ satisfaisant à la condition

$$\forall j=1,\ldots,M\,,\ |b_j-b_{Oj}|\leq r\,, \tag{2-3}$$

l'application $|\cdot|_m^B$, définie pour tout $B\in\mathscr{B}_r$ par

$$|v|_m^B=\Big(\sum_{j=1}^{M}|v(b_j)|^2+|v|_m^2\Big)^{1/2},$$

soit une norme sur $D^{-m}L^2$ uniformément équivalente sur $\mathscr{B}_r$ à la norme $\|\cdot\|_m$.

Démonstration. 1) D'après (2-2),

$$\exists C\,,\forall B\in\mathscr{B}_r\,,\forall v\in D^{-m}L^2:|v|_m^B\leq C\|v\|_m\,.$$

2) Pour tout $v\in D^{-m}L^2$ et pour tout $B\in\mathscr{B}_r$, on a évidemment:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}|v(b_{Oj})|^2\leq\sum_{j=1}^{M}|v(b_{Oj})-v(b_j)|^2+\sum_{j=1}^{M}|v(b_j)|^2.$$

Il résulte du théorème d'immersion hölderienne pour l'espace $H^m(\Omega)$, de (2-3) et de (2-1) que

$$\begin{cases}\forall\gamma>0\,,\ \exists r>0\,,\forall B\in\mathscr{B}_r\,,\forall v\in D^{-m}L^2:\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{M}|v(b_{Oj})-v(b_j)|^2\leq\gamma^2\,\|v\|_m^2,\end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases}\forall\gamma>0\,,\ \exists r>0,\forall B\in\mathscr{B}_r\,,\forall v\in D^{-m}L^2:\\ \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}|v(b_{Oj})|^2+|v|_m^2-\gamma^2\|v\|_m^2\leq(|v|_m^B)^2.\end{cases}$$

Or (cf. M. C. López de Silanes et R. Arcangéli [10]), l'application $v\to\Big(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}|v(b_{Oj})|^2+|v|_m^2\Big)^{1/2}$ est une norme sur $D^{-m}L^2$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_m$. On en déduit que

$$\begin{cases}\exists C'>0\,,\forall\gamma>0\,,\ \exists r>0\,,\forall B\in\mathscr{B}_r\,,\forall v\in D^{-m}L^2:\\ (C'^2-\gamma^2)\,|v|_m^2\leq(|v|_m^B)^2,\end{cases}$$

et le résultat suit en fixant r à partir de la condition $\gamma<C'$. ∎

3. D^m-SPLINES D'AJUSTEMENT (SUR $\mathbb{R}^n$)

Rappelons la définition de ces splines, due à J. Duchon [6]. Soient toujours m et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m > n/2$. On suppose donnés:

- un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne;
- un sous-ensemble $\mathfrak{D}$ de $\mathbb{R}_+^*$ admettant 0 pour point d'accumulation;
- pour tout $d \in \mathfrak{D}$, un ensemble ordonné A^d de $N = N(d)$ points distincts de $\overline{\Omega}$ contenant un sous-ensemble P_{m-1}-unisolvant.

Pour tout $d \in \mathfrak{D}$, on désigne par $\rho^d \in \mathscr{L}(D^{-m}L^2, \mathbb{R}^N)$ l'opérateur défini par

$$\rho^d v = \big(v(a)\big)_{a \in A^d}$$

(la continuité de ρ^d résulte de (2-2)). On note $<.>$ et $<.,.>$ respectivement la norme et le produit scalaire euclidiens dans $\mathbb{R}^N$. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $d \in \mathfrak{D}$ et pour tout $\beta^d \in \mathbb{R}^N$, on pose:

$$\forall v \in D^{-m}L^2, \ J_\varepsilon^d(v) = <\rho^d v - \beta^d>^2 + \varepsilon |v|_m^2$$

et on considère le problème: trouver σ_ε^d solution de

$$\text{(3-1)} \qquad \begin{cases} \sigma_\varepsilon^d \in D^{-m}L^2, \\ \forall v \in D^{-m}L^2, \ J_\varepsilon^d(\sigma_\varepsilon^d) \leq J_\varepsilon^d(v). \end{cases}$$

Le problème (3-1) admet une solution unique (cf. J. Duchon [6]), la «*D^m-spline d'ajustement (sur $\mathbb{R}^n$) relative à A^d, β^d et ε*», qui est également la solution unique du problème variationnel: trouver σ_ε^d solution de

$$\text{(3-2)} \qquad \begin{cases} \sigma_\varepsilon^d \in D^{-m}L^2, \\ \forall v \in D^{-m}L^2, < \rho^d \sigma_\varepsilon^d, \rho^d v > + \varepsilon (\sigma_\varepsilon^d, v)_m = < \beta^d, \rho^d v >. \end{cases}$$

De plus, la solution de (3-1) et (3-2) est explicitement connue (cf. J. Duchon [6]):

$$\sigma_\varepsilon^d(x) = \sum_{a \in A^d} \lambda_a K_{2m-n}(x-a) + p(x),$$

où $p \in P_{m-1}$ et

$$K_{2m-n}(x) = \begin{cases} |x|^{2m-n}, \text{ si } n \text{ est impair}, \\ |x|^{2m-n} \operatorname{Log}|x|, \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

(les coefficients λ_a et le polynôme p sont déterminés par la résolution d'un système linéaire).

4. CONVERGENCE POUR DES DONNÉES EXACTES

Soient f une fonction donnée de $H^m(\Omega)$ et f_1 un prolongement quelconque de f à $D^{-m}L^2$. Pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $d\in\mathfrak{D}$, on désigne maintenant par σ_ε^d la D^m-spline d'ajustement relative à A^d, $\rho^d f_1$ et ε.

4.1. Hypothèses pour la convergence

Le problème est de déterminer les conditions les plus larges sur A^d et ε assurant la convergence sur Ω, i.e. telles que: $\lim\limits_{d\to 0} \|f-\sigma_\varepsilon^d\|_{m,\Omega}=0$, où pour simplifier on a écrit σ_ε^d au lieu de $\sigma_\varepsilon^d|_\Omega$.

Une condition usuelle sur A^d est que

$$\lim_{d\to 0}\sup_{x\in\Omega}\delta(x, A^d)=0, \tag{4-1}$$

où δ désigne la distance euclidienne dans $\mathfrak{R}^n$. (On sait que $\sup\limits_{x\in\Omega}\delta(x, A^d)$ est la distance de Hausdorff de A^d à $\overline{\Omega}$). On vérifie facilement que (4-1) implique que

$$\lim_{d\to 0} N(d)=+\infty.$$

On préfèrera utiliser la condition

$$\forall d\in\mathfrak{D},\ \sup_{x\in\Omega}\delta(x, A^d)=d, \tag{4-2}$$

qui implique (4-1) : ce faisant on procède comme il est habituel de le faire dans la théorie des éléments finis (cf. P. G. Ciarlet [2]). On utilisera également l'hypothèse

$$N=O(d^{-n}),\ d\to 0 \tag{4-3}$$

(propriété de «régularité asymptotique» de la répartition dans $\overline{\Omega}$ des points des ensembles A^d).

D'autre part, on supposera que ε est fonction de d et l'on envisagera les différentes hypothèses suivantes:

$$\varepsilon \text{ est borné quand } d\to 0; \tag{4-4}$$

$$\varepsilon = o(N),\ d \to 0\,; \tag{4-5}$$

$$\varepsilon = o(d^{-n}),\ d \to 0\,. \tag{4-6}$$

Evidemment (4-1) et (4-4) impliquent (4-5), et (4-3) et (4-5) impliquent (4-6).

De même, (4-2) et (4-6) impliquent (4-5). En effet, il résulte de (4-2) que

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{a \in A^d} B'(a, d),$$

où $B'(a, d)$ désigne la boule euclidienne fermée de centre a et de rayon d; on en déduit que

$$\exists C,\ \forall d \in \mathfrak{D},\ Nd^n \geq C,$$

d'où le résultat.

Par ailleurs,

Proposition 4.1. *La condition* (4-1) *est nécessaire pour la convergence sur* Ω.

Démonstration. 1) Supposons que la convergence sur Ω ait lieu sans que l'hypothèse (4-1) soit vérifiée. Alors,

$$\exists \alpha > 0,\ \exists (d_n) \subset \mathfrak{D},\ \lim_{n \to +\infty} d_n = 0,\ \exists (x_n) \subset \Omega : \forall n,\ \delta(x_n, A^{d_n}) > \alpha.$$

Mais puisque Ω est borné, il existe un point $x^* \in \overline{\Omega}$ et une suite extraite de (x_n), soit (x_{n_p}), tels que

$$x^* = \lim_{p \to +\infty} x_{n_p}.$$

On a:

$$\forall p,\ \forall y \in A^{d_{n_p}},\ x_{n_p} - y = (x_{n_p} - x^*) + (x^* - y),$$

d'où

$$\delta(x_{n_p}, A^{d_{n_p}}) \leq |x_{n_p} - x^*| + \delta(x^*, A^{d_{n_p}}).$$

Alors il existe $x^* \in \overline{\Omega}$, il existe $\alpha_1 > 0$, il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_p) et il existe un entier p_O tels que

$$\forall p, p \geq p_O : \delta(x^*, A^{d_{n_p}}) > \alpha_1.$$

2) Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $H^m(\Omega$ telles que

$$\begin{cases} f_1 \neq f_2 \text{ sur la boule } B'(x^*, \alpha_1), \\ f_1 = f_2 \text{ sur } \Omega \setminus B'(x^*, \alpha_1). \end{cases}$$

D'après le 1), il leur correspond une même suite $(\sigma_\varepsilon^{d_{n_p}})$ de D^m-splines d'ajustement et l'on obtient d'après l'hypothèse de convergence:

$$\lim_{p \to +\infty} \| f_1 - \sigma_\varepsilon^{d_{n_p}} \|_{m,\Omega} = \lim_{p \to +\infty} \| f_2 - \sigma_\varepsilon^{d_{n_p}} \|_{m,\Omega} = 0,$$

d'où le résultat. ∎

De même,

Proposition 4.2. *La condition* (4-5) *est nécessaire pour la convergence sur* Ω, *sauf dans le cas trivial* $f \in P_{m-1}(\Omega)$.

Démonstration. Supposons que $\sigma_\varepsilon^d \to f$ dans $H^m(\Omega)$. De l'équation (3-2) on déduit que

$$\frac{1}{N} < \rho^d(\sigma_\varepsilon^d - f_1), \rho^d \sigma_\varepsilon^d > + \frac{\varepsilon}{N} (\sigma_\varepsilon^d, \sigma_\varepsilon^d)_m = 0. \tag{4-7}$$

Puisque $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, le premier terme dans (4-7) tend vers zéro quand $d \to 0$ et par conséquent:

$$\lim_{d \to 0} \left(\frac{\varepsilon}{N} |\sigma_\varepsilon^d|_{m,\Omega}^2 \right) \leq \lim_{d \to 0} \left(\frac{\varepsilon}{N} |\sigma_\varepsilon^d|_m^2 \right) = 0,$$

d'où le résultat. ∎

4.2. Résultats de convergence

Le principal résultat de ce paragraphe est le suivant:

Théorème 4.1. *Supposons que les hypothèses* (4-2) *et* (4-6) *soient satisfaites. Alors*

$$\lim_{d\to 0} \|\sigma_\varepsilon^d - f^\Omega\|_m = 0,$$

où f^Ω désigne l'unique élément de semi-norme $|\cdot|_m$ minimale de l'ensemble $\{v \in D^{-m}L^2 ; v|_\Omega = f\}$.

Démonstration. 1) Montrons d'abord que la famille (σ_ε^d), avec $\varepsilon = o(d^{-n})$, $d \to 0$, est bornée dans $D^{-m}L^2$ quand $d \to 0$. Considérons (3-2) avec $\beta^d = \rho^d f^\Omega$ et prenons $v = \sigma_\varepsilon^d - f^\Omega$. Il vient:

$$\forall (d, \varepsilon) \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{R}_+^*, < \rho^d(\sigma_\varepsilon^d - f^\Omega) >^2 + \varepsilon(\sigma_\varepsilon^d, \sigma_\varepsilon^d - f^\Omega)_m = 0.$$

On en déduit que

$$\forall (d, \varepsilon) \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{R}_+^*, \ |\sigma_\varepsilon^d|_m \leq |f^\Omega|_m \tag{4-8}$$

et que

$$\exists C, \forall (d, \varepsilon) \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{R}_+^*, < \rho^d(\sigma_\varepsilon^d - f^\Omega) > \leq C\varepsilon^{1/2}. \tag{4-9}$$

D'autre part, soit $B_O = \{b_{O1}, \dots, b_{OM})$ un sous-ensemble P_{m-1}-unisolvant de $\overline{\Omega}$. Pour chaque point b_{Oj} on considère la boule (fermée) $\omega'_j = B'(b_{Oj}, r)$, où $r > 0$ est la constante de la proposition 2.1. Pour chaque $j = 1, \dots, M$, en tenant compte de l'hypothèse (4.2), on a pour tout $d \in \mathfrak{D}$, $d \leq r$:

$$B'(b_{Oj}, r-d) \subset \bigcup_{a \in A^d \cap \omega'_j} B'(a, d).$$

Posant $N_j = \operatorname{card}(A^d \cap \omega'_j)$, il vient:

$$\exists C, \forall d \in \mathfrak{D}, d \leq r, \operatorname{mes} B'(b_{Oj}, r-d) \leq C N_j d^n,$$

d'où:

$$\exists d_o, \exists C, \forall d \in \mathfrak{D}, d \leq d_o < r, N_j \geq C d^{-n}.$$

Or on déduit de (4-9), avec l'hypothèse (4-6), que

$$\sum_{a \in A^d \cap \omega'_j} |(\sigma_\varepsilon^d - f)(a)|^2 = o(d^{-n}), d \to 0.$$

Donc pour tout d assez petit et pour tout $j=1,\ldots,M$, il existe (au moins) un point $b_j^d \in A^d \cap \omega_j'$ tel que

(4-10) $$\forall j=1,\ldots,M,\ (\sigma_\varepsilon^d - f)(b_j^d) = o(1),\ d \to 0.$$

On note B^d l'ensemble $\{b_1^d,\ldots,b_M^d\}$. Appliquant la proposition 2.1 avec $B=B^d$, d assez petit, il résulte alors de (4-8) et (4-10) que:

$$\exists C,\ \|\sigma_\varepsilon^d\|_m \leq C,\ d \to 0.$$

La famille (σ_ε^d) étant bornée dans $D^{-m}L^2$, il existe une suite $\left(\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}\right)_{i\in\mathfrak{N}}$, avec $\lim\limits_{i\to+\infty} d_i=0$, $\left(\varepsilon_i\right)_{i\in\mathfrak{N}} \subset \mathfrak{R}_+^*$ et $\varepsilon_i = o((d_i)^{-n})$, $i\to+\infty$, extraite de la famille (σ_ε^d), et un élément $f^* \in D^{-m}L^2$ tels que

(4-11) $$f^* = \lim_{i\to+\infty} \text{faible}\ \sigma_{\varepsilon_i}^{d_i} \ \text{dans}\ D^{-m}L^2.$$

2) Montrons maintenant que $f^*|_\Omega = f$. Pour cela, raisonnons par l'absurde: supposons que $f^*|_\Omega \neq f$. Il existe alors un ouvert non vide O contenu dans Ω et un réel $\alpha>0$ tels que:

$$\forall x\in O,\ |f^*(x) - f(x)| > \alpha.$$

D'autre part, il résulte de (4-11) que la suite $\left(\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}\right)$ converge simplement sur $\overline{\Omega}$ vers f^*. De plus (théorème d'immersion hölderienne pour l'espace $H^m(\Omega)$), la suite $\left(\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}\right)$ est équicontinue sur $\overline{\Omega}$, donc la convergence est uniforme:

$$\exists i_0 \in \mathfrak{N},\ i \geq i_0,\ \forall x\in O,\ |\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}(x) - f^*(x)| \leq \alpha/2,$$

et il en résulte que, pour tout $i \geq i_0$:

(4-12) $$\forall x\in O,\ |\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}(x) - f(x)| \geq |f^*(x) - f(x)| - |\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}(x) - f^*(x)| \geq \alpha/2.$$

Or le raisonnement du 1) montre que, pour tout $i\in\mathfrak{N}$ assez grand, il existe un point $b^{d_i}\in A^{d_i}\cap O$ tel que $|\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}(b^{d_i}) - f(b^{d_i})| = o(1)$, $i\to+\infty$, ce qui contredit (4-12). Donc $f^*|_\Omega = f$.

3) Montrons que $\lim\limits_{i\to+\infty} \|\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i} - f^\Omega\|_m = 0$. On a évidemment, pour tout $i\in\mathfrak{N}$:

$$|\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i} - f^*|_m^2 = |\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}|_m^2 + |f^*|_m^2 - 2(\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}, f^*)_m.$$

Mais il résulte de (4-8), de la définition de f^Ω et de la relation $f^*|_\Omega = f$ que

(4-13) $$\forall i\in\mathfrak{N},\ |\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}|_m \leq |f^\Omega|_m \leq |f^*|_m,$$

d'où:

$$\lim_{i\to+\infty} |\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i} - f^*|_m = 0.$$

D'autre part, la convergence faible de $\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i}$ vers f^* dans $D^{-m}L^2$, la relation (2-1) et le théorème d'injection compacte de $H^m(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ impliquent que

$$\lim_{i\to+\infty} \|\sigma_{\varepsilon_i}^{d_i} - f^*\|_{0,\Omega} = 0.$$

Enfin, passant à la limite dans (4-13), on obtient:

$$f^* = f^\Omega$$

et le résultat suit.

4) Achevons la démonstration en raisonnant par l'absurde. Supposons que $\|\sigma_\varepsilon^d - f^\Omega\|_m$, avec $\varepsilon = o(d^{-n})$, $d\to 0$, ne tende pas vers 0 quand $d\to 0$. Cela revient à dire qu'il existe $\alpha > 0$ et $\big((d_i', \varepsilon_i')\big)_{i\in\mathfrak{N}}$, suite de $\mathfrak{D}\times\mathfrak{R}_+^*$ telle que $\lim_{i\to+\infty} d_i' = 0$, et $\varepsilon_i' = o((d_i')^{-n})$, $i\to+\infty$, vérifiant

$$\forall i\in\mathfrak{N}, \|\sigma_{\varepsilon_i'}^{d_i'} - f^\Omega\|_m > \alpha.$$

Mais une telle suite est bornée dans $D^{-m}L^2$ et le raisonnement précédent entraîne une contradiction. ∎

Remarke 4.1. Le théorème 4.1 améliore le théorème 1.6 de M. C. López de Silanes et R. Arcangéli [10], où la convergence est obtenue sous les hypothèses (4-2) et (4-4). Le résultat du théorème 4.1 est *optimal* en ce sens que (hormis le cas trivial $f\in P_{m-1}(\Omega)$) la condition (4-6) est, sous les hypothèses (4-2) et (4-3), *nécessaire et suffisante* pour la convergence sur Ω. ∎

On déduit de ce théorème le résultat suivant, dont le point *(i)* a précédemment été prouvé par F. Utreras [14].

Théorème 4.2. *On suppose que les hypothèses* (4-2), (4-3) *et* (4-6) *sont vérifiées et que:*

(4-14) $$\varepsilon \geq d^{2m-n}, d\to 0.$$

Alors, quand $d\to 0$:

(i) $$\forall i = 0,\dots,m-1\ ,\ |f - \sigma_\varepsilon^d|_{i,\Omega} = O\Big[\Big(\frac{\varepsilon}{N}\Big)^{(m-i)/2m}\Big]$$

et

(ii) $$|f-\sigma_\varepsilon^d|_{m,\Omega}=o(1).$$

Démonstration. Le résultat du théorème 4.1 de M. C. López de Silanes et R. Arcangéli [10] est valable sous la seule hypothèse (4-2) pour d assez petit et pour tout $\varepsilon>0$. Compte tenu de (4-6) et de (4-14), on en déduit que

$$|f-\sigma_\varepsilon^d|_{0,\Omega}=O(d^{n/2}\varepsilon^{1/2}),\, d\to 0.$$

D'autre part, on a *(ii)* d'après le théorème 4.1.

Utilisant alors (4-3) et un résultat concernant les semi-normes intermédiaires (cf. le théorème 4.14 de R. Adams [1]), on obtient *(i)*. ■

5. CONVERGENCE POUR DES DONNÉES BRUITÉES

Soient toujours f une fonction donnnée de $H^m(\Omega)$, f_1 un prolongement de f à $D^{-m}L^2$ et σ_ε^d la D^m-spline d'ajustement relative à A^d, $\rho^d f_1$ et ε. Pour tout $d\in\mathfrak{D}$, soit $v^d=(v_a^d)_{a\in A^d}\in\mathfrak{R}^N$ un quelconque «vecteur d'erreur». Pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $d\in\mathfrak{D}$, on désigne par $\tilde\sigma_\varepsilon^d$ la D^m-spline d'ajustement relative à A^d, $\rho^d f_1+v^d$ et ε, et par e_ε^d la D^m-spline d'ajustement relative à A^d, v^d et ε. On a évidemment: $\tilde\sigma_\varepsilon^d=\sigma_\varepsilon^d+e_\varepsilon^d$ (l'opérateur qui à tout $\beta^d\in\mathfrak{R}^N$ fait correspondre la D^m-spline d'ajustement relative à A^d, β^d et ε est *linéaire).*

5.1. Hypothèses pour la convergence

On peut mettre en évidence une condition *nécessaire* pour la convergence sur Ω, i.e. telle que: $\lim\limits_{d\to 0}\|f-\tilde\sigma_\varepsilon^d\|_{m,\Omega}=0$.

Proposition 5.1. *On suppose que l'hypothèse* (4-5) *est vérifiée. Alors une condition nécessaire pour la convergence sur* Ω *est que:*

(5-1) $$\forall v\in D^{-m}L^2,\ \lim_{d\to 0}\left\{\frac{1}{N}\sum_{a\in A^d} v_a^d\, v(a)\right\}=0.$$

Démonstration. L'équation (3-2) de la D^m-spline d'ajustement $\tilde\sigma_\varepsilon^d$ peut s'écrire

(5-2) $$\forall v\in D^{-m}L^2,\ \frac{1}{N}<\rho^d(\tilde\sigma_\varepsilon^d-f_1),\ \rho^d v>+\frac{\varepsilon}{N}(\tilde\sigma_\varepsilon^d,\ v)_m=\frac{1}{N}<v^d,\ \rho^d v>.$$

La convergence sur Ω implique que le premier terme du premier membre de (5-2) tend vers 0 quand $d \to 0$.

Elle implique d'autre part que $|\tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_m$ est borné. Posons en effet $\varphi = \tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_\Omega$ et désignons par φ^Ω l'élément de semi-norme $|\cdot|_m$ minimale de l'ensemble $\{v \in D^{-m}L^2;\ v|_\Omega = \varphi\}$. Il résulte alors de (3-1), avec $v = \varphi^\Omega$, que $\tilde{\sigma}_\varepsilon^d = \varphi^\Omega$. D'autre part, d'après un résultat de G. Geymonat (cf. G. Strang [13]), il existe un opérateur de prolongement $\tilde{P}$ de $H^m(\Omega)$ dans $D^{-m}L^2$ tel que:

$$\exists C, \forall v \in H^m(\Omega), |\tilde{P}v|_m \leq C|v|_{m,\Omega}.$$

On en déduit que:

$$\forall d \in \mathbf{D}, \forall \varepsilon > 0, |\tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_m \leq |\tilde{P}(\tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_\Omega)|_m \leq C|\tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_{m,\Omega},$$

ce qui entraîne que $|\tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_m$ est borné.

Utilisant alors (4-5), on voit que le second terme du premier membre de (5-2) tend lui aussi vers 0. D'où la relation (5-1). ∎

La condition (5-1) n'est généralement pas vérifiée. Elle l'est lorsque, par exemple:

$$\lim_{d \to 0} \sup_{a \in A^d} |v_a^d| = 0.$$

Malheureusement, cette hypothèse est irréaliste dans le cas usuel où v^d est une erreur de mesure. Par contre (cf. W. Feller [8]), (5-1) est vérifiée lorsque v^d est un *bruit blanc* (et sous l'hypothèse supplémentaire que la famille (A^d) soit une suite croissante).

C'est pourquoi nous supposerons dans la suite que

(5-3) $\qquad v^d$ est un bruit blanc,

c'est à dire que les v_a^d sont des (réalisations de) variables aléatoires gaussiennes indépendantes identiquement distribuées de moyenne 0 et de variance η^2, i.e. telles que:

$$\forall a, b \in A^d, E(v_a^d) = 0 \quad \text{et} \quad E(v_a^d v_b^d) = \begin{cases} \eta^2, & a = b, \\ 0, & a \neq b, \end{cases}$$

où E désigne l'espérance mathématique.

D'autre part, posant

$$\mu = \mu(d) = \inf \{ \delta(a, b) ; a \in A^d, b \in A^d, a \neq b \},$$

nous supposerons que

$$d = O(\mu), d \to 0. \tag{5-4}$$

On vérifie facilement que (5-4) implique (4-3).

5.3. Résultats de convergence

Puisque $E(v^d) = 0$, on a:

$$\forall i = 0, \ldots, m, \ E\left[|f - \tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2\right] = |f - \sigma_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2 + E\left[|e_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2\right].$$

Le théorème 4.2 donne une estimation du terme $|f - \sigma_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2$. Pour borner le terme aléatoire $E\left[|e_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2\right]$, nous utiliserons le résultat suivant.

Théorème 5.1. *On suppose que les hypothèses* (4-5), (4-14) *et* (5-4) *sont vérifiées. Alors il existe une constante C telle que, pour d assez petit, on ait la majoration:*

$$\forall i = 0, \ldots, m, \ E\left[|e_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2\right] \leq C\eta^2 \frac{N^{(n+2(i-m))/2m}}{\varepsilon^{(n+2i)/2m}}. \tag{5-5}$$

Démonstration. Cf. F. Utreras [14]. ∎

Le second membre de (5-5) tend vers 0 pour $i = 0, \ldots, m$, s'il tend vers 0 pour $i = m$. Soit $\omega : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction vérifiant les conditions:

$$\lim_{N \to +\infty} w(N) = +\infty \quad \text{et} \quad \omega(N) = o(N^{2m/(n+2m)}), N \to +\infty. \tag{5-6}$$

Alors il est clair que le terme aléatoire tend vers 0 si:

$$\varepsilon = N^{n/(n+2m)} \omega(N). \tag{5-7}$$

Notons que (5-6) et (5-7) impliquent (4-14). En combinant les résultats précédents, on obtient le théorème suivant, qui prolonge un résultat de F. Utreras [14].

Théorème 5.2. *On suppose que les hypothèses* (4-2), (4-5), (5-4), (5-6) *et* (5-7) *sont satisfaites. Alors, quand* $d \to 0$:

$$\forall i = 0, \ldots, m-1, \; E\left[|f - \tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2\right] = O\left[N^{-2(m-i)/(n+2m)} \left(\omega(N)\right)^{(m-i)/m}\right]$$

et

$$E\left[|f - \tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_{m,\Omega}^2\right] = o(1).$$

Démonstration. On vérifie que les hypothèses de l'énoncé impliquent celles des théorèmes 4.2 et 5.1. Substituant l'expression (5-7) de ε dans la relation *(i)* du théorème (4-2) et dans (5-5), on obtient respectivement:

$$\exists C, \forall i = 0, \ldots, m-1, \; |f - \sigma_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2 \leq C N^{-\chi} \left(\omega(N)\right)^{(m-i)/m},$$

et

$$\exists C, \forall i = 0, \ldots, m, \; E\left[|e_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2\right] \leq C \eta^2 N^{-\chi} \left(\omega(N)\right)^{-(n+2i)/2m},$$

quand $d \to 0$, avec $\chi = \chi(i) = 2(m-i)/(n+2m)$.

Le résultat suit. ∎

Bien entendu, dans l'énoncé du théorème, on peut remplacer $N^{-2(m-i)/(n+2m)}$ par $d^{2n(m-i)/(n+2m)}$.

Remarque 5.1. On obtient ainsi la convergence vers 0 des quantités $E\left[|f - \tilde{\sigma}_\varepsilon^d|_{i,\Omega}^2\right], 0 \leq i \leq m$. On notera que les hypothèses (5-6) et (5-7) qui conditionnent le résultat sont *indépendantes de la fonction* f (et aussi d'ailleurs de la variance η^2), ce qui peut être intéressant dans la perspective de la détermination numérique du paramètre ε: pour le choix de ε, on ne dispose guère actuellement, le niveau de bruit étant supposé inconnu, que de la *méthode de validation croisée généralisée* (cf. P. Craven et G. Wahba [4]), dont la mise en oeuvre est a priori coûteuse (cf. cependant les travaux de D. Girard, en particulier [9]). ∎

Bibliographie

[1] ADAMS, R. A.: *Sobolev Spaces,* New York: Academic Press, 1975.
[2] CIARLET, P. G.: *The Finite Element Method for Elliptic Problems,* Amsterdam: North Holland, 1978.
[3] COX, D.: *Multivariate Smoothing Spline Functions.* SIAM J. Numer. Anal., **21,** n.º 4 (August 1984).
[4] CRAVEN, P. et WAHBA, G.: *Smoothing Noisy Data with Spline Functions.* Numer Math., **31,** 377-403 (1979).
[5] DUCHON, J.: *Fonctions-spline à énergie invariante par rotation.* Rapport de recherche n.º 27, mathématiques appliquées, Grenoble (1976).
[6] DUCHON, J.: *Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces.* RAIRO Anal. Numer. **10** (12), 5-12 (1976).
[7] DUCHON, J.: *Splines Minimizing Rotation-invariant Semi-norms in Sobolev Spaces.* Lecture Notes in Math., Springer, **571,** 85-100 (1977).
[8] FELLER, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* vol. 2, 2^{nd} ed., New-York: Wiley, 1971.
[9] GIRARD, D.: *Asymptotic Optimality of the Fast Randomized Versions of GCV and C_L in Ridge Regression and Regularisation.* RR 793-M, TIM3-IMAG, Univ. de Grenoble (1989).
[10] LÓPEZ DE SILANES, M. C. et ARCANGÉLI, R.: *Estimations de l'erreur d'approximation par splines d'interpolation et d'ajustement d'ordre (m, s).* Numer. Math. 56, 449-467 (1989).
[11] NEČAS, J.: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,* Paris: Masson 1967.
[12] RAGOZIN, D.: *Error Bounds for Derivatives Estimates Based on Spline Smoothing of Exact or Noisy Data.* J. Approx. Theory **37,** 335-355 (1983).
[13] STRANG, G.: *Approximation in the Finite Element Method.* Numer. Math. **19,** 81-98 (1972).
[14] UTRERAS, F.: *Convergence Rates for Multivariate Smoothing Spline Functions.* J. Approx. Theory **52,** 1-27 (1988).

Departamento de Matemática Aplicada, CPS
Calle María de Luna, 3
E-50015 Zaragoza, España

Laboratoire de Mathématiques Appliquées
URA CNRS 1204, Université de Pau,
Avenue de l'Université
F-64000 Pau, France

Recibido: 3 de septiembre de 1990