REVISTA MATEMATICA de la
Universidad Complutense de Madrid
Volumen 4, número 1; 1991.

Opérations sur les cartes et métamorphoses de la catégorie des G-ensembles

CHRISTIAN LÉGER

ABSTRACT. We call *metamorphosis* of a given category an autoequivalence functor, up to within natural equivalence. We show that, given a group G, the group of metamorphoses of the category of G-sets (as well as the corresponding group for «sufficiently big» subcategories) may be naturally identified to the group of outer automorphism of G. We get by this way a natural description of a group of known operations on tessellations of a surface: the identity operation, the Poincaré duality, and four others which generally change the topological type of the surface.

1. CARACTERISATION DE CERTAINES OPERATIONS SUR LES CARTES

Dans cette première partie, on rappelle l'interprétation fonctorielle des cartes en termes de Γ-ensembles, où Γ est le groupe cartographique. Le groupe des opérations sur les cartes s'identifie au groupe des automorphismes extérieurs de Γ ([8], [10]). Ce groupe d'opérations est alors identifié, grâce au résultat (voir théorème 10) de la deuxième partie, au groupe des métamorphoses d'une certaine catégorie des cartes et cartes généralisées.

S. E. Wilson [15] et S. Lins [11] ont mis en évidence des opérations (1) sur les *cartes* (2) (cartes finies au dessus de surface compacte, connexe, sans bord)

Nous remercions Jacques Emsalem qui, avec la notion d'autoéquivalence de catégorie, a rendu plus pertinent un premier énoncé ([9], théorème 1 et [10], théorème 11) et en a considérablement simplifié et resserré la démonstration.

Nous remercions à nouveau Christian Lair qui nous a donné l'idée décisive du lemme 6.

Nous sommes reconnaissant à Laurent Siebenmann des nombreuses discussions que nous avons eues avec lui alors que nous préparions [10] et tout spécialement de ce qu'il nous ait offert pour ces opérations cartographiques un nom poétique si suggestif.

1980 Mathematics Subject Classification (1985 revision): 18A22, 52B70, 51A10 (1991 revision).
Editorial de la Universidad Complutense. Madrid, 1991.

constituant avec la dualité de Poincaré et l'identité un groupe isomorphe au groupe symétrique S_3. G. A. Jones et J. S. Thornton [8] puis C. Léger et J.-C. Terrasson ([10], lemme 12) ont montré que ce groupe d'opérations s'identifie au groupe des automorphismes extérieurs d'un certain groupe (3), ce même *groupe cartographique* Γ (voir A. Grothendieck [5], C. Voisin et J. Malgoire [13, 14], P. Damphousse [3,4]) qui saisit la combinatoire des cartes: à chaque carte correspond un Γ -ensemble, correspondance induisant une équivalence de la catégorie des cartes avec pour flèches les revêtements ramifiés dans une certaine sous-catégorie (4) de la catégorie des Γ-ensembles. D'autres auteurs ont adopté indépendamment des points de vue voisins, tels G. A. Jones et D. Singerman [7] et R. P. Bryant et D. Singerman [1]. L. D. James [6] a exploré une généralisation en dimension n quelconque et notamment a explicité le groupe des automorphismes extérieurs (pour $n>2$ c'est un groupe dihédral d'ordre 8) d'un certain groupe Γ_n (généralisant le groupe Γ) attaché aux décompositions cellulaires des variétés de dimension n.

Nous considérons les cartes de dimension 2. En fait, nous avions démontré ([10], théorème 11) que ce groupe d'opérations sur les cartes s'identifie au groupe des automorphismes, à équivalence naturelle près, d'une catégorie définie de façon formelle ([10], définition 1) dont les objets finis représentent les cartes. Nous proposons ici, grâce à la définition des *métamorphoses,* un énoncé (voir théorème 1) qui correspond mieux à ce qui s'est imposé en matière d'identification de catégories: la notion d'équivalence (voir définition 2) plutôt que celle trop restrictive d'isomorphisme. Admettons, c'est le résultat (voir théorème 10) de la deuxième partie, que pour un quelconque groupe G le groupe des métamorphoses de la catégorie des G-ensembles, et même de toute sous-catégorie «assez grosse» de celle-ci, s'identifie au groupe des automorphismes extérieurs de G. Lorsque $G=\Gamma$, celui-ci s'identifie ([8] ou [10], lemme 12) au groupe symétrique S_3 des opérations sur les cartes. Ces opérations sont alors décrites comme étant les métamorphoses de toute sous-catégorie «assez grosse» de la catégorie des Γ-ensembles, et notamment de l'une d'elles qui est équivalente (C. Voisin et J. Malgoire [[14], théorème 3.2.3.], P. Damphousse [[4], p. 287], C. Léger et J.-C. Terrasson [[10], proposition 15]) à une catégorie des cartes et cartes généralisées:

Théorème 1. *Les dites opérations sur les cartes s'identifient aux métamorphoses de la sous-catégorie pleine de la catégorie des* Γ-ensembles *dont les objets sont transitifs, non vides, chacun définissant —bien sûr à conjugaison près— un stabilisateur qui soit un sous-groupe libre (5) de* Γ.

Notons pourtant que le groupe des métamorphoses de la catégorie des seules cartes proprement dites —équivalente, elle, à la sous-catégorie pleine des objets qui, vérifiant les conditions du théorème 1, sont de plus finis— reste inconnu.

2. METAMORPHOSES DE LA CATEGORIE DES *G*-ENSEMBLES

Rappelons la définition d'une équivalence de catégories (S. Mac Lane [12], théorème 3, p. 91) et donnons celle du groupe des métamorphoses d'une catégorie.

Définition 2. *Soient* K *et* K' *des catégories. Un foncteur* $F: K \to K'$ *est appelé* équivalence de catégories *ou, plus simplement,* équivalence, *s'il est essentiellement surjectif* (i.e. $\forall A' \in Ob(K')$, $\exists A \in Ob(K)$, $\exists i \in Fl(K')$ où $i: A' \to F(A)$ *est inversible*] *et est pleinement fidèle* [i.e. $\forall A, B \in Ob(K)$, $F: Hom(A, B) \to Hom(F(A), F(B))$ *est bijective*].

Il revient au même de dire qu'il existe un foncteur $G: K' \to K$ *tel que* GoF (*resp.* FoG) *soit naturellement équivalent au foncteur identique* IdK (*resp. au foncteur* idK'). *Autrement dit tel qu'il existe des applications* p *et* q *comme suit:*

* $p: A \in Ob(K) \to pA \in Fl(K)$, *où* $pA: A \to GoF(A)$,
telle que $\forall A \in Ob(K)$, pA *soit inversible*
et telle que $\forall A, B \in Ob(K)$, $\forall u \in Hom(A, B)$,

le carré
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{pA} & GoF(A) \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GoF(u)} \\ B & \xrightarrow[pB]{} & GoF(B) \end{array}$$
soit commutatif, et

* $q: A' \in Ob(K') \to qA' \in Fl(K')$, *où* $qA': A' \to FoG(A')$,
telle que $\forall A' \in Ob(K')$, qA' *soit inversible*
et telle que $\forall A', B' \in Ob(K')$, $\forall v \in Hom(A', B')$,

le carré
$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{qA'} & FoG(A') \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle FoG(v)} \\ B' & \xrightarrow[qB']{} & FoG(B') \end{array}$$
soit commutatif.

Définition 3. *Soit une catégorie* K. *On note* EquK *le monoïde* (6) *des équivalences de* K *dans* K *ou autoéquivalences de* K. *On note* MetK *et on appelle* groupe des métamorphoses *de* K *le groupe* (6) *quotient de* EquK *par la relation d'équivalence naturelle des foncteurs.*

On vérifie immédiatement la proposition suivante:

Proposition 4. *Toute équivalence d'une catégorie* K *dans une catégorie* K' *induit un isomorphisme de groupes de* Met K *sur* Met K'.

Soit pour toute la suite un groupe G.

On note respectivement Aut G, Int G, Out G le groupe des automorphismes de G, le sous-groupe distingué des automorphismes intérieurs, le groupe quotient Aut $G/$ Int G.

Un G-ensemble X c'est ausi bien une loi de composition externe $G \times X \to X$ satisfaisant aux axiomes usuels qu'un homomorphisme de G dans le groupe Bij(X) des substitutions de X. On utilise indifféremment un point de vue ou l'autre.

On note C la catégorie des G-ensembles ayant pour flèches les homorphismes de G-ensemble. Pour tout v dans Aut G, et tout objet X de C défini par l'homomorphisme $h: G \to \mathrm{Bij}(X)$, on a l'objet de C noté F$v(X)$ ayant même ensemble sous-jacent que X et défini par l'homorphisme $h \circ v^{-1}$.

Pour tout v dans Aut G on a le foncteur F$v: C \to C$ qui à l'objet X associe l'objet F$v(X)$ et agit trivialement sur les flèches.

On note encore G l'objet canonique de C défini par l'homomorphisme qui, à tout élément g de G associe la translation à gauche T$g: x \to gx$ de G.

On note S la sous-catégorie pleine de C dont les objets sont ceux isomorphes à l'objet canonique (ce sont ceux sources de flèches vers tout objet de C).

La sous-catégorie S est stable par les autoéquivalences de la catégorie C.

Théorème 5. *On a l'homomorphisme de* Aut G *dans* Equ C *qui à* v *associe* Fv. *Il induit un homomorphisme de* Out G *dans* Met C. *Celui-ci est un isomorphisme de* Out G *sur* Met C.

Lemme 6. *La sous-catégorie pleine* S *engendre la catégorie* C *par limites inductives.*

Plus précisément, soit un objet X de C. On lui associe la catégorie W dont les objets sont les éléments $x, y, \ldots$ de X et les flèches de x dans y sont les triplets (x, y, g) tels que $y = gx$. On lui associe encore le foncteur $J: W \to S$ qui à l'objet x fait toujours correspondre l'objet canonique G et à la flèche (x, y, g) fait correspondre la translation à gauche Tg. On a alors l'énoncé suivant:

Lemme 7. *L'objet* X *est limite inductive dans* C *du foncteur* J : W → S.

Soit en effet pour chaque objet x de W la flèche $j(x): J(x) \to X$ définie par $j(x)(g) = g^{-1}.x$. Alors ces flèches définissent un cône de base J.

Ce cône est universel et fait donc de X la limite inductive de J.

La correspondance qui vient d'être définie entre les objets de C d'une part et les catégories W et les foncteurs J d'autre part est fonctorielle. Tout ceci permet d'établir:

Proposition 8. *Soit une catégorie* C' *et des foncteurs* F1, F2 : C → C', *compatibles aux limites inductives. S'il existe une équivalence naturelle de la restriction à* S *de* F1 *vers celle de* F2, *alors il existe une équivalence naturelle de* F1 *vers* F2.

Ainsi, toute autoéquivalence de C, donc compatible aux limites inductives, est déterminée par sa restriction à S:

Proposition 9. *L'opération de restriction définit un homorphisme injectif de* Met C *dans* Met S.

On note S_0 la sous-catégorie pleine de C comportant l'objet canonique G pour seul objet. Le foncteur d'inclusion de S_0 dans S est une équivalence de catégories et induit donc un isomorphisme de Met S_0 sur Met S.

Comme il est trivial que Equ S_0 s'identifie à Aut G et que la relation d'équivalence naturelle dans Equ S_0 s'identifie à la congruence modulo Int G, alors Met S_0, et par suite Met S, s'identifie à Out G.

Ainsi, l'homomorphisme injectif de Met C dans Met S est en fait bijectif, et le théorème 5 annoncé est finalement démontré.

Tous les énoncés de cette démonstration restent vrais en remplaçant C par une quelconque sous-catégorie pleine K comportant l'objet canonique G et stable par les foncteurs Fv. On a en fait l'énoncé plus général suivant, où l'on note pareillement les foncteurs Fv et les foncteurs de K dans K induits:

Theoreme 10. *Soit une sous-catégorie pleine* K *de* C *comportant l'objet canonique* G *et stable par les foncteurs* Fv *pour* v *dans* Aut G. *On a l'homomorphisme de* Aut G *dans* Equ K *qui à* v *associe* Fv. *Il induit un homomorphisme de* Out G *dans* Met K. *Celui-ci est un isomorphisme de* Out G *sur* Met K.

3. NOTES

(1) H. S. M. Coxeter ([2], p. 420, premier alinéa) a décrit géométiquement l'une d'elles dans le contexte des cartes régulières: c'est une involution non standard.

(2) La terme de *carte* est ici synonyme de celui utilisé ailleurs de *pavage* ([9], définition 8). Toute carte possède notamment au moins une arête et, au contraire de [1, 7, 8], toute arête ne contenant qu'un sommet est une boucle.

(3) C'est le produit libre du groupe de Klein à 4 éléments par le groupe à 2 éléments.

(4) C'est la sous-catégorie pleine des objets finis de la sous-catégorie définie au théorème 1 ci-après.

(5) Cette caractérisation de liberté du stabilisateur associé ([9], lemme 5 et proposition 6), distinguant ceux des Γ-ensembles transitifs non vides correspondant à une carte ou une carte généralisée, remplace agréablement la condition moins intrinsèque des autres auteurs cités: les générateurs involutifs de la présentation classique de Γ agissent sans point fixe. Remarquons à ce propos que R. P. Bryant, G. A. Jones, D. Singerman, J. S. Thornton [1, 7, 8] ont proposé d'autres notions de carte et obtenu ainsi d'autres correspondances (voisines). D'autre part, P. Damphousse [3] a énoncé une propriété topologique (équivalente à la proposition 14 de [10]) qu'il a vérifiée dans un exemple et dont il est aussi trivial de déduire notre caractérisation.

(6) Nous ne discutons pas le fait qu'ici les supports des groupes et monoïdes ne sont pas nécessairement des ensembles.

Bibliographie

[1] Robin P. Bryant and David Singerman, *Foundations of the theory of maps on surfaces with boundary,* Quat. J. Math. Oxford 2, 36 (1985) 17-41.

[2] H. S. M. Coxeter, *Self dual configurations and regular graphs,* Bull. Amer. Math. Soc. 56 (1950) 413-455.

[3] P. Damphousse, *Topological Cartography* (1981) thèse 153, Université Paris 11, Paris, France.

[4] P. Damphousse, *Fondement de la description combinatoire des cartes cellulaires* (1987), Ann. Sc. Math. Québec, 11 n.º 2 (1987) 279-294.

[5] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme,* Notes multigraphiées.

[6] L. D. James, *Complexes and Coxeter Groups - Operations and Outer Automorphisms,* J. Algebra 113 (1988) 339-345.

[7] G. A. Jones and D. Singerman, *Theory of maps on orientable surfaces,* Proc. London Math. Soc. (3) 37 (1978) 273-307.

[8] G. A. Jones and J. S. Thornton, *Operations on maps and outer automorphisms,* J. Combin. Theory Ser. B 35 (1984) 93-103.

[9] C. Léger et J.-C. Terrason, *L'action du groupe symétrique S3 sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de pavages de surface fermée,* C. R. Acad. Sc. Paris 302 Sér. I, n.º 1 (1986) 39-42.

[10] C. Léger et J.-C. Terrasson, *Les cinq métamorphoses des surfaces pavées* (1987), Diagrammes Supp. au vol. 18, 1-48, Paris, France.

[11] S. Lins, *Graph-encoded maps*, J. Combin. Theory Ser. B 32 (1982) 171-181.

[12] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Coll. Graduate Texts in Mathematics 5 (1978) Springer-Verlag.

[13] C. Voisin et J. Malgoire, *Cartes cellulaires*, Cahiers Math. 12 (1977), Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, France.

[14] C. Voisin et J. Malgoire, *Cartes topologiques infinies et revêtements ramifiés de la Sphère*, Cahiers Math. 19 (1980), Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, France.

[15] S. E. Wilson, *Operators over regular maps*, Pacific J. Math. 81, n.º 2 (1979) 559-568.

Université PARIS 7.
U.F.R. de Mathématiques.
T. 45-55, 5e étage
2, place Jussieu
75005 PARIS
FRANCE

Recibido: 11 de julio de 1989
Revisado: 8 de octubre de 1990.