RACSAM
Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat.
VOL. **99** (2), 2005, pp. 211–217
Matemática Aplicada / Applied Mathematics

Singularity Analysis of a Nonlinear Fractional Differential Equation

Luis Vázquez

Abstract. The preliminary numerical estimations of the singularities of a nonlinear fractional differential equation are presented. The equation appears in the study of the travelling waves associated to a wave equation which is an interpolation between the classical wave equation and the Benjamin-Ono equation.

Análisis de las singularidades de una ecuación diferencial fraccionaria no lineal

Resumen. Se exponen las estimaciones numéricas preliminares de las singularidades de una ecuación diferencial fraccionaria no lineal. Dicha ecuación aparece en el estudio de las ondas viajeras asociadas a una ecuación de ondas que es una interpolación entre la ecuación de ondas clásica y la ecuación de Benjamin-Ono.

Se presentan unas estimaciones numéricas preliminares de las singularidades de las soluciones de la ecuación

$$\mathcal{L}u - u + u^p = 0 \tag{1}$$

donde $u = u(x)$ es función de una variable, el operador $\mathcal{L}$ es integral y se puede expresar en el espacio de Fourier como

$$\widehat{\mathcal{L}u}(\lambda) = D|\lambda|^\alpha \widehat{u}(\lambda) \tag{2}$$

siendo $1 \leq \alpha \leq 2$. El operador $\mathcal{L}$ así definido recibe el nombre de derivada fraccionaria de Riesz, y se trata de una de las posibles generalizaciones del concepto de derivada entera [1, 2].

La ecuación (2) aparece en el estudio de las soluciones tipo ondas viajeras de sistemas físicos diferentes [3].

En [4] se demuestra la existencia de soluciones tanto periódicas como localizadas para $\alpha \geq 1$, y en [5, 6] se estudia el comportamiento asintótico y la analiticidad de las soluciones localizadas. En concreto se demuestra que el operador $k(x)$ cuya transformada de Fourier cumple

$$\widehat{k}(\lambda) = (1 + |\lambda|^\alpha)^{-1} \tag{3}$$

determina el comportamiento asintótico de la solución. Si $\alpha = 2$ entonces tenemos la ecuación de ondas local cuyo comportamiento asintótico es exponencial, mientras que si $\alpha = 1$ tenemos una ecuación que resulta al estudiar las ondas viajeras de la ecuación de Benjamin-Ono que presentan un comportamiento asintótico algebraico. En la sección 1 se estudian las singularidades para el caso $\alpha = 1$ y diferentes valores de p, mientras que en la sección 2 se estudian las singularidades para diferentes valores de α.

Presentado por Dario Maravall Casesnoves.
Recibido: 1 de junio de 2005. *Aceptado*: 5 de octubre de 2005.
Palabras clave / Keywords: Derivada Fraccionaria, Transformada de Hilbert, Transformada de Fourier, Nolinealidad, Ondas Solitarias
Mathematics Subject Classifications: 42A38, 44A15, 26A33

1 Ecuación de Hilbert no lineal

En el caso de que $\alpha = 1$ la ecuación (1) se transforma en

$$\mathcal{H}u_x - u + u^p = 0 \tag{4}$$

donde $\mathcal{H}$ es el operador no local definido por la transformada de Hilbert:

$$\mathcal{H}u(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x')}{x' - x} \, \mathrm{d}x' \tag{5}$$

Teniendo en cuenta las transformadas de Fourier del operador derivada: $\widehat{\partial_x u}(\lambda) = -i\lambda\widehat{u}(\lambda)$, y de la transformada de Hilbert: $\widehat{\mathcal{H}u}(\lambda) = -i\mathrm{sign}(\lambda)\widehat{u}(\lambda)$, se obtiene al combinar ambos operadores que $\widehat{\mathcal{H}u_x}(\lambda) = -|\lambda|\widehat{u}(\lambda)$. Esta peculiar característica hace que la relación de dispersión del problema lineal derivado de la ecuación (4) sea $\omega = |\lambda|$, en vez de la relación armónica $\omega = \lambda^2$. Dicha relación de dispersión aparece en el estudio de ciertas redes metálicas [7], atómicas [3] y moleculares [8]. Precisamente en [8] se propone una ecuación para el estudio de excitaciones en redes de partículas con interacción tipo $1/x^2$ cuyo término dispersivo como el que nos ocupa, y cuyas soluciones en forma de ondas viajeras vienen descritas por la ecuación (4).

Cuando $p = 2$ la ecuación (4) también se puede obtener buscando soluciones tipo onda solitaria en la ecuación de Benjamin-Ono. En este caso, se conocen las singularidades de las soluciones, lo cual no ocurre cuando $p \neq 2$.

En [5] se demuestra que las soluciones localizadas de (4) admiten una extensión a una tira del plano complejo. Por soluciones localizadas se entiende aquellas que cumplen la condición

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x) = 0 \tag{6}$$

En un trabajo posterior [6] los mismos autores demostraron que las soluciones localizadas del problema en cuestión decaen asintóticamente como $u(x) \sim G_\infty / x^2$ según $x \to \pm\infty$ siendo

$$G_\infty = \lim_{x \to \infty} x^2 u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u^p(x) \, \mathrm{d}x \tag{7}$$

1.1 Análisis de singularidades de la ecuación

1.1.1 Notación

Con el fin de simplificar las explicaciones y notación de los cálculos que siguen a continuación, es conveniente introducir las siguientes definiciones.

En primer lugar diremos que un punto singular $z = z_0$ de una función $f(z)$ es una *singularidad de tipo PP* (Potencia de Polo) si en un entorno de $z = z_0$ la función $f(z)$ puede ser representada como *una potencia de orden $\rho > 0$, $\rho \in \mathbb{Q}$, de cierta función meromórfica que tiene un polo simple en $z = z_0$*

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^\rho} \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n \tag{8}$$

Si el orden ρ es entero entonces la singularidad será un polo, mientras que si ρ es racional no entero será un punto de ramificación. Por lo tanto las singularidades de tipo PP engloban los polos y los puntos de ramificación.

Para estudiar el carácter de las singularidades y dado que el operador $\mathcal{H}$ impide la sustitución directa de la serie de potencias usaremos la transformada de Fourier. Para denominar la función y a su transformada de Fourier usaremos la notación

$$\widehat{u}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x$$
$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\lambda) e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda$$

Siendo z la variable compleja $x + iy$, se representa por $u(z)$ a la función que resulta de extender la función $u(x)$ solución de la ecuación (4) al plano complejo. Con el fin de calcular la transformada de Fourier de un desarrollo en serie como el de la ecuación (8), se usará el siguiente lema cuya demostración se encuentra en [9]:

Lemma 1 *Supongamos que la función $u(x)$, $x \in \mathbb{R}$, satisface las condiciones:*

a) $u(x) \in L_1(-\infty, \infty)$*;*

b) $u(x)$ *puede ser continuada en la franja del plano complejo* $S_\gamma^+ = 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \gamma$ *de manera que* S_γ^+ *pertenezca a una hoja de* $u(z)$*, y para cualquier* y*,* $0 \leq y \leq \gamma$*,*

c) $u(z)$ *tiene un único punto singular* $z = z_0 = x_0 + iy_0$*,* $y_0 < \gamma$ *y en una vecindad de* $z = z_0$ *la función* $u(z)$ *puede ser representada en la forma*

$$u(z) = \frac{1}{(z - z_0)^\rho}\left[\sum_{n=0}^{N} A_n (z - z_0)^n + r(z - z_0)\right] \tag{9}$$

para algún $\rho \in \mathbb{R}$*;* $A_0, \ldots, A_N \in \mathbb{C}$ *y* $r(z - z_0) = o((z - z_0)^N)$ *según* $z \to \infty$*.*

Entonces la expansión asintótica de la transformada de Fourier de $u(z)$ *para* $\lambda \to \infty$ *es*

$$\widehat{u}(\lambda) = 2\pi e^{iz_0\lambda} \sum_{n=0}^{N} \frac{A_n e^{-i\frac{\pi}{2}(n-\rho)}}{\Gamma(\rho - n)} \lambda^{(\rho-n-1)} + o(\lambda^{(\rho-N-1)} e^{-y_0\lambda}) \tag{10}$$

para ρ *no entero y*

$$\widehat{u}(\lambda) = 2\pi e^{iz_0\lambda} \sum_{n=0}^{\rho-1} \frac{A_n e^{-i\frac{\pi}{2}(n-\rho)}}{\Gamma(\rho - n)} \lambda^{(\rho-n-1)} + o(e^{-y_0\lambda}) \tag{11}$$

para ρ *entero y mayor que uno.*

El lema anterior nos va a permitir relacionar el desarrollo en serie entorno a la singularidad más cercana con el desarrollo asintótico de la transformada de Fourier. El término residual $r(z - z_0)$ puede incluir singularidades débiles tipo logarítmica.

Como se indica en la tercera condición del lema, se va a suponer que la función $u(z)$ tiene una sola singularidad, si bien el resultado se puede extender fácilmente a un caso más general. Si la función $u(z)$ posee un conjunto de singularidades en los puntos $z = z_k$, $k = 1, \ldots, M$ es posible obtener una expresión para la transformada de Fourier como suma de todas las contribuciones (10) y (11) de cada una de las singularidades.

1.2 Estimación de los términos de la serie

Con el objetivo de caracterizar el tipo de singularidades que posee (4) suponemos desde el principio que la singularidad es de tipo PP. Según lo comentado anteriormente la solución localizada $u(z)$ puede escribirse como

$$u(z) = \frac{1}{(z-z_0)^\rho} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n \tag{12}$$

donde tomaremos $z_0 = x_0 + i\Omega$ por comodidad.

De acuerdo con el lema 1 el desarrollo en serie de $\widehat{u}(\lambda)$ es

$$\widehat{u}(\lambda) = 2\pi e^{-\Omega\lambda} e^{ix_0\lambda} \sum_{n=0}^{\Delta(\rho)} \frac{A_n e^{-\frac{i\pi}{2}(n-\rho)}}{\Gamma(\rho-n)} \lambda^{\rho-n-1} \tag{13}$$

donde $\Delta(\rho)$ es

$$\Delta(\rho) = \begin{cases} \infty & \text{si } \rho \text{ no es entero} \\ \rho - 1 & \text{si } \rho \text{ es entero} \end{cases}$$

Por otro lado la función $u^p(x)$ tendrá las mismas propiedades que la función $u(x)$ y por lo tanto también se podrá escribir de la forma

$$U^p(z) = \frac{1}{(z-z)^{p\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z-z)^n \tag{14}$$

donde

$$B_n = \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_p=m \\ 0\le i_k \le m}} A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_p} \tag{15}$$

Por lo tanto, la expresión asintótica de $\widehat{u^p}(\lambda)$ en la singularidad $z = z_0$ es

$$\widehat{u^p}(\lambda) = 2\pi e^{-\Omega\lambda} e^{ix_0\lambda} \sum_{n=0}^{\Delta(p\rho)} \frac{B_n e^{-\frac{i\pi}{2}(n-p\rho)}}{\Gamma(p\rho-n)} \lambda^{p\rho-n-1} \tag{16}$$

Conocidas las expansiones asintóticas de $\widehat{u}(\lambda)$ y de $\widehat{u^p}(\lambda)$ estamos en disposición de realizar la sustitución en la ecuación. Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de la ecuación (4) se escribe $(|\lambda|+1)\widehat{u}(\lambda) = \widehat{u^p}(\lambda)$ podemos sustituir (13) y (16) en ambos lados e igualar los términos de igual potencia en λ. De esta manera obtenemos los coeficientes del desarrollo en serie.

A primer orden en λ se obtienen

$$\rho = \frac{1}{p-1} \tag{17}$$

$$A_0 = \left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} e^{-\frac{i\pi}{2(p-1)}} \tag{18}$$

Las simulaciones numéricas permiten comprobar entre otras cosas que la transformada de Fourier de $u(x)$ no presenta comportamiento oscilatorio por lo que el término principal de la expansión asintótica de $\widehat{u}(\lambda)$ cuando $\lambda \to \infty$ es

$$\widehat{u}(\lambda) = \frac{2\pi\lambda^{-\frac{p-2}{p-1}} e^{-\Omega_p\lambda}}{\Gamma\left(\frac{1}{p-1}\right)(p-1)^{\frac{1}{p-1}}} + o\left(\lambda^{-\frac{p-2}{p-1}} e^{-\Omega_p\lambda}\right) \tag{19}$$

que se corresponde con

$$u(z) = \frac{1}{(z - i\Omega_p)^{\frac{1}{p-1}}} \left[\frac{e^{-\frac{i\pi}{2(p-1)}}}{(p-1)^{\frac{1}{p-1}}} + o(1) \right] \tag{20}$$

en las proximidades de la singularidad $z_0 = i\Omega_p$.

A partir de esta expresión asintótica es posible calcular la siguiente expresión con la que podremos obtener numéricamente el valor de la singularidad (Ω_p):

$$S(\lambda) \equiv \ln \left[\frac{\lambda^{-\frac{p-2}{p-1}} (p-1)^{\frac{1}{p-1}} \, \Gamma\left(\frac{1}{p-1}\right) |\widehat{u}(\lambda)|}{2\pi} \right] \approx -\Omega_p \lambda \tag{21}$$

1.3 Suma de los términos de la serie

Si tenemos en cuenta todos los términos de la serie es posible, tras algunos cálculos, obtener la siguiente relación de recurrencia para los coeficientes A_n:

$$A_n = \frac{i}{n+1} \left(A_{n-1} - \widetilde{B_n} \right) \tag{22}$$

donde el coeficiente $\widetilde{B_n}$ no depende de A_n y se define como

$$B_n = pA_0^{p-1} A_p + \widetilde{B_n} \tag{23}$$

y B_n está definido en (15).

La serie formada con los coeficientes A_n, $n = 0, 1, \ldots$ anteriores puede ser sumada explícitamente ya que las expresiones (18), (17) y (22) también pueden obtenerse al sustituir la serie (8) en la ecuación

$$i\phi_z - \phi + \phi^p = 0 \tag{24}$$

y calculando los términos con la misma potencia $(z - z_0)^{k-\rho}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Por lo tanto los términos de la serie deberán converger a la solución general de la ecuación (24) que es

$$\phi_{\tilde{z}}(z) = \left(1 - e^{-i(p-1)(z-z_0)} \right)^{-\frac{1}{p-1}} \tag{25}$$

donde $z_0 \in \mathbb{C}$ es arbitrario.

Sin embargo se puede comprobar inmediatamente que la función (25) no satisface la ecuación (4). Por lo que hay algún error en el planteamiento. El error está en suponer que la singularidad es de tipo PP de manera que el término $r(z - z_0)$ de la ecuación (9) no es como lo habíamos supuesto.

2 Ecuación diferencial fraccionaria no lineal

En esta sección se extienden los cálculos anteriores para valores de α no enteros. En concreto los resultados aquí mostrados resultan válidos para $1 \leq \alpha \leq 2$, en donde está probada la existencia de soluciones tipo onda solitaria. Dicha existencia ha sido posible extenderla, numéricamente, al caso $\alpha \lesssim 1$.

Como en el caso anterior se vio que la singularidad en el plano complejo ($z = z_0$) de las soluciones localizadas no eran de tipo PP, es lógico suponer que ahora tampoco lo serán. Así la expresión más correcta para las soluciones es:

$$u(z) = \frac{1}{(z - z_0)^\rho} \left[A_0 + r(z - z_0) \right] \tag{26}$$

donde ρ y A_0 son constantes, y $r(z - z_0)$ es una función que, en general, no puede ser desarrollada en serie de Taylor entorno al punto $z = z_0$.

Si aplicamos el lema 1 a la expresión (26) se obtiene que el desarrollo asintótico de $\widehat{u}(\lambda)$ entorno al punto $z = z_0 = x_0 + i\Omega$ es

$$\widehat{u}(\lambda) = 2\pi e^{-\Omega\lambda} e^{ix_0\lambda} \frac{A_0 e^{\frac{i\pi}{2}\rho}}{\Gamma(\rho)} \lambda^{\rho-1} + o\left(\lambda^{\rho-1} e^{-\Omega\lambda}\right) \tag{27}$$

La función $u^p(x)$ también se puede desarrollar de modo similar a $u(x)$, obteniendo

$$u^p(x) = \frac{1}{(z-z_0)^{p\rho}} \left[A_0^p + s(z-z_0)\right] \tag{28}$$

donde $s(z - z_0)$ es una función que no puede ser desarrollada en series de Taylor entorno al punto $z = z_0$. De nuevo al aplicar el lema 1 se obtiene que la transformada de Fourier de $u^p(x)$ es

$$\widehat{u^p}(\lambda) = 2\pi e^{-\Omega\lambda} e^{ix_0\lambda} \frac{A_0^p e^{\frac{i\pi}{2}p\rho}}{\Gamma(p\rho)} \lambda^{p\rho-1} + o\left(\lambda^{p\rho-1} e^{-\Omega\lambda}\right) \tag{29}$$

Sustituyendo lo anterior en la expresión de Fourier de la ecuación (1) ($(|\lambda|^\alpha + 1)\widehat{u}(\lambda) = \widehat{u^p}(\lambda)$) e igualando los términos con menor potencia de λ se obtiene

$$\rho = \frac{\alpha}{p-1} \tag{30}$$

$$A_0 = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p\alpha}{p-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p-1}\right)}\right)^{\frac{1}{p-1}} e^{-\frac{i\pi\alpha}{2(p-1)}} \tag{31}$$

expresiones que resultan análogas a las obtenidas en (17) y (18).

De nuevo, un estudio numérico permite analizar la forma de las soluciones tipo onda solitaria y concluir que, al igual que ocurría en el caso anterior, la transformada de Fourier de la solución no presenta oscilaciones y por lo tanto la singularidad se encuentra situada sobre el eje imaginario, no teniendo parte real. De esta manera la ecuación (27) puede escribirse en las inmediaciones de la singularidad $z_0 = i\Omega_{p,\alpha}$ como

$$\widehat{u}(\lambda) = \frac{2\pi e^{-\lambda\Omega_{p,\alpha}} \left(\Gamma\left(\frac{p\alpha}{p-1}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}}{\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{p-1}\right)\right)^{\frac{p}{p-1}}} \lambda^{\frac{p-1-\alpha}{p-1}} \tag{32}$$

y su transformada $u(z)$ por tanto

$$u(z) = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p\alpha}{p-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p-1}\right)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{e^{-\frac{i\pi}{2}}}{(z - i\Omega_{p,\alpha})}\right)^{\frac{\alpha}{p-1}} \tag{33}$$

de donde se obtiene la expresión

$$S_\alpha(\lambda) \equiv \ln\left[\frac{\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{p-1}\right)\right)^{\frac{p}{p-1}} \lambda^{\frac{p-1-\alpha}{p-1}} |\widehat{u}(\lambda)|}{2\pi\left(\Gamma\left(\frac{p\alpha}{p-1}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}}\right] \approx -\Omega_{p,\alpha}\lambda \tag{34}$$

que va a permitir calcular numéricamente el valor de la singularidad $\Omega_{p,\alpha}$.

Acknowledgement. Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología bajo el Proyecto BFM2002-02359.

References

[1] Samko, S. G., Kilbas, A. A. y Marichev, O. I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach.

[2] Maravall, D. (1971). Rev. Ac. Ci. Madrid **65**, 245–258.

[3] Ishimori, Y. (1982). Prog. Theor. Phys., **68**, 402–410.

[4] Bona, J. L., Bose, D. K. y Benjamin, T. B. (1976). In *Applications of Methods of Functional Analysis in Mechanics (Joint Sympos., IUTAM/IMU, Marseille,1975)* 207–218. Springer Berlin.

[5] Li, Y. A. y Bona, J. L. (1996). SIAM J. Math. Anal., **27**, 725–737.

[6] Bona, J. L. y Li, Y. A. (1997). J. de Math. Pures et Appl., **76**, 377–430.

[7] Kittel, C. (1966). *Introduction to Solid State Physics* John Wiley & Sons, New York.

[8] Gaididei, Y., Mingaleev, S., Christiansen, P. y Rasmussen, K. (1997). Phys. Rev. E, **55**, 6141.

[9] Alfimov, G. L., Usero, D. y Vázquez, L. (2000). J. Phys. A: Math. Gen., **33**, 6707–6720.

Luis Vázquez
Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Informática
Universidad Complutense de Madrid
28040-Madrid